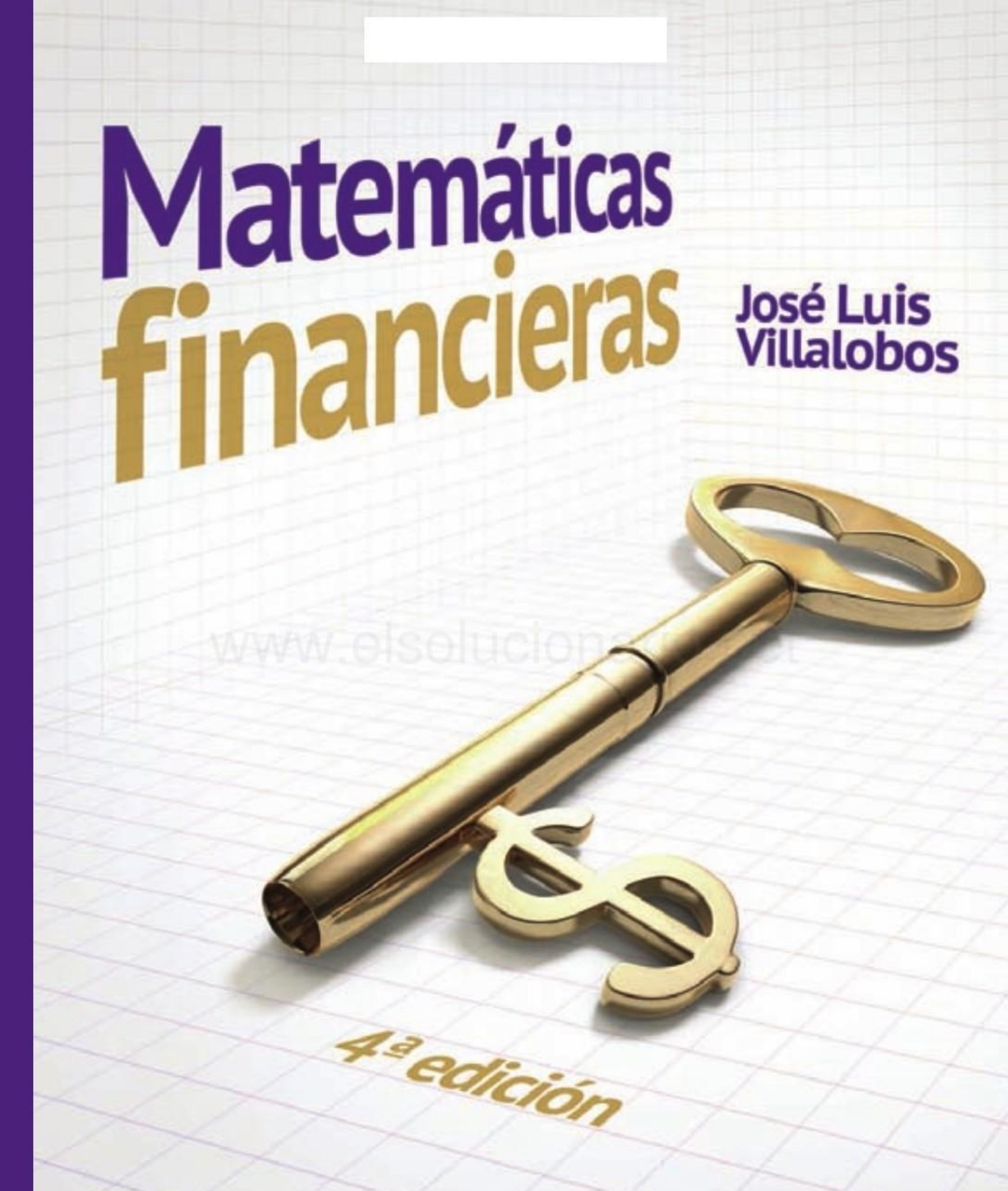


ALWAYS LEARNING PEARSON

Significado de literales

- A Amortización, porción de la renta que se abona al capital.
- a Base de la potencia enésima del número a. Base de los logaritmos.
- a_1 Primer término de una sucesión.
- a_i i-ésimo término en las sucesiones.
- a_n Término enésimo de las sucesiones.
- a^n Enésima potencia del número a.
- $\sqrt[n]{b}$ Raíz enésima del número b.
- C Capital, Valor presente, Valor actual, Principal. Valor original de un activo que se deprecia.
- CETE Certificado de la Tesorería de la Federación.
- CPP Costo porcentual promedio de captación.
- C_n Valor de rescate, es el valor al final de la vida útil de un activo que se deprecia.
- C_{np} Valor final de una cantidad C, luego de tener np incrementos o decrementos.
- C_k Valor contable o valor en libros al final del k-ésimo año de un activo que se deprecia.
- D Descuento. Deudas, un miembro de la ecuación de valores equivalentes.
- d Diferencia común en las progresiones aritméticas. Tasa de descuento. Diferencia entre dos rentas sucesivas en la amortización constante. Diferencia en la amortización de créditos y en la constitución de fondos de renta variable aritméticamente. Tasa de depreciación.
- e Tasa efectiva de interés compuesto. Base de los logaritmos naturales, $e = 2.71828$ aproximadamente.
- f Tasa de variación en las rentas de las amortizaciones y fondos de renta variable geométricamente.
- g Tasa de interés global.
- I Intereses, diferencia entre el monto y el capital.
- IPC Índice de precios y cotizaciones.
- i Tasa de interés simple. Tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año. Tasa de interés nominal. Tasa de inflación en la depreciación de activos.
- i/p Tasa de interés por periodo capitalizable cada periodo.
- K Constante de proporcionalidad.
- $\text{Ln}(x)$ Logaritmo natural de x, la base es e.
- $\text{Log}(x)$ Logaritmo común de x, la base es 10.
- M Monto de un capital, Valor acumulado, Valor futuro, Montante.
- m Número de términos de una sucesión o serie (n).
- n Número de años del plazo en anualidades e inversiones con interés compuesto. Tiempo o plazo con interés y descuento simple.
- np Número de periodos o rentas en anualiddes, amortizaciones y fondos.
- P Valor comercial o valor descontado de un documento que se negocia antes de su vencimiento. Pagos, un lado de la ecuación de valores equivalentes. Probabilidad de un evento.
- PIB Producto interno bruto.
- p Frecuencia de conversión, número de veces por año en que se capitalizan los intereses. Número de rentas por año en las anualidades, la amortización de créditos y la constitución de fondos.
- R Renta, pago periódico en las anualidades, los fondos y la amortización de créditos. Valor de la depreciación anual.
- r Razón constante en las progresiones geométricas.
- S Saldo insoluto en la amortización de créditos (SI).
- S_n Suma de los primeros términos de una serie (S_m).
- SPD Saldo promedio diario, en tarjetas de crédito e inversión.
- v Razón de variación constante en una sucesión.
- U Utilidades, sinónimo de intereses en inversiones.
- UDI Unidades de inversión.
- x Literal que más se utiliza para representar a las incógnitas, en las ecuaciones.
- $A, B, L, K, V, X, Y, A_i, C_i, M_i, R_i$, etc. Son variables auxiliares que no tienen significado específico alguno, pero se utilizan para simplificar y desarrollar las fórmulas en este libro.

Fórmulas

Enésimo término de las progresiones aritméticas.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \text{Página 61}$$

Suma de los primeros términos de una serie aritmética.

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n) \text{ o bien, } S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d] \qquad \text{Página 63}$$

Enésimo término de las progresiones geométricas.

$$a_n = a_1(r^{n-1}) \qquad \text{Página 69}$$

Suma de los primeros n términos de una serie geométrica.

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \text{ o bien, } S_n = na_1 \qquad \text{Página 71}$$

Intereses.

$$I = M - C \quad I = Cin \qquad \text{Página 95}$$

Fórmula del interés simple.

$$M = C(1 + in) \qquad \text{Página 96}$$

Valor comercial de un documento con descuento simple.

$$P = M(1 - nd) \quad D = Mnd \qquad \text{Página 111}$$

Amortización de un crédito con interés simple.

$$R = (C/2n)[(n+1)i + 2] \qquad \text{Página 131}$$

Tasa de interés global total.

$$g = (n+1)(i/2) \qquad \text{Página 133}$$

Saldo insoluto en operaciones de crédito con interés simple.

$$S = (n-k)(C/n) \qquad \text{Página 134}$$

Fórmula del interés compuesto.

$$M = C(1 + i/p)^{np} \qquad \text{Página 168}$$

Tasa de interés efectiva, i es tasa nominal.

$$e = (1 + i/p)^p - 1 \qquad \text{Página 178}$$

Monto acumulado en una anualidad anticipada.

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right) \qquad \text{Página 230}$$

Valor presente de una anualidad ordinaria.

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right) \qquad \text{Página 240}$$

Valor presente de una anualidad anticipada.

$$C = R(1+i/p)\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right) \qquad \text{Página 249}$$

Monto acumulado de una anualidad ordinaria.

$$M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right) \qquad \text{Página 251}$$

Amortización constante de un crédito.

$$R_1 = A[1 + (np)(i/p)] \text{ y } R_N = R_1 - (N-1)d \qquad \text{Página 314}$$

$$\text{donde } A = C/np \quad \text{y} \quad d = A(i/p)$$

Intereses que se generan en la amortización constante.

$$I = (Ci/2p)(np + 1) \qquad \text{Página 317}$$

Amortización de renta variable aritméticamente, gradiente.

$$C = T(R_1) + V(d) \text{ donde } T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p} \qquad \text{Página 323}$$

y

$$V = \frac{1-(1+np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

Amortización de renta variable geométricamente, serie en escalera.

$$C = \frac{R_1}{f - i/p}\left(\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right) \qquad \text{Página 328}$$

Monto acumulado en un fondo de renta variable aritméticamente.

$$M = (1 + i/p)(A + B) \text{ donde} \qquad \text{Página 371}$$

$$A = R_1\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right) \quad B = d\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1 - (np)(i/p)}{(i/p)^2}\right)$$

Monto de un fondo de renta variable geométricamente.

$$M = R_1\left(\frac{1+i/p}{f-i/p}\right)[(1+f)^{np} - (1+i/p)^{np}] \qquad \text{Página 376}$$

Depreciación anual en el método de la línea recta.

$$R = \frac{C - C_n}{n} \qquad \text{Página 402}$$

Valor de rescate de un activo, con inflación en el método de la línea recta.

$$C_n = C(1+i)^n - R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \text{Página 407}$$

Valor contable de un activo que se deprecia con el método de la suma de dígitos.

$$C_k = C - \frac{k(C - C_n)}{2S}(2n - k + 1) \qquad \text{Página 422}$$

Valor en libros de un activo que se deprecia con el método de la tasa fija.

$$C_k = C(1-d)^k \text{ donde } d = 1 - \sqrt[n]{C_n/C} \qquad \text{Página 430}$$

Depreciación de un activo con el método del fondo de amortización.

$$R = \frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1} \qquad \text{Página 441}$$

Matemáticas financieras

Cuarta edición

Ing. José Luis Villalobos Pérez
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

Revisión técnica

Francisco Alberto Piña Salazar
Coordinador de Matemáticas
Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México

Ernesto Hernández Pérez
Profesor del Área de Matemáticas
Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México

Cuauhtémoc Tenopala Granados
Coordinador del Área de Matemáticas
Universidad La Salle

Luis Guillermo Serrano Rolón
Catedrático
Colegio de Matemáticas Básicas
Escuela Bancaria y Comercial

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

VILLALOBOS, JOSÉ LUIS

Matemáticas financieras. Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-1020-1
Área: Universitarios

Formato: 18.5 × 23.5 cm Páginas: 504

Dirección general: Laura Koestinger
Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editora: Gabriela López Ballesteros
e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisión de producción: Rodrigo Romero Villalobos
Diseño de portada: Jorge Evia / Ricardo López
Gerencia editorial
Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

CUARTA EDICIÓN, 2012

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-1020-1
ISBN E-BOOK: 978-607-32-1021-8
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1022-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

Contenido

Prólogo

Alguna razón tienen quienes clasifican a las matemáticas, el mayor obstáculo de muchos estudiantes, en 3 importantes categorías: las *útiles*, las *inútiles* y las *perjudiciales.* Las 2 primeras son las que todos utilizamos cuando, por ejemplo, compramos una prenda de vestir con un descuento; o cuando revisamos el cambio, es decir, la diferencia entre lo que nos cuesta un artículo y el dinero que dimos para pagarlo; y mas aún, cuando observamos el reloj para determinar la hora con minutos y segundos.

Por otro lado, hay evidencias de que matemáticos investigadores de renombre, dicho con todo respeto, padecen de insomnio, falta de apetito y otra sintomatología, cuando buscan el camino adecuado para demostrar un teorema o un argumento matemático válido para llegar a importantes conclusiones en sus investigaciones, y esto es un ejemplo de la última categoría.

Por supuesto que todas las áreas de las matemáticas son útiles; de otro modo simplemente perderían su razón de ser, y el desarrollo de la tecnología y los avances de la ciencia no serían posibles sin el recurso del **vigor** y el **rigor** de las matemáticas. Más bien, ello dependerá de la persona, su profesión o actividad en particular ya que, por ejemplo, a un niño con menos de 2 años de edad para muy poco le servirían los conocimientos matemáticos.

Este libro se dedica al estudio de las matemáticas financieras, una de las ramas más útiles, interesantes y de mayor aplicación de las matemáticas modernas. Es el resultado de un esfuerzo por ofrecer de forma lógica, clara, sencilla y muy accesible, la metodología, las fórmulas, los conceptos y los procedimientos para conocer cómo los bienes y el dinero pierden o cambian su valor y su poder adquisitivo con el paso del tiempo. Busca ser un auxiliar importante para asesores financieros y hombres de negocios, contadores, administradores, actuarios, economistas y, en general, para quienes tienen capitales para invertir o se ven en la necesidad de conseguir dinero en préstamo; y especialmente para los docentes y los alumnos que tienen la necesidad de cursar o impartir esta asignatura.

Tenemos que reconocer que el estudio y aprendizaje de las **matemáticas financieras** es tan sencillo como aprender cómo trasladar, en el tiempo y de manera simbólica, los capitales y los montos que intervienen en cualquier operación financiera o comercial.

Al igual que en las ediciones anteriores, en ésta se mantienen las características que han gustado a nuestros lectores, entre las que destacan:

- La aplicación y justificación en situaciones de la vida cotidiana de casi todas las fórmulas, para lograr su fácil comprensión, incluso para quienes no han tenido contacto alguno con los temas que aquí se estudian.
- Buena cantidad de ejercicios resueltos con más de un método, como otra alternativa de solución, para comprobar que los problemas estén bien trabajados, ya que esto estimula al estudiante a seguir aprendiendo y a resolver las tareas y ejercicios encomendados por el profesor.
- Se agregaron más **diagramas de tiempo** que, junto con las **ecuaciones de valores equivalentes**, son útiles para plantear y resolver problemas donde intervienen muchas cantidades de dinero y fechas.
- Uno de los principales obstáculos para aprender matemáticas es la carencia o el olvido de los conocimientos elementales del álgebra básica; por ello, se han incluido los primeros 2 capítulos: *Fundamentos de matemáticas* y *Series y sucesiones* (aritméticas y geométricas), para facilitar en buena medida la comprensión y la asimilación de los contenidos aunque, cabe mencionarlo, no se perderá continuidad si no se incluyen en un curso regular.

En relación con esta cuarta edición pueden mencionarse las siguientes novedades importantes:

- En cada capítulo se incluye un par de ejercicios con aplicación de tecnología (prácticas en Excel en la página web), además de los problemas resueltos con calculadora científica o financiera.
- Se modificaron la redacción y los datos de más del 60% de los problemas propuestos y resueltos, actualizándolos a la realidad de nuestros países de habla hispana, porque a veces resolver los mismos problemas de forma repetitiva y por tiempo prolongado resulta tedioso y aburrido, sobre todo para el docente. También se cambió la redacción de los problemas que, a juicio de nuestros lectores, resultaban algo confusos en su planteamiento.
- Se incluyen ejercicios relacionados con la **campaña del redondeo**, las **compras a plazos**, supuestamente sin intereses, casos especiales de inversiones donde se ofrece ganar intereses por 10 meses habiendo contratado a 7, y del muy famoso **Teletón**.
- En todas las secciones de ejercicios, o casi en todas, se incluyó o se incrementó el número de problemas de *falso* o *verdadero*.
- En el apéndice del libro se incluyen, además del índice analítico, una tabla con el número de día del año que es útil para conocer los plazos en problemas donde los tiempos están en días; el glosario, y las respuestas a todos los ejercicios con número impar. Las fórmulas básicas aparecen en la contraportada.

- En cada sección de ejercicios se señalaron con un asterisco los problemas que, a nuestro criterio, tienen mayor grado de dificultad.
- Los capítulos 8 y 9 debidamente actualizados se podrán consultar en www.pearsoneducacion.net/villalobos, donde respectivamente se tratan los temas de *acciones*, *bonos* y *obligaciones* y las *anualidades contingentes*. Además, esta página incluye:

  ➢ Una relación o lista de los problemas de aplicación que se tratan en el libro, sobre todo al final de cada capítulo.
  ➢ Las respuestas de los problemas con número par propuestos en cada sección, dado que de los impares están en el apéndice del libro impreso.
  ➢ Un **glosario** de los términos financieros que se mencionan en el libro.
  ➢ Tablas financieras que son útiles para obtener respuestas aproximadas, sobre todo cuando se cuestionan las tasas de interés.
  ➢ La solución de todos los ejercicios propuestos al final de cada sección.
  ➢ Problemario con ejercicios que se proponen para que el usuario refuerce sus habilidades para resolverlos.

Por otra parte, los docentes que adopten el libro en sus cursos podrán obtener el manual de soluciones del maestro, un banco de preguntas adicionales y prácticas en Excel para cada capítulo del libro.

Sus comentarios, sugerencias y opiniones sobre esta obra serán bienvenidos en la dirección electrónica del autor: luisvilla_lobos@yahoo.com.mx, o en la editorial.

Al estudiante

Es probable que tu interés y tu entusiasmo por aprender matemáticas no sea tan relevante, como tu dedicación y preferencia por otras asignaturas, por lo que hacer referencia a las causas que dieron lugar a estas actitudes, o pretender justificarlas, no es tan importante como encauzarlas a la búsqueda de recursos que propicien, tal vez no el gusto por las matemáticas, pero sí su mejor comprensión, sobre todo en un sentido conceptual y de contexto, sin menosprecio de su utilidad práctica, que es fundamental.

Por lo anterior, creemos conveniente puntualizar lo siguiente, con la intención de ayudarte a lograr mejores resultados al final de tus cursos, particularmente el de matemáticas:

- Sabemos de profesionistas muy destacados que probablemente no fueron estudiantes sobresalientes; sin embargo, prepararse mejor cada día incrementa las posibilidades de éxito en el ejercicio profesional. Es común que los mejores alumnos logren los mejores empleos o sean los mejores empleadores.
- Recuerda que es importante entender lo que te explican en el aula tus profesores; también es indispensable que después repases y reafirmes lo que ahí te enseñaron. La mejor manera de lograr lo anterior es a través de la realización de todos los ejercicios y las experiencias de aprendizaje que te encomienden; de otra forma, tal vez se logre el éxito en la enseñanza, no en el aprendizaje, binomio fundamental en nuestra actividad como docente y como alumno.
- Sabemos que nadie nace sabiendo, por lo que para aprender es necesario que aclares todas las dudas e inquietudes que surjan en tus clases: no temas preguntar ni pienses en el qué dirán; recuerda que es mejor hacer preguntas que parezcan tontas que quedarse en

la ignorancia toda la vida, además de que si no preguntas, tu presencia en la universidad será inútil, lo mismo que los esfuerzos, los sacrificios y la abstención de ciertos entretenimientos que conlleva el ser un buen estudiante.

- No te desesperes ni abandones tu actividad de aprendizaje cuando no sepas cómo empezar a resolver un problema o no llegues a la solución correcta. Recuerda que ni siquiera con mucha práctica y experiencia siempre se obtienen respuestas acertadas en un primer intento, y no pocas veces es indispensable armarse de paciencia y perseverancia para lograrlo.

Deseamos fervientemente que en esta cuarta edición encuentres el soporte y el complemento adecuados de la insustituible labor, orientación y enseñanza del profesor. Además, nos será muy satisfactorio saber que nos constituiremos en una parte importante de tu preparación y desarrollo profesionales.

JOSÉ LUIS VILLALOBOS PÉREZ

Agradecimientos

A todos los profesores que utilizan y recomiendan mi libro como texto u obra de consulta en sus cursos, a quienes también agradezco sus valiosas sugerencias e importantes comentarios para esta cuarta edición.

A Pearson Educación, a los editores Gabriela López Ballesteros y Felipe Hernández Carrasco, así como a todo el personal que de alguna manera participó en la realización y también a quienes intervinieron en la promoción de este libro.

A los revisores técnicos, por su tiempo y experiencia vertidos en el mejoramiento de la calidad del proyecto.

A quienes me ayudaron con la captura del material manuscrito y con la resolución de algunos problemas y ejercicios propuestos.





Fundamentos de matemáticas

Contenido de la unidad

En este primer capítulo se examinan algunos conceptos básicos del álgebra ordinaria, que son importantes en el estudio y el aprendizaje de las matemáticas financieras y otras áreas de la matemática aplicada.

Se inicia con algunas propiedades de los números, los exponentes y sus leyes, así como la simplificación y las operaciones elementales con expresiones algebraicas. Sin profundizar en el tema, se dan los elementos indispensables para plantear y resolver ecuaciones, principalmente lineales, ya que en casi todos los capítulos subsecuentes se requiere que el estudiante tenga la habilidad y la destreza para encontrar la solución de las ecuaciones.

Posteriormente se trata el tema de *logaritmos,* que son particularmente importantes, por ejemplo, para resolver ecuaciones donde la incógnita es el exponente, que es una situación que se presenta cuando

se requiere conocer el plazo de una inversión o el número de pagos para amortizar un crédito. También se analiza el concepto de *tanto por ciento,* el cual es fundamental en cualquier estudio de índole financiera o comercial.

El capítulo concluye con el planteamiento y la resolución de problemas de aplicación.

Puesto que quizás este capítulo es uno de los más arduos del curso, el autor recomienda estudiarlo con una buena dosis de paciencia, detenimiento y muchas ganas de aprender, teniendo en cuenta que su cabal comprensión y asimilación facilitarán el estudio de los que siguen.

1.1 Los números

Hablar de matemáticas aplicadas en cualquiera de sus especialidades es referirse a números. Por ello, nuestro punto de partida es una breve introducción al estudio de las propiedades y las reglas, como aquellas que se utilizan en las operaciones con números.

Diariamente se manejan cantidades que se representan mediante diferentes tipos de números, como los enteros, los fraccionarios, los positivos, los negativos, los pares, etcétera. Todos ellos forman parte de lo que se conoce como el conjunto de los *números reales.*

Por supuesto que existen otros números que no pertenecen a ese conjunto, los que no son reales, los llamados *imaginarios,* pero poco tienen que ver con la matemática de los negocios y las finanzas. Dos de estos números son, por ejemplo, las 2 soluciones de la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

de donde al sumar -1 a los 2 lados y sacar raíz cuadrada a -1 resulta:

$$x^2 = -1$$

$$\text{o bien, } x = \pm\sqrt{-1}$$

que son números imaginarios, no son reales, y se denotan con $\pm i$ respectivamente.

Redondeo de números

El criterio más generalizado para redondear los números es el que considera lo siguiente:

a) Si el primer dígito que se desprecia es mayor que 5, entonces el que se retiene se incrementa en 1; por ejemplo: 42.53621, con 2 decimales queda: 42.54.

b) Si el primer dígito que se desprecia es menor que 5, el que se retiene no cambia; por ejemplo, el redondeo de 2.328543 a 4 decimales es 2.3285.

c) Si el primer dígito que se desprecia es igual a 5, hay 2 opciones:

1. El último dígito que se retiene se incrementa en 1; si a la derecha del 5 hay, por lo menos, 1 que sea mayor que 0, por ejemplo, 5.085013 se redondea como 5.09 con 2 decimales.

2. Si a la derecha del 5 hay sólo ceros y el último que se retiene es par, éste no cambia, pero se incrementa en 1 si es impar. Por ejemplo, 425.32500 o 425.325 se redondea a 425.32, y 0.8375 se redondea a 0.838, con 3 decimales.

Para tener mayor precisión en el resultado final, se recomienda no hacer el redondeo en las operaciones y resultados parciales, sino hasta el final.

Ejemplo 1

Al redondear el número $X = 38.72514685$ a 6, 4, 2 y 7 cifras decimales respectivamente queda:

$$X = 38.725147$$
$$X = 38.7251$$
$$X = 38.73$$
$$X = 38.7251468$$

Note que al redondear X a los enteros quedará: $X = 39$.

Otra forma de redondear un número es redondearlo al entero mayor, y un ejemplo es lo que hacen las tiendas de autoservicio con la **campaña del redondeo** para ayudar a las personas de bajos recursos o instituciones de beneficencia, reteniendo los centavos que faltan para tener pesos completos cuando el cliente paga su compra en las cajas.

1.2 Exponentes, radicales y leyes de exponentes

La enésima potencia de un número.

Definición 1.1

Si a es un número real y n es entero positivo, entonces, la **enésima potencia** de a se define como:

$$a^n = \underbrace{a(a)...(a)}_{n \text{ factores}}$$

donde a es la **base** y n es el **exponente**.

Note que la enésima potencia de un número es una multiplicación sucesiva.

Ejemplo 1



a) La tercera potencia de 5 es 125 porque:

$$5^3 = 5(5)(5) = 25(5) = 125$$

b) La quinta potencia de -3 es igual a -243 porque:

$$(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = 9(9)(-3) = -243$$

Recuerde que si el exponente es impar cuando la base es un número negativo, el resultado es negativo y es positivo si la potencia es un número par.

c) La vigésima potencia de 1.0215 es:

$$(1.0215)^{20} = 1.530267728$$

Notas*:

i. Recuerde que al multiplicar o dividir 2 números con el mismo signo, el resultado es positivo; mientras que será negativo cuando tengan signo contrario.

ii. Si el exponente de un número es muy grande o se involucran decimales, es necesario recurrir a la calculadora electrónica para obtener la potencia del número.

Cuando el exponente es cero o negativo, se aplica la siguiente definición:

Definición 1.2

Si a es diferente de 0, entonces,

$$a^0 = 1$$

y si el exponente es negativo, entonces,

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Esto significa que todo número diferente de 0, elevado a la potencia 0, es igual a 1 y un exponente negativo se hace positivo o, mejor dicho, cambia su signo si se pasa al denominador de una fracción; y también en este caso, la base debe ser diferente de 0 porque no se puede dividir entre cero.

Ejemplo 2



a) $(-7,529.58)^\circ = 1$

b) $(1+3i)^{-1} = 1/(1+3i)$

c) $3/x = (3)(1/x) = 3x^{-1}$

d) $(3-x)^{-5} = 1/(3-x)^5$

e) $\dfrac{A}{(1.053)^4} = (A)\dfrac{1}{(1.053)^4} = A(1.053)^{-4} = A(0.813366938)$

f) 0^{-3} no está definido, la base no debe ser cero.

g) $(5a-3)^\circ$ no está definido para $a = 3/5$, ¿por qué?

Los exponentes fraccionarios indican raíces de números que involucran **radicandos**, ya que así se llama lo que está dentro del símbolo $\sqrt{\ }$ y se aplica la siguiente definición:

Definición 1.3

La raíz enésima de b es:

$\sqrt[n]{b} = b^{1/n} = a$, siempre que $a^n = b$

Cuando el *orden de la raíz n*, es par, b debe ser no negativo.

* En la página web www.pearsoneducacion.net/villalobos están las instrucciones para calculadoras con lógica operacional RPN (Reverse Polish Notation).

Ejemplo 3



a) La raíz cúbica de 125 es 5 porque $5^3 = 125$

b) Una raíz cuadrada de 144 es 12 porque $12^2 = 144$, pero también -12 lo es porque $(-12)^2 = 144$. De hecho, todo número real tiene 2 raíces cuadradas.

c) La raíz doceava de 35.82135 es:

$$\sqrt[12]{35.82135} = 1.347447426 \text{ porque } (1.347447426)^{12} = 35.82135$$

Para simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones, se emplean las siguientes leyes exponenciales:

Leyes de exponentes

- En la multiplicación de 2 números con la misma base, se suman los exponentes y en la división se restan, es decir:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\text{y} \quad a^m/a^n = a^{m-n}, \text{ siempre que } a \neq 0$$

- La enésima potencia del producto de 2 números es igual al producto de las potencias, y la potencia enésima del cociente de 2 números es igual al cociente de las potencias, esto es:

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{y} \quad (a/b)^n = a^n/b^n, \text{ siempre que } b \neq 0$$

- La enésima potencia de la potencia enésima de un número, se obtiene multiplicando las potencias, es decir:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplo 4

a) $(-7)^2(-7)^3 = (-7)^{2+3} = (-7)^5$

b) $5^2(5)^{-3} = 5^{2+(-3)} = 5^{-1} = 1/5$

c) $8^5/8^3 = 8^{5-3} = 8^2$

d) $(8xyz)^3 = 8^3x^3y^3z^3$

e) $[(2-p)^3]^2 = (2-p)^{3(2)} = (2-p)^6$

f) $\left(\sqrt[6]{(1+x)}\right)^6 = 1+x$, $\quad 1+x$ debe ser positivo o cero.

El 6 de la potencia, se elimina con el 6 de la raíz en el último inciso, porque si un número se eleva a la potencia n y después se le saca la raíz enésima, o viceversa, entonces resulta el mismo número, es decir:

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = a^{n(1/n)} = a^{n/n} = a^1 = a$$

Advertencia

La raíz del producto de 2 números es igual al producto de las raíces, pero esto no se cumple para la suma. Por ejemplo:

$$\sqrt{4+9} \text{ no es igual a } \sqrt{4}+\sqrt{9}$$

Note, además, que si el exponente de a es de la forma m/n, entonces:

$$a^{m/n} = a^{m(1/n)} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 5



$$8^{2/3} = 8^{2(1/3)} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

también: $8^{2/3} = 8^{(1/3)2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

Ejercicios 1.2

En los problemas 1 a 9, obtenga una expresión equivalente.

1. 0^{40}

2. $(\sqrt[10]{729,421.3})^{10}$

3. $(4(35))^5$

4. $\sqrt[7]{1.000000}$

5. $(329,401.2)^0$

6. $(-58.003)^{-5}$

7. $(3x-1)^{3/4}$

8. $8^{5/3}$

9. $(\sqrt{32.4053})^{1/2}$

En los problemas 10 a 15, complete la frase.

10. La cuarta potencia de 10 es 10,000, entonces la raíz _______de 10,000 es igual a ______

11. $\sqrt[4]{81} = 3$ porque __________

12. La raíz cúbica de 125 es 5 porque _____

13. $(3-x)^0$ no está definido, no existe, cuando $x = 3$ porque _______

14. $4^{-3} = 1/64$, ya que _______

15. $(4+y)^{15}/(4+y)^{14} = 4+y$ porque _________

En los problemas 16 a 24 escriba una expresión equivalente y simplifique.

16. $(5^2)(-3)^2$

17. $(73^0a^3b^{-2})^2$

18. $4^3/(4^{-2}4^4)$

19. $\sqrt[3]{32}\,/\,\sqrt[3]{4}$

***20.** $(-10)^3(-10)^{-8}(-10)^5$

21. $\sqrt{40}\sqrt{a}$

22. $(\sqrt[3]{x+y})^{21}$

23. $(5^{-3})^3\,/\,5^{-8}$

***24.** $(27x^{-6}y^{18}z^6w^0)^{1/3}$

Evalúe las raíces y las potencias en los problemas 25 a 33 utilizando calculadora.

25. $\sqrt[3]{8.000000012}$

26. $(33.6323216)^{1/5}$

27. $\sqrt[4]{4.25}-\sqrt{4.25}$

28. $\sqrt[15]{1.2932}$

29. $(37{,}625.43)^{3/2}$

30. $\sqrt{73.2}\,/\,(9.98)^{3/2}$

***31.** $(13.2)^3(-4.15)^4/(1.32)^{0.5}$

32. $[(1.521)^5]^7$

33. $[(-428.51)^5]^{1/5}$

En los problemas 34 a 39, que se refieren a la sección 1.1, redondee el número dado a 6, 5, 3 y 2 cifras decimales.

34. 7.2532155

35. 0.000100381

***36.** 725.090090859

37. 16.37915425

38. 3,295.95949392

39. 0.903576508

40. ¿Cuál es el valor máximo del donativo que hace un cliente en la campaña del redondeo en una de sus compras?

41. ¿En qué caso un cliente no hace donativo alguno en la campaña del redondeo a pesar de haberlo aceptado?

42. Investigue y mencione por lo menos 3 instituciones que resultaron beneficiadas en la campaña del redondeo en su localidad.

En los problemas 43 a 51, seleccione la opción correcta, justificando su elección.

***43.** Al simplificar la expresión $(-5)^4(-5)^3\,/\,(-5)^8$ quedará:

a) $(-5)^{15}$ *b*) $-1/5$ *c*) -5 *d*) $1/5$ *e*) Otra

44. La raíz quinta de 1/3,125 es 1/5 porque:

a) $(1/5)^5=1/3{,}125$ *b*) $5^5=1/3{,}125$ *c*) $5^{1/5}=3{,}125$ *d*) $5/3{,}125=1/625$ *e*) Otra

45. Una expresión equivalente a $(\sqrt[4]{x+y-z})^4$ es:

a) $(x+y-z)^{16}$ *b*) $(x+y-z)^{1/16}$ *c*) $(x+y-z)^8$ *d*) $x+y-z$ *e*) Otra

---

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

46. $(3x+2)^{4/5}$ es lo mismo que:

a) $(3x+2)^4/(3x+2)^5$ *b*) $((3x+2)^5)^{1/4}$ *c*) $(3x+2)^{-1/5}$ *d*) $(3x+2)^{0.8}$ *e*) Otra

47. $(x-2y)^3\sqrt[6]{(x-2y)}$ es equivalente a:

a) $(x-2y)^{3/6}$ *b*) $(x-2y)^2$ *c*) $(x-2y)^{19/6}$ *d*) $(x-2y)^9$ *e*) Otra

***48.** Una expresión más simple para $5^3x^{-2}y^4 / 25x^3y^{-2}$ es:

a) $5x^{-6}y^{-8}$ *b*) $5y^6/x^5$ *c*) $x^5/5y^6$ *d*) $y^6/5x^5$ *e*) Otra

***49.** $(3x-2)^{-2}$ no está definida cuando $x = 2/3$ porque:

a) El exponente y la constante en la base son iguales.

b) No existe la división por cero.

c) El coeficiente x es mayor que el exponente.

d) El valor de x debe ser negativo.

e) Otra

50. Al redondear $x = 18.474507001$ a 3 decimales queda:

a) 18.476 *b*) 18.475 *c*) 18.474 *d*) 18.470 *e*) Otra

51. Es el máximo que un cliente dona para la campaña del redondeo en una de sus compras.

a) \$1.00 *b*) 99 centavos *c*) 0 centavos *d*) 1 centavo *e*) Otra

1.3 Expresiones algebraicas, ecuaciones y solución de ecuaciones

Expresiones algebraicas

El proceso que seguimos cuando nos enfrentamos a los problemas de cualquier área del conocimiento donde intervengan las matemáticas consiste básicamente en 3 etapas:

1. Planteamiento del problema, utilizando un modelo matemático, por ejemplo, una ecuación.
2. Solución o desarrollo del modelo que se ha planteado, es decir, resolver la ecuación.
3. Comprobar los resultados, si ello es posible, pero principalmente interpretarlos correctamente.

Con la habilidad algebraica, el uso de la calculadora electrónica y la extraordinaria rapidez y precisión de la computadora se facilita la segunda etapa de este proceso; sin embargo, la primera es en realidad la más difícil, puesto que en ésta es donde intervienen el razonamiento

y, en buena medida, la creatividad y experiencia de quienes están resolviendo el problema; además de que de esta primera etapa depende la buena interpretación del resultado.

Sólo por mencionar un ejemplo, suponga usted que un artículo para el aseo personal se vende en \$9.50 la pieza. ¿Cuántos puede comprar la señora González con \$75.00?

Planteamiento

Si x es el número de piezas entonces debe cumplirse que $9.50x = 75$.

Solución

Se resuelve la ecuación dividiendo ambos lados por 9.50.

$$x = 75/9.50 \quad \text{o bien,} \quad x = 7.8947$$

Interpretación

Puesto que x debe ser un número entero, no se venden fracciones de pieza, y la señora González puede comprar 7 piezas.

Definición 1.4

Expresión algebraica es el resultado de combinar números y letras relacionándolos mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y exponenciación.

Ejemplo 1

Las siguientes son expresiones algebraicas:

a) $x^2 - 3/x$

b) $(5 - x)(10 + 3x)$

c) $\log_3(40)$

d) $\sqrt{1 + i/6}$

e) $(1 + i/p)^{np}$

f) $1 - nd$

g) $\dfrac{1-(1+ni)(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$

h) $x + 2y - 5z$

i) $(3a + 2b)^x$

Ecuaciones

Definición 1.5

Ecuación es el resultado de igualar 2 expresiones algebraicas que se llaman *lados* o *miembros* de la ecuación.

Ejemplo 2

Las siguientes son ecuaciones:

a) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

b) $\log_a(30.5) = 5x$

c) $x + 3 = x^2 - 2$

d) $I = Cin$

e) $A = \pi r^2$

f) $M = C(1 + in)$

g) $e = (1 + i/p)^p - 1$

h) $A = bh/2$

i) $\sqrt{1+3x} = 7$

Solución de ecuaciones

Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de las incógnitas que las hacen verdaderas. Tales valores forman la **solución** de la ecuación.

Para resolver una ecuación:

Dependiendo del tipo de ecuación es el método que se emplea para hallar su solución; no obstante, las 3 propiedades básicas que se emplean en la mayoría de las ecuaciones son las siguientes:

a) Se suma, o se resta, cualquier número a los 2 miembros de la ecuación (*propiedad aditiva*).

b) Se multiplican los 2 lados por cualquier número que no sea 0 (*propiedad multiplicativa*).

c) Cualquier parte de la ecuación se reemplaza por otra igual (*principio de sustitución*).

Note usted que como consecuencia de la propiedad multiplicativa podemos elevar a la misma potencia los 2 miembros de la ecuación, así como también sacar la misma raíz enésima. También es cierto que al aplicar cuando menos una vez estas propiedades, se obtiene, se dice, una ecuación equivalente a la original.

Ecuaciones lineales

De acuerdo con su forma y las incógnitas que presentan, las ecuaciones son *lineales, cuadráticas, cúbicas, exponenciales, logarítmicas,* etcétera, y de una o más variables o incógnitas. A continuación se estudian las lineales.

Definición 1.6

Las **ecuaciones lineales** con una variable o incógnita x tienen la forma:

$$ax + b = 0 \text{ donde } a \neq 0$$

Ejemplo 3

Determine si las siguientes son ecuaciones lineales, tal como están o en su forma reducida, de ser así resuélvalas.

a) $2x + 3/4 = 1 - x/3$

b) $(3 - x)^2 = x^2 - 1$

c) $5{,}240 = 4{,}875\ (1 + 5i)^4$

d) $2/x + 3/2 = x$

e) $\sqrt[5]{5+2x} - 1.213 = 0$

f) $2 + \sqrt[4]{x-4} = 0$

solución

Note que:

En todos los casos, el objetivo es simple, aislar la incógnita dejándola sola en un lado de la ecuación.

El procedimiento que aquí se sigue puede no ser el único.

a) Se multiplican los 2 miembros de la ecuación por 4 y por 3, es decir, por 12 para eliminar los quebrados.

$$2x + 3/4 = 1 - x/3$$
$$24x + 9 = 12 - 4x$$

Luego se suma $4x$ a los 2 lados o como comúnmente se dice: $4x$ que está restando se pasa sumando al lado izquierdo. También se suma un –9 a cada lado.

$$24x + 4x = 12 - 9$$

Finalmente se suman los términos semejantes y se divide la ecuación entre 28, esto es que el 28 que está multiplicando a la x pasa dividiendo.

$$28x = 3$$
$$\text{o bien, } x = 3/28$$

Es la solución que puede comprobarse sustituyendo este valor por las x de la ecuación original.

b) Se desarrolla el cuadrado del binomio:

$$(3-x)^2 = 9 - 6x + x^2$$
$$\text{ya que } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$\text{entonces } 9 - 6x + x^2 = x^2 - 1$$

Se eliminan las x^2 ¿por qué?, luego el 9 pasa restando al lado derecho y finalmente se divide entre –6 para obtener la solución, es decir,

$$9 - 6x = -1$$
$$-6x = -10$$
$$x = -10/-6$$
$$\text{o bien, } x = 5/3\text{, simplificando.}$$

Recuerde que el resultado de dividir o multiplicar 2 números con el mismo signo es positivo y es negativo cuando tienen signo contrario.

c) En este caso hay que despejar la incógnita i, y para eso notamos que "estorban": el coeficiente 4,875, el 4 del exponente, el 1 del paréntesis y el 5 del coeficiente de la incógnita i. El primero pasa dividiendo, luego se saca raíz cuarta a los 2 lados y se pasa restando el 1 a la izquierda. Finalmente pasa dividiendo el 5. Será más claro si lo hacemos.

$$5{,}240 / 4{,}875 = (1 + 5i)^4$$
$$1.074871795 = (1 + 5i)^4$$
$$\sqrt[4]{1.074871795} = 1 + 5i$$
$$1.018214241 = 1 + 5i$$
$$(1.018214241 - 1) / 5 = i$$
$$\text{o bien, } i = 0.003642848$$

Resultado que, como siempre, se comprueba al sustituirlo en la ecuación dada.

d) Aquí se eliminan los quebrados al multiplicar todo por $2x$, el común denominador.

$$(2/x + 3/2 = x)\ 2x$$
$$4 + 3x = 2x^2$$

Puesto que no se elimina x^2, ha resultado una ecuación cuadrática, no lineal, y por eso, ahora no la resolvemos.

e) Pasa sumando el término constante, luego se elevan los 2 lados a la quinta potencia para eliminar la raíz quinta, se resta un 5 y finalmente se divide entre 2, es decir,

$$\sqrt[5]{5+2x} - 1.213 = 0$$
$$\sqrt[5]{5+2x} = 1.213$$
$$5 + 2x = (1.213)^5 \text{ recuerde que } (\sqrt[n]{a})^n = a,$$
cuando n es impar
$$2x = 2.626056129 - 5$$
$$2x = -2.373943871$$
$$\text{o bien, } x = -1.186971936$$

f) El 2 pasa restando y queda una igualdad donde el miembro izquierdo es positivo y el derecho negativo y por lo tanto no tiene solución.

Además en la ecuación original se afirma que la suma de 2 números positivos es igual a 0 y esto no es posible con números reales.

En la última sección de este capítulo se plantean y se resuelven problemas de aplicación empleando ecuaciones lineales y otras.

Ejercicios 1.3

1. Explique brevemente los conceptos de *expresión algebraica* y *ecuación*.

2. ¿Qué forma tienen las ecuaciones lineales con una incógnita?

3. ¿Cuáles son las 3 propiedades básicas que se utilizan para resolver ecuaciones?

4. ¿Cuáles son las ecuaciones *equivalentes*?

5. ¿Qué es la *solución* de una ecuación?

En los problemas 6 a 21, despeje la incógnita.

6. $4 - 2x = 0$

7. $5x - 4 = 2 - x/2$

8. $11 - 0.3x = 0.83$

***9.** $y/5 + 2y - 4/3 = 2$

10. $(1/4)(x - 3) = 5 - x$

***11.** $3/(x - 2) = 4 - 1/3$

12. $\sqrt{2-x} = 42.5$

***13.** $(1 + x/3)^8 = 1.276$

14. $(1 + i/6)^6 = 1.083$

15. $(1 + i)^3 = 4.82$

16. $\sqrt{x-3} = 2.35$

17. $2 + x = \sqrt{4+x^2}$

18. $x^2/(x - 2) = (x + 2)$

***19.** $12{,}525 = 11{,}080\,(1 + i/3)^{18}$

20. $\sqrt[3]{4-5x} = 2.35$

21. $428 = 324(4 - 3x)$

En los problemas 22 a 33, seleccione la opción correcta, justificándola.

22. Al resolver la ecuación $2/x + 3/4 = 5/x$ resulta:

a) $x = 4$ *b*) $x = 1/4$ *c*) $x = -4$ *d*) $x \neq 0$ *e*) Otra

23. ¿Cuál es el conjunto solución de $\sqrt[12]{4+x/2} = 1$?

a) $\{-6\}$ *b*) $\{2\}$ *c*) $\{16\}$ *d*) $\{-6, 6\}$ *e*) Otra

***24.** Obtenga la solución de la ecuación $\sqrt{3-x} = 2x$.

a) $\{1\}$ *b*) $\{-1, 3/4\}$ *c*) $\{-1\}$ *d*) $\{3/4\}$ *e*) Otra

***25.** Despeje la incógnita si $2x^2/(x + 1) - x + 1 = 0$.

a) $x = 1$ *b*) No hay solución *c*) $x = 1$ o $x = -1$ *d*) $x = -1$ *e*) Otra

***26.** Al despejar t de la ecuación $63.9 = 21.3(t^2 + 2)$ queda:

a) $t = 1$ *b*) $t = \pm 2$ *c*) $t = \pm 1$ *d*) $t = -1$ *e*) Otra

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

27. Si se despeja d de la ecuación $\sqrt[6]{3-1/d}=2$ quedará:

a) $d=-61$ *b*) $d=1/61$ *c*) $d=-1/61$ *d*) $d=-1.8775$ *e*) Otra

28. Obtenga la solución de la ecuación $\sqrt{2x+5}+3=0$.

a) $\{5/2\}$ *b*) No tiene solución real *c*) $\{2\}$ *d*) $(-5-\sqrt{3})/2$ *e*) Otra

***29.** ¿Cuál es la solución de la ecuación $x=\sqrt{3-x/2}$?

a) $\{-2, 3/2\}$ *b*) $\{3/2\}$ *c*) $\{2, -3/2\}$ *d*) No tiene solución *e*) Otra

30. Halle la solución de $\sqrt{5+x^2}=x+3$.

a) $\{-2, 3\}$ *b*) $\{0\}$ *c*) No tiene solución *d*) $\{3/4, -1/4\}$ *e*) Otra

31. Es la solución de la ecuación $x^2/(x-1)=x+1$.

a) No tiene solución *b*) $\{3\}$ *c*) $\{0\}$ *d*) $\{0, -3\}$ *e*) Otra

32. Es solución de la ecuación $(3-2i)^4=625$ es:

a) No tiene solución *b*) $\{-2, 2\}$ *c*) $\{-3, 0\}$ *d*) $\{-1\}$ *e*) Otra

33. Encuentre la solución de la ecuación $2/x-3=4-5/x$.

a) $\{1\}$ *b*) $\{-1, 1\}$ *c*) $x\neq 0$ *d*) $\{\sqrt{2}\}$ *e*) Otra

1.4 Tanto por ciento y porcentaje en serie

En la televisión y otros medios informativos se comunican a diario noticias y comerciales que se refieren a porcentajes. Veamos algunos ejemplos:

Al cierre de ayer la Bolsa de Valores subió 2.3 puntos porcentuales. La inflación del mes anterior fue de 0.73%. Los Certificados de la Tesorería de la Federación, CETES, se cotizan con el 7.51% de descuento. El revelado y la impresión de los rollos fotográficos tienen un 30% de descuento, y muchas otras en las que interviene el *tanto por ciento* que definimos a continuación.

Genéricamente, el X por ciento, denotado como X% de un número, es el resultado de multiplicar ese número por la fracción $X/100$, es decir:

Definición 1.7

El X% de A es

$(X/100)A$ o bien, $(XA)/100$

Ejemplo 1



a) El 75% de 1,528 es 1,146 porque (75/100)1,528 = 1,146

b) 798 es el 133% de 600 porque (133/100)(600) = 798

c) El X % de 7,350 es igual a 1,874.25 significa que $X = 25.5$ porque:

$$(X/100)7,350 = 1,874.25$$

y esto implica que $X = 1,874.25(100)/7,350$ o bien, $X = 25.5\%$

Ejemplo 2

Juan Gómez pagó $427.50 por un par de zapatos. ¿Cuál era el precio si los compró con el 25% de descuento?

solución

Juan pagó el 75% del precio original P y por eso debe cumplirse que:

$$(75/100)P = 427.50$$

de donde

$$P = 427.50(100)/75 \quad \text{o bien,} \quad P = \$570.00$$

Ejemplo 3

¿Cuánto dinero se gana durante un año si se depositan $25,000 en una cuenta bancaria que ofrece el 5.3% de interés anual?

solución

Los intereses I que produce un capital C en un plazo de un año, con intereses del 5.3% anual están dados por:

$$I = Ci$$

y en este caso $I = 25,000\ (0.053)$

o bien, $I = \$1,325.00$

Note que:

a) Para obtener el $X\%$ de un número A, se corre el punto decimal en X, 2 lugares a la izquierda y luego se multiplica por A. Por ejemplo, el 32.7% de 128 es:

$$0.327(128) = 41.856.$$

b) El $X\%$ de un número A es numéricamente igual al $A\%$ del número X; por ejemplo, el 40% de 70 es igual al 70% de 40 y esto es igual a 28, porque:

$$0.40(70) = 0.70(40) = 28$$

c) Existen porcentajes sucesivos, en serie, o en cadena; esto es, que el $X\%$ del $Y\%$ de un número A, estará definido por $(X/100)(Y/100)A$. Así, por ejemplo, el 20% del 35% del número 4,700 es 329, porque esto significa que:

$$(0.20)(0.35)\ 4{,}700 = 329$$

Puesto que $(0.20)(0.35) = 0.07$, la ecuación última puede reescribirse como:

$$(0.07)4{,}700 = 329$$

Por eso se dice que el 7% de un número A es **equivalente** al 20 del 35% de A.

Ejemplo 4

Anticipo en la compra de una computadora

¿Con cuánto dinero de anticipo compró una computadora de $13,500 el licenciado Pérez, si fue del 35% del precio?

solución

El 35% de 13,500 es igual a:

$$0.35(13{,}500) = \$4{,}725$$

y éste es el anticipo que dejó el licenciado Pérez.

Ejemplo 5

Comparación de porcentajes

¿Qué le conviene más a un empleado que recibe un aumento salarial? ¿Primero un 20% y poco después un 7% adicional, o recibir un 28% en total?

solución

Suponiendo que su salario original es S, después del primer incremento, éste será:

$$S_1 = S + (0.20)S$$
$$S_1 = (1 + 0.20)S$$
$$S_1 = (1.20)S$$

Después del segundo incremento, su salario será un 7% mayor:

$$S_2 = S_1 + (0.07)S_1$$
$$S_2 = (1.07)S_1$$
$$S_2 = (1.07)(1.20)S \qquad \text{porque } S_1 = (1.20)S$$
$$S_2 = (1.284)S \text{ ya que } (1.07)\ (1.20) = 1.284$$

es decir,

$$S_2 = (1 + 0.284)S$$

Este resultado representa un incremento total del 28.4%, cifra que es un poco mayor que el 28% de la segunda opción.

Ejemplo 6

Cálculo del precio anterior a partir del precio actual

El precio de un refrigerador es de \$7,650, ¿cuánto costaba hace 2 años si aumentó un 12.5%?

solución

Si el precio anterior es X, entonces el aumento es un 12.5% de X y el precio actual es:

$$X + (0.125)X = 7{,}650$$
$$(1 + 0.125)X = 7{,}650 \qquad \text{porque} \qquad ax + bx = (a + b)x$$
$$(1.125)X = 7{,}650$$

de donde $X = 7{,}650/1.125$ o bien, $X = \$6{,}800$

Ejemplo 7

Porcentaje de reducción en cartera vencida

¿En qué porcentaje se redujo la cartera vencida si actualmente es de \$138 millones y antes era de \$150 millones?

solución

La cartera vencida se redujo en 12 millones de pesos y el porcentaje de reducción es X tal que:

$$(X/100)150 = 12$$

de donde $X = 12(100)/150 = 8$

o bien, $X = 8\%$

Nota importante

Otra manera práctica y usual de obtener el resultado anterior consiste en dividir la cantidad actual entre la original y multiplicar por 100 el resultado, es decir,

$$(138{,}000/150{,}000)100 = 92$$

Esto se interpreta diciendo que la cantidad actual es igual al 92% de la cantidad inicial y por eso se redujo un 8%, número que resulta de restar el 92 del 100 por ciento.

Ejercicios 1.4

1. Escriba 10 ejemplos reales que involucren porcentajes.

En los problemas 2 a 10, complete la frase.

2. ______ es el 15.3% de 428.

3. El 96.2% de ______ es 4,321.

4. El 160.35% de 48.5 es ______.

***5.** El ______ % del 65% de 1,729 es igual a 400.0906.

6. ______ es el 125% del 59.6% de 5,129.3.

***7.** 42.8 es el 75.3% del ______% de 829.

8. El 35% del 63% del 130% de 7,991 es ______.

9. El 70% de 45 es igual al ______% de 70.

10. El 25.3% de ______ es igual al 80.3% de 25.3.

---

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

11. ¿Cuánto se paga por un traje que tiene el 35% de descuento y su precio es de $4,750?

12. ¿Cuánto valía el dólar si ahora se cotiza en $12.25 y aumentó un 1.75%?

***13.** ¿Cuánto recibe un empleado que, por su desempeño, se hizo acreedor a un premio del 95% del equivalente al 18% de su salario anual, el cual es de $34,250?

14. El salario mínimo diario es de $58.3. ¿De cuánto será el año próximo si se aprobará 5.3% de incremento?

15. La deuda externa de un país se redujo 8.4%. ¿De cuánto era si ahora es de $5,000 millones de dólares?

En los problemas 16 a 26, encuentre en términos de porcentaje la variación dada.

16. El precio de la gasolina se incrementó de $9.35 a $9.73 por litro.

17. Linda Vázquez disminuyó su peso de 52 a 48 kilogramos.

18. La deuda externa de un país varió de $680 millones a $550 millones de dólares.

19. El número de desempleados se redujo en 3,600. Eran 27,000.

***20.** La Bolsa de Valores cerró el día 23 en 37,910 puntos y el 24 en 37,750 puntos.

21. El ahorro interno del país creció de $5,300 millones a $5,724 millones de dólares.

22. Las exportaciones de una fábrica de artesanías aumentaron de 21.50 a 22.36 millones de pesos anuales.

23. El precio del petróleo se redujo de US$83.15 por barril a US$81.92.

24. El número de profesores que tiene un posgrado en el departamento de matemáticas creció de 13 a 19.

***25.** ¿Cuál fue el precio de un refrigerador si ahora cuesta $6,850 y aumentó un 4.25% su valor?

26. ¿Qué conviene más al comprador de rollos fotográficos, adquirirlos con descuento de 24.8% o adquirir 4 a precio de 3?

En los problemas 27 a 33, seleccione la opción correcta, justificándola.

27. El 251.3% de 251.3 es:

a) $(251.3)^2$ *b*) $(251.3)^2/100^2$ *c*) 631.5169 *d*) 63.15169 *e*) Otra

***28.** Si el 78.3% del x% de 14,320 es 1,753 entonces x es aproximadamente igual a:

a) 25.68 *b*) 15.63 *c*) 256.8 *d*) 156.3 *e*) Otra

29. El 58.3 del 325% de 301.48 es

a) 571,220 *b*) 5,712.20 *c*) 57,122 *d*) 571.229 *e*) Otra

30. Si el 25.7% del 3.2% del 125% de A es igual a 5.9624, ¿cuál es el valor de A?

a) 580 *b*) 21.71 *c*) 58 *d*) 217.1 *e*) Otra

31. Hace 2 meses Lupita nadaba 18 minutos de manera continua. Ahora nada 31.5 minutos. ¿En qué porcentaje aumentó su tiempo?

a) 7.5% *b*) 175% *c*) 75% *d*) 17.5% *e*) Otro

***32.** La calificación promedio en el primer examen parcial de matemáticas en un grupo fue de 6.30. En el segundo fue 7.56. Si se mantiene la tasa de incremento, de aumento, de cuánto será la del tercero?

a) 8.93 *b*) 9.07 *c*) 9.01 *d*) 9.10 *e*) Otra

***33.** En 2010 las utilidades de Cerámicas del Sur fueron de $875,000; y en el 2012, de $1'006,250. ¿De cuánto serán en 2016 si se mantiene la tasa de crecimiento bianual?

a) $1'243,107.30 *b*) $1'402,176.51 *c*) $1'330,765.62 *d*) $1'157,187.50 *e*) Otra

34. Las reservas internacionales del país fueron de 113,597 millones de dólares en 2010, ¿de cuánto fueron en 2009 si crecieron un 25%?

a) 90,877.6 *b*) 95,761.2 *c*) 110,020.5 *d*) 105,798.3 *e*) Otra

1.5 Razones y variación proporcional

Se sabe que la calificación que un estudiante obtiene en un examen de matemáticas, aumenta si crece el número de ejercicios que resolvió antes de realizarlo; pero es menor cuanto mayor sea el grado de cansancio, sobre todo intelectual, con el que llega a realizar tal examen. En estas condiciones se dice que la calificación es directamente proporcional al número de problemas resueltos, aunque es inversamente proporcional al nivel o grado de cansancio al hacer el examen.

Definición 1.8

Se dice que *y varía directamente como x, y es directamente proporcional a x,* cuando:

$$y = kx$$

donde x y y son variables, y k se llama *constante de proporcionalidad*.

Ejemplo 1

La producción en toneladas de caña de azúcar por hectárea aumenta con los kilogramos de fertilizante que se emplean, es decir, $P = kf$, donde P es la producción, y f los kilos de fertilizante. ¿Cuántas toneladas por hectárea se producen en una parcela que se abonó con 385 kg de fertilizante, si otra con condiciones semejantes produjo 91 toneladas por hectárea con 455 kg de fertilizante?

solución

El primer paso en esta clase de problemas consiste en obtener el valor de la constante sustituyendo los datos, los valores conocidos, en la ecuación de proporcionalidad, que en este ejemplo son:

$$P = 91 \text{ toneladas y } f = 455 \text{ kilogramos}$$

Así, $91 = k(455)$

De donde la constante de proporcionalidad es $k = 91/455$ o bien, $k = 0.20$.

Cabe decir que la constante k no tiene dimensión y por eso no importan las unidades que se utilicen al sustituir en la ecuación de proporcionalidad, siempre y cuando se mantengan.

Con este valor de k y el de $f = 385$ se obtiene la producción por hectárea:

$$P = 0.20(385) \text{ o bien, } P = 77 \text{ toneladas.}$$

Ejemplo 2

El volumen de ventas de un complemento dietético aumenta si se incrementa el número de veces en que se anuncia en televisión, lo cual significa que:

$$V = kt$$

Donde V son las ventas, t es la frecuencia o número de veces en que el complemento se anuncia, y k es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 3

Si en el ejemplo 2, el artículo que se anuncia 5 veces por hora, vende 4,500 piezas, ¿cuántas se venderán si se anuncia 6 veces por hora?

solución

Para hallar la constante de proporcionalidad, en la ecuación del ejemplo 2, se reemplazan V por 4,500 y t por 5:

$$4{,}500 = k(5)$$

De donde $k = 4{,}500/5$ o $k = 900$. Por lo tanto, si $t = 6$ entonces las ventas serán $V = 900(6)$ o $V = 5{,}400$ unidades.

Proporción inversa

Definición 1.9

La igualdad $y = k/x$ donde x y y son variables, x es diferente de 0 y k es la constante de proporcionalidad significa que *y es inversamente proporcional a x.*

Ejemplo 4

El bono mensual B que un empleado recibe por su puntualidad es inversamente proporcional al número de minutos m que llega tarde a su trabajo, lo cual significa que:

$$B = k/m$$

Si, por ejemplo, un empleado que llegó 3 minutos tarde recibió un bono de $350, ¿cuándo recibirá otro que llegó 5 minutos tarde?

solución

Para obtener el valor de la constante de proporcionalidad se tiene que:

$$350 = k/3 \qquad B = 350 \text{ y } m = 3$$

De donde,

$$k = 350(3) \text{ o bien, } k = 1050$$

y entonces, cuando $m = 5$, resulta un bono de:

$$B = 1050/5 \; B = 210 \text{ o bien, } \$210.00$$

Note que si un empleado tiene 0 minutos de retardo entonces la expresión $B = k/m$ se indetermina porque no hay división entre 0, pero en ese caso el empleado percibirá el bono máximo posible. También es cierto que muchas empresas que otorgan este tipo de bonificación, lo cancelan en su totalidad con un retardo del empleado.

Proporción mixta

Es claro que la proporcionalidad puede darse con más de 2 variables en proporción múltiple o mixta.

Ejemplo 5

Si se supone que la calificación C que se obtiene en un examen está en proporción directa al número de aciertos n y es inversamente proporcional al número de minutos t en que se resuelve, entonces,

$$C = kn/t$$

Por ejemplo, si Alejandra obtuvo 85 en un examen con 15 aciertos y 45 minutos, ¿qué calificación obtiene Carlos con 18 aciertos, si tardó 56 minutos para resolver su examen?

solución

Para la constante de proporcionalidad se tiene:

$85 = k(15)/45$ $C = 85$, $t = 45$ y $n = 15$ de donde $k = 85(45)/15$ o bien, $k = 255$

Entonces, la calificación de Carlos, puesto que $n = 18$ y $t = 56$, es:

$C = 255(18)/56$, $C = 81.9642857$ o bien, $C = 81.96$, redondeando.

Ejemplo 6

Un buen padre de familia acostumbra dar a sus hijos, al final de cada semestre, un premio P, en pesos, que es inversamente proporcional a la expresión:

$$\sqrt{(n+1)(100-c)}$$

donde n es el número de inasistencias que la escuela le reporta y c es la calificación semestral.

Entonces la ecuación de proporcionalidad es $P = \dfrac{k}{\sqrt{(n+1)(100-c)}}$.

Ejemplo 7



Si en el ejemplo 6 el hijo mayor recibió \$3,250 con un promedio de 80 y 2 inasistencias, ¿cuánto recibirá el más chico si registró 4 inasistencias y logró 95 de promedio semestral? ¿Y cuánto recibirá su hermana que tuvo sólo una inasistencia y 90 de promedio?

solución

La constante de proporcionalidad es $k = 25{,}174$ aproximadamente, ya que:

$$3,250 = \frac{k}{\sqrt{(2+1)(100-80)}} \qquad P = 3{,}250,\ n = 2 \text{ y } c = 80$$

De donde $k = 3{,}250\left(\sqrt{60}\right)$ o bien, $k = 25{,}174.39$

Entonces, el hijo menor logra un premio de:

$$P = 25{,}174.39/\sqrt{(4+1)(5)} \qquad n = 4 \text{ y } c = 95$$
$$= 25{,}174.39/5 \qquad \text{o bien,} \qquad P = \$5{,}035, \text{ aproximadamente}$$

y la hermana obtiene:

$$P = 25{,}174.39/\sqrt{(1+1)(100-90)}$$
$$= 25{,}174.39/4.472135955 \text{ o bien, } P = \$5{,}629.16$$

Ejercicios 1.5

1. Escriba y simbolice 10 ejemplos reales de proporcionalidad directa.
2. Mencione y simbolice 10 ejemplos de proporcionalidad inversa.
3. Escriba y represente con una ecuación 3 ejemplos reales de proporcionalidad mixta o combinada.
4. Los profesores del Departamento de Matemáticas reciben un bono quincenal por desempeño, que es proporcional al número de puntos t logrados en el semestre anterior. Si un docente recibe $1,350 quincenales por este concepto habiendo cumplido con 11 de los 13 posibles, ¿cuánto recibirá uno de sus compañeros que cubrió 12 puntos?

*5. Si A es directamente proporcional a la diferencia $p - q$ e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de r, ¿cuál será el valor de A cuando $p = 10$, $q = 2$ y $r = 16$, si cuando p, q y r valen 8, 3 y 4, respectivamente, A es igual a 30?

6. En el problema 5 ¿cuál será el valor de q si cuando $p = 12$ y $r = 9$, el valor de A es 28?
7. A las 5 de la tarde el poste en la esquina de una cancha de fútbol proyecta una sombra de 180 cm. ¿Cuál será la estatura del portero si a la misma hora proyecta una sombra de 382 cm? Considere que la altura del poste es de 85 cm.
8. Suponiendo que la calificación C que se obtiene en un examen está en proporción directa al número de aciertos, a, y es inversamente proporcional al número de minutos n en que se resuelve, ¿cuál es la ecuación de proporcionalidad?
9. En el problema 8 Teresa obtuvo calificación de 85 con 22 aciertos y 48 minutos para resolverlo. ¿Cuánto logrará su compañero Manuel si pudo contestar acertadamente 21 preguntas en 56 minutos?

*10. ¿Cuánto costará una refacción automotriz al producir 10,800 piezas, si el costo unitario es de $75 cuando se producen 10 mil unidades? Suponga que el precio se reduce conforme se incrementa la producción.

*11. Con base en el problema 10, ¿será posible reducir el precio unitario a $48 considerando que la capacidad de la planta de producción es de 15 mil piezas?

12. En el problema 10, ¿cuántas piezas deberán producirse para que el precio unitario sea de $63?

*13. Con base en el ejemplo 7 de la página 23, ¿qué promedio semestral deberá lograr un estudiante con 4 inasistencias, si quiere un premio de $5,000?

*14. Cuatro amigos invierten 50 mil, 60 mil, 83 mil y 22 mil pesos cada uno para abrir una ferretería. Acuerdan repartirse las utilidades de manera proporcional a su aportación. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si en el primer semestre sus utilidades fueron de $135,500?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

En los problemas 15 a 21 escriba la ecuación de proporcionalidad.

15. A varía con cuadrado de x e inversamente con el cubo de y.

16. P es inversamente proporcional a q y al cuadrado de la suma de q y r.

17. A es proporcional a la suma de 20 y x, e inversamente proporcional a la raíz cúbica de $y + 30$.

18. z es inversamente proporcional a la suma de los cuadrados de a y b.

19. A crece con h y decrece con el cuadrado de $v - t$.

***20.** M es proporcional a C y a la suma de 1 y el producto de i y n.

21. C es proporcional a I e inversamente proporcional al producto de i y n.

En los problemas 22 a 30, exprese con palabras cada ecuación de proporcionalidad.

22. $A = kbh/2$

23. $V = k/t$

24. $d = kvt$

25. $D = 2kr$

***26.** $A = k\dfrac{b + B}{2}h$

***27.** $Y = k(a + b)/(c - d)^3$

28. $D = k(a + b - 2c)$

***29.** $P = k(2 + 3a - b)^3/c$

30. $N = k \log(y + z)$

***31.** Por su puntualidad, Juan Pérez recibió un bono mensual de $520 habiendo llegado 3 minutos tarde durante el mes. ¿Cuánto recibirá este mes si llegó sólo 2 minutos tarde?

32. El despachador en una gasolinera recibe una bonificación semanal que depende del número de clientes atendidos. ¿Cuánto recibirá ahora si la semana anterior le dieron $325 y puso combustible a 405 automóviles? Suponga que ahora despachó a 432 clientes.

***33.** Suponiendo que el tiempo T en meses en que se construye una vivienda se reduce conforme crece el número de obreros n; pero aumenta con el número de inasistencias o faltas f en el primer día de labores de cada semana, de acuerdo con la ecuación:

$$T = 4 + kf/n$$

¿En cuánto tiempo se construirá una casa con 4 obreros que en total acumulan 13 faltas en lunes, si con 6 obreros que faltaron 16 veces en lunes se hizo una casa semejante en 10 meses?

***34.** En el problema 33, ¿cuántos obreros debe contratar el responsable de la obra para terminar una vivienda en 8 meses y medio, previendo que acumulan 12 faltas en lunes?

En los problemas 35 a 42, seleccione la opción correcta justificando su elección.

35. ¿Cuánto recibe de bonificación mensual un profesor que logró 15 puntos en su desempeño del semestre anterior? Considere que otro docente con 18 puntos percibe un bono de $756.00 mensuales.

a) $595 *b*) $630 *c*) $620 *d*) $610 *e*) Otra

***36.** Carlos, Jorge y Luis emprenden un negocio, aportando, respectivamente, $35,000, $47,000 y $53,000 cada uno. Si ganaron $63,000, ¿cuánto corresponde a Jorge considerando que se reparten las utilidades en proporción a su aportación?

a) $21,933.33 *b*) $24,266.26 *c*) $23,350.55 *d*) $22,067.35 *e*) Otra

37. En el problema 36, ¿cuánto ahorra Carlos si es el 60% de sus ganancias?

a) $11,400.00 *b*) $9,320.00 *c*) $9,800.00 *d*) $10,350.00 *e*) Otra

38. En el problema 36, ¿cuánto correspondería a Luis si invitaran a Claudia, quien aporta $27,000 a la sociedad? Considere que las utilidades crecen en proporción directa.

a) $24,733.33 *b*) $24,826.51 *c*) $25,667.45 *d*) $25,033.09 *e*) Otra

***39.** Las utilidades de una cadena de 13 supermercados fueron de 30 millones de pesos, cuando otra cadena tenía 16 sucursales en la misma ciudad. ¿De cuánto serán ahora que tiene 18 y la competencia tiene 21? Suponga que las utilidades son proporcionales al número de tiendas propias e inversamente proporcionales al número de la competencia.

a) $32 millones *b*) $31'950,242 *c*) $31'648,351.65 *d*) $31 millones *e*) Otra

40. En el problema 39, ¿cuántos supermercados deberá tener la primera cadena para lograr utilidades de $34.46 millones, si supone que la competencia tendrá 15?

a) 20 *b*) 13 *c*) 16 *d*) 14 *e*) Otra

41. En el mismo problema 39, ¿de cuánto serían las utilidades actuales si tuvieran 25 supermercados y la competencia también?

a) $40 millones *b*) $36'923,076.93 *c*) $35 millones *d*) $33'768,421.00 *e*) Otra

***42.** El testamento de un padre de familia estipula que su fortuna estimada en 18.3 millones de pesos se distribuya de la forma siguiente: el 12% para donarlo al Instituto de Asistencia Social y el resto entre sus 3 hijos, inversamente proporcional a sus edades y proporcionalmente al número de hijos de cada uno. ¿Cuánto hereda el menor considerando que tiene 37 años de edad y 3 hijos, mientras que los otros tienen, respectivamente, 40 años con 2 hijos, y 44 con 4?

a) $4'480,088.00 *b*) $5'231,195.00 *c*) $5'881,925.84 *d*) $5'128,295.00 *e*) Otra

1.6 Logaritmos, exponenciales y sus propiedades

Para simplificar expresiones y operaciones complejas, pero principalmente para resolver ecuaciones en que la incógnita está en el exponente, se utilizan los logaritmos. Pero, ¿qué es un logaritmo?

Como se aprecia en la siguiente definición y en los ejemplos, los logaritmos, que fueron creados al principio del siglo XVII por el matemático escocés John Napier, están muy relacionados con los exponentes y las leyes de los exponentes que se estudiaron en la sección 1.2, de tal forma que para hallar la potencia a la que se eleva un número dado para obtener otro, que también es conocido, se emplean logaritmos, como lo veremos a continuación. Definamos antes el concepto.

Definición 1.10

El **logaritmo** base a de un número N es el exponente x al que se eleva la base. Para obtener el número, es decir:

$$\log_a(N) = x, \text{ si y sólo si } a^x = N$$

Donde a es un número positivo diferente de 1 y N es positivo.

Ejemplo 1

La tercera potencia de 4 es 64, esto es, $4^3 = 64$; por lo tanto, según la definición 1.10, el logaritmo base 4 de 64 es igual a 3, es decir:

$$\log_4(64) = 3 \qquad \text{porque} \qquad 4^3 = 64$$

Ejemplo 2

La quinta potencia de l0 es 100,000, es decir, $10^5 = 100{,}000$; por lo tanto, el logaritmo base 10 de 100,000 es 5, de acuerdo con la definición 1.10:

$$\log_{10}(100{,}000) = 5 \qquad \text{porque} \qquad 10^5 = 100{,}000$$

Note que la *base* del logaritmo es igual a la *base* de la potencia, y que en la forma logarítmica está despejado el exponente, mientras que en la exponencial, es el número N el que está despejado.

Ejemplo 3



¿Cuál es el número N cuyo logaritmo base 2 es 21?

solución

En notación logarítmica, la pregunta se expresa como:

$$\log_2(N) = 21$$

y esto en forma de exponentes es lo mismo que:

$$2^{21} = N$$

Es decir,

$$N = 2'097{,}152, \text{ con la calculadora.}$$

Propiedades de los logaritmos

Se dijo que todo número a diferente de 0 elevado a la potencia 0 es igual a 1, es decir,

$$a^0 = 1 \text{ para todo } a \neq 0$$

Y esto, replanteado con logaritmos, nos da la primera propiedad:

$$\log_a(1) = 0$$

Quiere decir que el logaritmo de cualquier base de 1 es igual a cero.

Ejemplo 4

a) $\log_5(1) = 0$

b) $\log_{3/4}(1) = 0$

Pero $\log_{-3}(1)$ no existe porque la base debe ser positiva.

También es cierto que $a^1 = a$ porque todo número a la potencia 1 es igual al número y, por lo tanto, la segunda propiedad establece que:

$$\log_a(a) = 1$$

Es decir, que el logaritmo base a de la base es siempre igual a uno.

Ejemplo 5

a) $\log_{20}(20) = 1$

b) $\log_{10}(10) = 1$, pero

c) $\log_{-10}(-10)$ no existe porque la base y el número deben ser positivos.

Otra propiedad útil para el logaritmo de la potencia de un número es la siguiente, cuya demostración se deja como ejercicio.

$$\log_a(p)^n = n\log_a(p)$$

Es decir, el logaritmo de la enésima potencia de un número es igual a n veces el logaritmo del número.

Ejemplo 6

$$\log_5(4.28)^x = (x)\log_5(4.28)$$

Nótese que el exponente x de 4.28, se escribe como coeficiente del logaritmo de 4.28.

Ejemplo 7

$$\log_8 \sqrt[5]{58} = \log_8 (58)^{1/5} \qquad \text{porque} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$
$$= (1/5)\log_8(58)$$

Por supuesto que los logaritmos tienen otras propiedades importantes; sin embargo, las anteriores, y sobre todo la última, son las que se utilizan en este libro.

Ejercicios 1.6

1. Explique el significado de logaritmo base a de un número N.
2. ¿Qué significa $\log_a(5.4) = 384.5$ en forma exponencial?
3. ¿Cómo se escribe en forma exponencial una expresión equivalente a $\log_3(A) = 8.5$?
4. ¿Cómo se expresa $\log_{12}(P - 3) = 10$ en forma exponencial?
5. ¿Cómo se escribe $(1{,}0283)^{2-x} = 50.23$ en forma de logaritmos?
6. Cambie la ecuación $(A - 2)^x = 4 + B$ a forma logarítmica.

En los problemas 7 a 12, obtenga una ecuación equivalente de forma exponencial.

7. $\log_p(5) = 4$
8. $\log_7(125) = B$
9. $\log_x(40.3) = 183.2$
10. $\log_{13}(C) = 0.383$
11. $\log_x (10/3) = 1.2$
12. $\log_{3/5} (30C) = 40$

En los problemas 13 a 17, exprese la ecuación dada, en otra de forma logarítmica equivalente.

13. $(42.8)^{10} = R$
14. $(A - 2B)^5 = 3{,}570$
15. $(73.4)^x = 10/3$
16. $(1.258N)^{4.2} = 100$
17. $253^{3x-2} = 13$

En los problemas 18 a 22, use calculadora.

18. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 10 es 1.245?

***19.** ¿Cuál es el valor de la base si $\log_a(450) = 5.23$?

20. ¿A qué es igual el logaritmo base 11 de 1,331?

21. ¿Cuál es el número N cuyo logaritmo base 8 es 48.5?

22. Si $\log_a(148.5) = 4$, ¿cuál es el valor de la base *a?*

En los problemas 23 a 34, seleccione la opción correcta, justificando su elección.

***23.** Al expresar $\log_{3-a}(25) = 4$ en forma exponencial queda:

a) $25^4 = 3 - a$ *b*) $25^{3-a} = 4$ *c*) $(3 - a)^4 = 25$ *d*) $3^4 = 25 + a$ e) Otra

***24.** Si $5^x + 2 = A$, entonces,

a) $\log_5(A - 2) = x$ *b*) $\log_5(A) = 2 - x$ *c*) $\log_A(2 - x) = 5$ *d*) $\log_x(3) = 2 - A$ e) Otra

***25.** La forma logarítmica de $5^3 + A = B$ es:

a) $\log_5(B - A) = 3$ *b*) $\log_3(B - A) = 5$ *c*) $\log_{5+A}(B) = 3$ *d*) $\log_B(5) = A - 3$ e) Otra

26. Si $\log_4(-3) = 10B$, entonces,

a) $4^{10B} = -3$ *b*) $4^{-3} = 10B$ *c*) La ecuación no está definida *d*) $4^{10+B} = -3$ e) Otra

***27.** Al cambiar a la forma exponencial la ecuación $\log_3(P) - 5 = 1$, queda:

a) $3^{P-5} = 1$ *b*) $3^P = 6$ *c*) $3 = P - 5$ *d*) $3^6 = P$ e) Otra

28. La forma logarítmica de $10^x - 4 = y$ es:

a) $\log_{10}(x) = y + 4$ *b*) $\log_{10}(y + 4) = x$ *c*) $\log_y(10^x) = 4$ *d*) $\log_{10}(4) = y - x$ e) Otra

***29.** ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 7 es aproximadamente igual a 1.482347866?

a) 15.7215 *b*) 5.300 *c*) 17.8949 *d*) 3.500 *e*) Otra

***30.** ¿A qué es igual el logaritmo base 20 de 3,128?

a) 2.334793792 *b*) 1.631950826 *c*) 2.68653817 *d*) No existe *e*) Otra

31. ¿Cuál es el valor del logaritmo base 15 de $-4/5$?

a) –0.096910013 *b*) 0.223143551 *c*) –0.293210328 *d*) No está definido *e*) Otra

***32.** Si $\log_x(525) = 3.34$, ¿cuál es el valor aproximado de x?

a) 7.00 *b*) 6.75 *c*) 6.52 *d*) 7.25 *e*) Otra

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

33. ¿A qué es igual el logaritmo base 90 de 425 aproximadamente?

a) −1.253214251 *b*) 1.238560627 *c*) 0.807388817 *d*) 1.34496559 *e*) Otra

34. ¿Cuál es el valor de x si $\log_{15}(x + 2) = 0.75852498$?

a) −1.20 *b*) 3.80 *c*) 5.80 *d*) No existe *e*) Otra

1.7 Logaritmos comunes, naturales y ecuaciones

Los valores posibles para la base de un logaritmo son ilimitados; sin embargo, los 2 más usuales son el 10 y el número *e*. Este último es aproximadamente igual a 2.71828. En las calculadoras, por ejemplo, se evalúan los logaritmos con una de estas 2 bases. Los de base 10 con la tecla Log y los de base *e* con la tecla Ln. Los primeros se conocen como logaritmos ***comunes*** o ***decimales***; y los segundos, como logaritmos ***naturales*** o ***neperianos***. Dichos logaritmos se expresan, respectivamente, como:

$$\log_{10}(x) = \log(x) \qquad \text{y} \quad \log_e(x) = \ln(x)$$

ya que en ambos casos se omite escribir la base.

Son múltiples las aplicaciones de los logaritmos. En un curso regular de matemáticas financieras, por ejemplo, se utilizan para encontrar el plazo en inversiones o en la amortización de créditos. Por ahora, veamos cómo despejar la incógnita en las ecuaciones que la tienen como exponente.

Ejemplo 1



Despeje n de la ecuación

$$2^{n-3} = 8^n$$

solución

Si 2 números positivos son iguales, entonces sus logaritmos son iguales y, por ende, en un primer paso se aplica el logaritmo común o natural en ambos lados de la ecuación

$$\log(2^{n-3}) = \log(8^n)$$

Con base en la última propiedad de los logaritmos, los exponentes $n - 3$ y n, se escriben bajándolos, es decir, multiplicando al logaritmo en cada lado de la ecuación. Luego, con algunos pasos algebraicos y el auxilio de una calculadora, se despeja n:

$$(n - 3)\log(2) = (n)\log(8)$$

$$n - 3 = (n)\log(8)/\log(2) \quad \text{log(2) pasa dividiendo}$$

$$n - 3 = (n)(0.903089987/0.301029996)$$

$$n - 3 = (n)(3) \quad \text{se efectúa la división}$$

$$-3 = 2n, \qquad n = -3/2 \ \text{ o bien, } \ n = -1.5$$

Solución alterna

Si, como en este ejemplo, los 2 miembros de la ecuación son expresables con la misma base, entonces puede resolverse con las leyes de exponentes de la sección 1.2 en lugar de utilizar logaritmos.

Se sabe que el 8, la base de la potencia en el lado derecho de la ecuación dada, puede escribirse como 2^3 y, por lo tanto, la ecuación es equivalente a:

$$2^{n-3} = (2^3)^n \qquad \text{o bien,}$$

$$2^{n-3} = 2^{3n} \qquad \text{porque } (a^m)^n = a^{mn}$$

Dado que en esta ecuación las bases son iguales, los exponentes también lo son y, por lo tanto,

$$n - 3 = 3n$$

de donde

$$-3 = 3n - n$$

$$-3 = 2n \qquad \text{o bien,} \qquad n = -3/2$$

Ejemplo 2



Despejar x de la ecuación:

$$(1.0225)^x = 25.19$$

solución

Se comienza tomando logaritmo natural, o común, a los 2 miembros de la ecuación. Aquí se aplica el logaritmo natural ya que algunas calculadoras no tienen la tecla Log.

$\ln(1.0225)^x = \ln 25.19$

$$(x)\ln(1.0225) = \ln(25.19) \qquad \ln(m)^n = (n)\ln(m)$$

De donde

$$x = \ln(25.19)/\ln(1.0225)$$

$$= 3.22644709/0.022250609 \quad \text{o bien,} \quad x = 145.0048895$$

Quiere decir que:

$(1.0225)^{145.0048895} = 25.19$ aproximadamente, y esto sirve de comprobación de la respuesta obtenida

Otra clase de ecuaciones en las que intervienen los logaritmos son las que tienen a la incógnita en el logaritmo como, por ejemplo,

$$\log(x - 2) = 1.258, \; \log(x + 2) = \log(x^2) \; \text{ o bien, } \; \ln(3 - x) = 2$$

La primera y la última, porque log está sólo en un lado de la ecuación, se resuelven con la definición de logaritmo, cambiándolas a la forma exponencial; en la segunda se aplica la propiedad de que *si 2 números son iguales y positivos, entonces sus logaritmos son iguales, o viceversa*, esto es que si log(A) = log(B) entonces A = B, y esto equivale a tomar lo que se conoce como **antilogaritmo** de un logaritmo de un número positivo.

Ejemplo 3

Despejar x de la ecuación $\log(x^2) = \log(2x + 3)$

solución

Se toma el antilogaritmo común a los 2 miembros de la ecuación, considerando que son positivos, y esto equivale a eliminar, o simplemente tachar, el logaritmo a los 2 lados, es decir, que si:

$\log(x^2) = \log(2x + 3)$ es la ecuación dada, entonces,

antilog $(\log x^2)$ = antilog $(\log(2x + 3))$

De donde $x^2 = 2x + 3$* que es una ecuación de grado 2, la cual se resuelve factorizando o con la fórmula general de las cuadráticas. Al pasar restando $2x$ y 3 al lado izquierdo queda:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Para factorizar se buscan 2 números cuya suma sea –2, el coeficiente de x, y el producto sea igual a la constante –3. Éstos son 1 y –3 y, por lo tanto,

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0$$

de donde $x + 1 = 0$ y $x - 3 = 0$, es decir, $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$. Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien, $b = 0$.

Éstos deberán sustituirse en la ecuación original para corroborar que realmente los 2 están en la solución y, por ende, que la solución es el conjunto $\{-1, 3\}$.

* Note usted que el antilogaritmo del logaritmo de un número N es igual al número N.

Ejemplo 4


Despejar x de la igualdad:

$$\log(x - 2) = 1.258$$

solución

Según la definición de logaritmo, esta ecuación puede escribirse como $10^{1.258} = x - 2$ (la base es 10).

Con la tecla 10^x en la calculadora, se ve que $10^{1.258} = 18.11340093$ y, por lo tanto, $x - 2 = 18.11340093$ o $x = 20.11340093$, que se comprueba sustituyendo en la ecuación dada.

Ejemplo 5

Resolver para x la ecuación:

$$\ln(5 + 3x) = 2$$

solución

Puesto que la base de ln es e, se cambia a forma exponencial:

$$e^2 = 5 + 3x$$

$$7.389056099 = 5 + 3x \qquad e^2 = (2.71828)^2 \text{ aproximadamente}$$

de donde $3x = 7.389056099 - 5$ o bien, $x = 0.796352032$, que también se comprueba reemplazando en la ecuación dada.

Ejercicios 1.7

1. ¿Cómo explica el antilogaritmo del logaritmo de un número A?
2. ¿Cómo obtiene el logaritmo del antilogaritmo de un número B?
3. ¿A qué es igual antiln (ln 25.3) y log(antilog 4,350)?
4. ¿Cómo explica usted que antiln (ln (–108.3)) no esté definido?

*5. ¿Cuál valor es mayor entre log(32.5) y antilog(32.5)?

*6. ¿A qué es igual log(antilog(87.23))?

7. Si $\ln(e) = 1$, ¿a qué es igual antiln(ln(e))?
8. ¿A qué es igual log(antilog($4x - 2$))?
9. Si $\log(5x - 3) = 25$, ¿a qué es igual antilog(25)?
10. Si antilog($2x^2 - 3$) = 1, cuál es el valor de x?

En los problemas 11 a 20, despeje la incógnita (use calculadora si es necesario).

*11. $3^{2+x} = 27^{x/3}$

12. $\log(x - 10) = 25$

13. $\ln\sqrt{32.8} = x - 3$

14. $(1.025)^{n-3} = 321.5$

*15. $\log(10.5) = 3 - 2x$

16. $\ln(8.5) = \ln(x - 4)$

*17. $(52.1)^{x+2} = 328$

18. $\log(6 - 3x) = 3$

19. $\log\sqrt{x+1} = 1.3$

20. $\log(5-4x) = \log(x^2)$

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

En los problemas 21 al 28 obtenga el logaritmo indicado utilizando calculadora y las propiedades de los logaritmos.

21. $\log(15.35)^{4.5}$

***22.** $\ln(315.08)^3$

23. $\ln\sqrt[4]{3,253.8}$

24. $\ln\sqrt[5]{1,295.3}$

25. $\log(4/7)^3$

26. $\ln(1{,}425)^{-20}$

27. $\log(735)$

28. $\ln(-42.39)$

Justificando su elección, en los problemas 29 a 40 elija la opción correcta.

29. Si $\log(2x-3)=2$ entonces el valor de x es:

a) 1 *b*) 302.5 *c*) 501.5 *d*) $(10^2+3)/2$ *e*) Otra

30. Si $\ln(4+2x)=2.5$, entonces el valor aproximado de x es:

a) –4.10 *b*) 9.25 *c*) −1.357687 *d*) 4.091247 *e*) Otra

31. La solución de la ecuación $5^{3x-2}=12.97$ es aproximadamente:

a) 4.99 *b*) 1.1974 *c*) 3.3233 *d*) 10.4351 *e*) Otra

32. Al resolver la ecuación $\log(t^2+4)=2$ resulta:

a) $\sqrt{104}$ *b*) $\pm\sqrt{6}$ *c*) $\sqrt{10.5}$ *d*) $\pm\sqrt{96}$ *e*) Otra

***33.** La solución de la ecuación $\log(4-3x)+2=0$ es:

a) 1.6 *b*) 1.33 *c*) 4/3 *d*) No tiene solución *e*) Otra

34. Al despejar x de la ecuación $\log(10)+\ln(e)+\log(2x+5)=3$, resulta:

a) $x=10.3$ *b*) $x=9.7$ *c*) $x=2.5$ *d*) $x=\log(2)+3$ *e*) Otra

***35.** Si $\text{antilog}(x+2)=5$ ¿a qué es igual el logaritmo de 5?

a) $\log x+\log 2$ *b*) $\log(2x)$ *c*) $x+2$ *d*) $\log(x+2)$ *e*) Otra

***36.** El valor positivo de t que satisface la ecuación $\ln(t^2-2)=4$ es:

a) $e^2+\sqrt{2}$ *b*) e^4+2 *c*) $\sqrt{e^4+2}$ *d*) Ninguno *e*) Otra

37. Es una expresión que no está definida para $x=-3$.

a) $\log_3(5-x)$ *b*) e^x+3 *c*) $\log_x(4+x)$ *d*) $\ln(-x)$ *e*) Otra

***38.** Resuelva la ecuación $\text{antiln}(2x-3)=e^2$.

a) $(e^2+3)/2$ *b*) $(3-e^2)/2$ *c*) 5/2 *d*) No tiene solución *e*) Otra

39. Si $\log(\text{antilog}(61.3))=\text{antilog}(\log(3x-2))$ entonces el valor de x es:

a) 16.3 *b*) −18.4 *c*) 21.1 *d*) 15.6 *e*) Otra

***40.** Si $\text{antiln}(\ln(15))=25+3x-x^2$, entonces la solución es:

a) $\{-2, 5\}$ *b*) $\{-5, 2\}$ *c*) $\{0, 4\}$ *d*) No hay solución *e*) Otra

1.8 Problemas de aplicación

Esta sección es una recopilación de aplicaciones que se relacionan con la temática del capítulo, es decir, con porcentajes, ecuaciones, logaritmos, exponentes y proporcionalidades. A causa de la extensa variedad de problemas de aplicación que se presentan en la vida real, es difícil, por no decir imposible, establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Sin embargo, las siguientes pueden ser útiles sugerencias para plantearlos y resolverlos.

Recomendaciones para resolver un problema

1. Lea cuidadosamente el problema, tratando de separar los datos de las incógnitas.
2. Busque las palabras que sean clave, como *hallar, qué, cómo, cuánto,* etcétera, para identificar la incógnita; llamándole x o designándola con cualquier otra literal; por ejemplo, la letra inicial de la palabra clave.
3. Establezca una igualdad para relacionar los datos conocidos con la pregunta; primero con palabras y después con números y letras que representen números.
4. Resuelva la ecuación o las ecuaciones que resultaron en el paso 3, empleando principalmente las reglas de adición y multiplicación, así como el principio de sustitución, que se estudiaron en la sección 1.3.
5. De ser posible, verifique la solución que se obtuvo comprobándola en el planteamiento original y, sobre todo, en el enunciado del problema.

Importante

Si acaso no llega a la solución correcta, debe insistir de nuevo teniendo presente que aún con mucha práctica y experiencia, no siempre se resolverán los problemas atinadamente en un primer momento.

Es importante señalar que al resolver problemas de matemáticas, generalmente se utilizan fórmulas ya establecidas; por ejemplo, vimos que con la fórmula $I = Cin$, se encuentran los intereses cuando se conoce el capital C que se invierte, la tasa de interés i y el plazo n. Es evidente que con la misma fórmula se encuentre, por ejemplo, el plazo n, cuando se conocen el capital, la tasa de interés y los intereses que produce una inversión, en cuyo caso se procedería de 2 maneras:

- Se despeja n de la fórmula, esto es, $n = I/Ci$. ¿Por qué?, y luego se sustituyen los datos, o
- se sustituyen los valores conocidos en la igualdad $I = Cin$ y, después, se despeja la incógnita n.

La desventaja de la primera consiste en que de una fórmula se obtienen varias (una para cada literal), con lo cual resulta una lista muy grande, entre la cual el estudiante muchas veces se pierde y no sabe cuál elegir.

La segunda requiere de ciertas habilidades y destrezas algebraicas, y esto representa un buen ejercicio mental para el estudiante, ya que no se concretaría a solamente elegir la fórmula adecuada y a dejar que la calculadora realice las operaciones aritméticas.

De cualquier manera es imprescindible el recurso de una calculadora científica o financiera para las operaciones.

Ejemplo 1

Reparto proporcional de utilidades

Carlos, Jorge y Luis comparten en sociedad la propiedad de un negocio de artículos deportivos. Deciden distribuir las utilidades de acuerdo con su aportación individual: \$43,200, \$54,000 y \$64,800, respectivamente. Las utilidades del primer semestre fueron de \$98,850. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

solución

El capital aportado por los 3 es la suma de las cantidades individuales:

$$C = 43{,}200 + 54{,}000 + 64{,}800 = 162{,}000$$

y esto corresponde al total, al 100 por ciento.

La aportación de Carlos fue del 26.6% del total, porque si X es el porcentaje,

$$(X/100)(162{,}000) = 43{,}200$$

$$\text{entonces, } X = 43{,}200(100)/162{,}000 = 26.\overline{6}$$

Recuerde que la testa en el 6 indica que se repite indefinidamente. La participación de Jorge es Y, tal que:

$$(Y/100)(162{,}000) = 54{,}000$$

de donde $Y = 54{,}000(100)/162{,}000 = 33.\overline{3}\%$, y la de Luis es Z, tal que:

$$(Z/100)(162{,}000) = 64{,}800$$

$$\text{de donde } Z = 64{,}800(100)/162{,}000 \text{ o } Z = 40 \text{ por ciento.}$$

Ahora bien, a Carlos le corresponde el $26.\overline{6}\%$ de las utilidades, esto es,

$$(26.\overline{6}/100)(98{,}850) = \$26{,}360.00$$

y, en consecuencia, a Jorge y a Luis les corresponde, respectivamente:

$$0.3\overline{3}(98{,}850) = \$32{,}950.00$$

$$\text{y } 0.40(98{,}850) = \$39{,}540.00$$

Note que la suma de las 3 cantidades es igual al total de utilidades.

Ejemplo 2

Reparto de una herencia



El testamento de un padre de familia estipula que el 20% de sus bienes, valuados en 2.5 millones de pesos, se otorgue a una institución de beneficencia, y que el 80% restante se reparta entre sus 3 herederos en forma inversamente proporcional a sus edades. Tales edades son 15, 18 y 24 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

solución

Si X es lo que corresponde al menor, Y lo que se tiene que dar al intermedio y Z lo que toca al mayor, entonces la suma de las 3 cantidades es igual al 80% de la herencia.

$$X + Y + Z = 0.80(2'500,000) = 2'000,000$$

Por otro lado, recuerde que la expresión *"A es inversamente proporcional a B"* significa que $A = k/B$, donde k se llama *constante de proporcionalidad,* y B es la edad de cada uno de los hijos. Por lo tanto,

$$X = k/15 \qquad Y = k/18 \qquad \text{y} \qquad Z = k/24$$

porque X, Y y Z están en proporción inversa a la edad de cada uno de los herederos.

Entonces,

$$k/15 + k/18 + k/24 = 2'000,000$$
$$(0.0\overline{6})k + (0.0\overline{5})k + (0.041\overline{6})k = 2'000,000$$
$$(0.163\overline{8})k = 2'000,000$$

de donde: $k = 2'000,000/0.163\overline{8}$ o $k = 12'203,389.83$ es el valor de la constante de proporcionalidad.

Consecuentemente:

$$X = k/15 = \$813,559.32$$
$$Y = k/18 = \$677,966.10$$
$$\text{y} \qquad Z = k/24 = \$508,474.58$$

Note que la suma de los 3 capitales es igual a los 2 millones de pesos y que, por ejemplo, X es el 32.54% de la herencia, porque $813,559.32/2'500,000 = 0.325423728$. De igual forma, Y es el 27.12%, Z es el 20.34% y la suma de los 3 porcentajes es igual al 80% de los bienes heredados.

Ejemplo 3

Plazo para pagar un crédito

En el capítulo 3, de interés simple, quedará claro que si se presta un capital, C, con intereses del 32.5% anual, al final de n años éste se saldará con:

$$M = C(1 + 0.325n)$$

¿Cuántos días después de que se recibió, se cancela con \$28,000 un préstamo de \$26,500, con intereses del 32.5% anual?

solución

Con base en el principio de sustitución, en la fórmula anterior se reemplaza M por 28,000 y C por 26,500. Después, se divide entre este último número, se resta la unidad y, finalmente, se divide entre 0.325, en este orden, en los 2 miembros de la ecuación; es decir,

$$28{,}000 = 26{,}500(1 + 0.325n)$$

$$28{,}000/26{,}500 - 1 = 0.325n$$

$$0.325n = 0.056603774 \qquad \text{porque } a = b \Rightarrow b = a$$

$$n = 0.056603774/0.325 \text{ o}$$

$$n = 0.174165459 \text{ años}$$

Para convertir en días, se multiplica por 360, los días que tiene el año.

$$0.174165459(360) = 62.69956506 \text{ o } 63 \text{ días}$$

Ejemplo 4

Alternativas de inversión

Un agricultor desea invertir \$175,000. Puede hacerlo en una cuenta de ahorros que le producirá el 10.5% de interés anual o comprar centenarios (monedas de oro) que le darán a ganar el 9.75% anual. ¿Cómo debe distribuir su capital si pretende utilidades del 10.35% anual?

solución

Si x es lo que invierte al 10.5%, entonces, $175{,}000 - x$ será lo que invierte en centenarios. Los intereses en la primera son:

$$I_1 = (0.105)x$$

De la segunda, son:

$$I_2 = 0.0975(175{,}000 - x)$$

Y la suma de los 2 debe ser igual al 10.35% de la inversión total:

$$I_3 = 0.1035(175{,}000) \text{ o } I_3 = 18{,}112.50$$

Entonces,

$$(0.105)x + 0.0975(175{,}000 - x) = 18{,}112.50 \qquad \text{ya que } I_1 + I_2 = I_3$$

$$(0.105)x + 17{,}062.50 - (0.0975)x = 18{,}112.50$$

$$(0.105 - 0.0975)x = 18{,}112.50 - 17{,}062.50 \qquad \text{se factoriza } x$$

$$(0.0075)x = 1{,}050$$

de donde $x = 1{,}050/0.0075$ o bien, $x = 140{,}000$.

Quiere decir que debe invertir \$140,000 en la cuenta de ahorros y la diferencia, \$35,000, comprando centenarios.

Ejemplo 5

Utilidad esperada en inversiones

¿Cuál es la utilidad esperada de un inversionista si se sabe que tiene 38.5% de probabilidades de ganar $87,500, y 61.5% de probabilidades de perder $23,250 en una inversión?

solución

El valor esperado de un experimento con 2 resultados posibles se define, y se obtiene, con la fórmula:

$$E = p(x) + q(y)$$

Donde p es la probabilidad de x y q es la probabilidad del resultado y. En este caso, $p = 0.385$, $x = 87{,}500$, $q = 0.615$ y $y = -23{,}250$. Por lo tanto, la utilidad esperada para el inversionista es:

$$E = 0.385(87{,}500) + 0.615(-23{,}250)$$
$$E = 33{,}687.5 - 14{,}298.75$$
$$E = \$19{,}388.75$$

Note que las pérdidas son ganancias negativas, de ahí el signo negativo en $23,250.

Ejemplo 6

Valor de rescate de un activo que se deprecia



¿Cuál será el valor de rescate de un activo que costó $375,000, tiene vida útil de 6 años y se deprecia $47,000 anuales?

solución

En el capítulo 8 se estudiará que la depreciación anual de un activo con el método de la línea recta está dada por

$$R = \frac{C - C_n}{N}$$

Donde C es el precio original, C_n es el valor de rescate, R es la depreciación por año y n es la vida útil del activo en años. Por lo tanto,

$$47{,}000 = \frac{375{,}000 - C_n}{6}$$

de donde

$$47{,}000(6) = 375{,}000 - C_n$$
$$282{,}000 - 375{,}000 = -C_n$$
$$-93{,}000 = -C_n$$

Es decir, que $C_n = \$93{,}000$ es el valor de rescate del activo.

Ejemplo 7

Saldo promedio diario en tarjeta de crédito



Los intereses que se ganan o se pagan por el uso de las tarjetas de débito, de crédito o de inversión se evalúan tomando como base el *saldo promedio* por día, considerando los pagos y disposiciones del mes actual o del anterior, y siendo estos los periodos que hay entre las **fechas de corte** establecidas por el banco.

Este saldo promedio se calcula de la siguiente forma, donde para ilustrar el procedimiento se consideran solamente 2 movimientos en la cuenta de un usuario.

Suponga que el primer día, después del corte, el saldo en contra de un usuario de tarjeta de crédito es de \$745. El décimo día abona \$600 y el decimosexto compra \$275 en alimentos pagando con la tarjeta. ¿Cuál es el saldo promedio diario, si el periodo de corte es de 30 días?

solución

En la figura 1.1 se ilustran los plazos, el saldo en cada plazo y los movimientos en la tarjeta.



Figura 1.1

Al notar que el saldo cambia desde el día que se hace un movimiento en la tarjeta, el saldo promedio se obtiene sumando los productos:

(número de días)(saldo en cada plazo)

como si fueran áreas en la figura 1.1. El resultado se divide entre el total de días en el periodo de corte, es decir, que en este caso el saldo promedio diario es:

$$\text{Saldo promedio diario} = \frac{745(9)+145(6)+420(15)}{30} = \$462.50$$

Ejemplo 8

Pago mínimo para mantener el saldo promedio diario

Si el saldo promedio mínimo por día que un cuentahabiente debe mantener en su tarjeta es de \$500, ¿cuánto debe depositar el noveno día del mes para alcanzarlo, si los primeros 8 días mantuvo su cuenta en \$60? ¿Cuánto deberá depositar el vigésimo octavo día, si el noveno deposita solamente \$200?

solución

a) Si x es el depósito que hace el noveno día, entonces en los 22 días después del octavo habrá $(x + 60)$ pesos en su cuenta, y el saldo promedio será:

$$\frac{8(60)+22(x+60)}{30}=500$$

Para despejar x, se ejecutan las multiplicaciones en el numerador y el 30 pasa multiplicando al miembro derecho:

$$480 + 22x + 22(60) = 500(30)$$

de donde, $22x = 15{,}000 - 480 - 1{,}320$

$x = 13{,}200/22$ o $x = \$600$

Para comprobar, nótese que el saldo promedio es:

$$\frac{8(60)+22(600+60)}{30}=\frac{480+14,520}{30}$$
$$= \$500$$

b) Si ahora x es el capital que se deposita el vigésimo octavo día, el saldo promedio mensual es:

$$\frac{8(60)+20(200+60)+2(x+260)}{30}=\$500$$

porque en los 2 últimos días habrá en la cuenta $x + 60 + 200$.
Para despejar, se multiplica por 30 y se realizan las operaciones del numerador:

$$480 + 5{,}200 + 2x + 520 = 15{,}000$$

de donde $2x = 8{,}800$ o $x = \$4{,}400$
Para comprobar, se tiene,

$$\frac{8(60)+20(60+200)+2(4,400+260)}{30}=\$500$$

Ejemplo 9

Plazo en inversión con interés compuesto

¿En cuánto tiempo se acumulan \$44,352 si se invierten \$42,000 ganando intereses del 0.42% mensual capitalizable por meses?

solución

En el capítulo 4 se estudiará que si se invierte un capital, C, con el 0.42% mensual, al final del plazo x, en meses, el monto que se acumulará estará determinado por

$$M = C(1 + 0.0042)^x$$

Recuerde que para las operaciones en el 0.42% se corre el punto decimal 2 lugares a la izquierda.

Entonces,

$$44{,}352 = 42{,}000(1.0042)^x$$

$$44{,}352/42{,}000 = (1.0042)^x$$

o bien,

$$(1.0042)^x = 1.056$$

que, como se dijo antes, se resuelve tomando el logaritmo en los 2 miembros de la ecuación:

$$\ln(1.0042)^x = \ln(1.056)$$

$$(x)\ln(1.0042) = \ln(1.056), \quad \text{ya que } \ln(M)^n = (n)\ln(M)$$

$$(x)(0.004191205) = 0.054488185$$

de donde $x = 0.054488185/0.004191205$ o $x = 13.00060251$ meses.

Significa que en 13 meses los \$42,000 iniciales se incrementarán a \$44,352, aproximadamente.

Ejemplo 10

Tiempo para alcanzar niveles de producción

¿En qué año se producirán 150,000 toneladas de azúcar, si en 2010 se produjeron 84,750 toneladas y la producción aumenta a razón del 8.5% anual?

solución

Puede probarse, como se estudiará en el teorema 2.3 del siguiente capítulo, que si la producción de un bien en el primer año es P_1 y crece a razón del 8.5% anual, entonces en el enésimo año será:

$$P_n = P_1(1 + 0.085)^{n-1}$$

de donde, al sustituir los datos anteriores, queda:

$$150{,}000 = 84{,}750(1 + 0.085)^{n-1}$$
$$150{,}000/84{,}750 = (1.085)^{n-1}$$
$$(1.085)^{n-1} = 1.769911504, \text{ porque si } a = b \text{ entonces } b = a$$

Se toma logaritmo en los 2 lados y se despeja n.

$$\ln(1.085)^{n-1} = \ln(1.769911504)$$
$$(n - 1)\ln(1.085) = \ln(1.769911504) \qquad \log(M)^n = (n)\log(M)$$
$$(n - 1)(0.081579987) = 0.570929548$$
$$n - 1 = 0.570929548/0.081579987$$
$$n - 1 = 6.998402043$$
$$n = 6.998402043 + 1 \qquad \text{o bien, } n = 7.998402043$$

Significa que en el octavo año, en 2017, la producción de azúcar será de 150,000 toneladas, aproximadamente.

Ejemplo 11

Distribucióndel ingreso salarial

El ingreso mensual del profesor Hernández es de $15,000. Determine:

a) El porcentaje que paga de impuestos si le descuentan $912.

b) El capital que gasta en alimentos si equivale al 45% de su ingreso.

c) El porcentaje del ingreso que destina a la renta de su departamento, si paga $4,500 por mes.

d) La cantidad neta que ingresa mensualmente a su hogar, si su cónyuge gana 27% menos que él, y ambos pagan el mismo porcentaje de impuestos.

e) El capital que deposita en su cuenta de ahorros, si representa el 30% de su prima vacacional y ésta es el 140% de su ingreso mensual.

f) ¿Cuánto deberá ganar mensualmente el año próximo para mantener el mismo poder de compra, si se sabe que la inflación ha sido y será del 5.06% anual?

solución

a) Si x es el porcentaje que paga de impuestos y éstos son de $912, entonces:

$$(x/100)(15{,}000) = 912$$

por lo tanto, para despejar x, se multiplica por 100 y se divide entre 15,000 a los 2 miembros de la ecuación, es decir,

$$x = 912(100)/15{,}000 \text{ o bien, } 6.08\%$$

b) El gasto en alimentos es el 45% del ingreso, esto es:

$$(45/100)15{,}000 = \$6{,}750$$

c) Si x es el porcentaje que paga de renta, entonces deberá cumplirse que:

$$(x/100)15{,}000 = 4{,}500$$

de donde

$$x = 4{,}500(100)/15{,}000 \text{ o } x = 30\%$$

d) Si el salario de su esposa es un 27% menor que el de él, entonces ella gana:

$$15{,}000 - 0.27(15{,}000) = \$10{,}950$$

Por lo tanto, el ingreso total es:

$$15{,}000 + 10{,}950 = 25{,}950$$

El pago por impuestos es el 6.08% de este resultado, es decir:

$$25{,}950(0.0608) = \$1{,}577.76$$

Por lo que el ingreso neto mensual es:

$$25{,}950 - 1{,}577.76 = \$24{,}372.24$$

e) Lo que deposita en su cuenta de ahorros es el 30 del 140% de su ingreso mensual, o sea, que el ahorro es:

$$0.30(1.40)(15{,}000) = \$6{,}300.00$$

f) Suponiendo que el ingreso mensual no cambia durante el año, entonces el próximo será un 5.06% mayor:

$$\begin{aligned} 15{,}000 + 0.0506(15{,}000) &= (1 + 0.0506)15{,}000 \\ &= (1.0506)15{,}000 = \$15{,}759.00 \end{aligned}$$

Ejemplo 12

Descuentos y facturación con impuesto desglosado

El precio de un reproductor de discos compactos es de $8,400, incluyendo el IVA, que es equivalente a 16%. La cadena de tiendas Viper tiene el departamento de electrónica rebajado en un 15%. El señor Martínez adquiere un reproductor de discos y al pagar en cajas logra un premio que consiste en un descuento adicional del 20% en el total de su compra.

a) ¿Cuánto pagó por el aparato y con qué descuento sobre el precio original lo obtuvo?

b) ¿Qué cantidades aparecen en la factura con el IVA desglosado?

c) Si el señor Martínez paga con tarjeta de crédito, ¿cuánto pagará si le cobran intereses de 3 meses con el 5.3% simple anual?

solución

a) Con el primer descuento el señor Martínez pagaría el 85% del precio y en cajas pagará el 80% de este valor, es decir:

$$(0.80)(0.85)(8{,}400) = \$5{,}712.00$$

En virtud de que (0.80)(0.85)($8,400) = 0.68($8,400), el pago neto es el 68% del precio. Por lo tanto, el aparato se adquirió con el 32% de descuento, es decir, la diferencia entre el 68% que pagó y el precio original que representa el 100%.

b) Si P es el valor sin el IVA del 16%, entonces

$$P + 0.16P = 5{,}712.00$$

de donde

$$(1.16)P = 5{,}712.00 \qquad ab + cb = (a + c)b$$
$$P = 5{,}712.00/1.16 \quad \text{o bien,}$$
$$P = \$4{,}924.14$$
$$+\ \$\ \ 787.86 \qquad \text{16\% del IVA}$$
$$\text{TOTAL} \quad \$5{,}712.00$$

c) El 5.3% de interés simple mensual, en un plazo de 3 meses es (5.3)3 = 15.9%, y el cargo en su compra, es decir, el costo por no pagar de contado es:

$$5{,}712(0.159) = 908.208,$$

consecuentemente el total a pagar será:

$$5{,}712.00 + 908.21 = 6{,}620.21 \text{ redondeando.}$$

Note que también 5,712(1.159) = 6,620.21 ¿por qué?

Ejemplo 13

Variación del IPC en la Bolsa de Valores

El 21 de enero de 2011, la Bolsa Mexicana de Valores, BMV, cerró en 37,720 puntos y algunos días después cerró en 37,763 puntos. ¿Cuál es el incremento en el índice de precios y cotizaciones (IPC)?

solución

El IPC es un número que indica el promedio ponderado del precio de las acciones que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores. El incremento es la diferencia entre los 2 puntajes:

$$37{,}763 - 37{,}720 = 43$$

y si X es el incremento en el IPC, entonces,

$$(X/100)(37{,}720) = 43$$

Se despeja X dividiendo los 2 lados entre 37,720 y multiplicando por 100:

$$X = 43(100)/37,720$$

$$X = 0.113997879 \text{ o bien, } 0.1139179\%, \text{ redondeando.}$$

Resultado que es posible corroborar con los periódicos de las fechas de los índices dados, por ejemplo.

Solución alterna

Este resultado, como se dijo antes, se obtiene también al restar la unidad al cociente de las 2 cotizaciones en puntos y multiplicando por 100

$$(37,763/37,720 - 1)100 = 0.1139979\%$$

aproximadamente.

Ejemplo 14

Variación de la cotización de las UDIS

El 24 de enero de 2011 las unidades de inversión (UDIS) se cotizaron en \$4.548987 y meses después en \$4.583207. ¿En qué porcentaje aumentaron su valor?

solución

En el ejemplo 13 se observó que el porcentaje de variación se obtiene al restar la unidad al cociente de los 2 valores, es decir, el actual entre el anterior:

$$4.583207/4.548987 - 1 = 0.007522554$$

Esto representa 0.7522554%, porcentaje que debe corresponder con la inflación de ese periodo, ya que de ella depende el valor de las UDIS.

Ejemplo 15

Incremento de títulos que se negocian en la Bolsa de Valores

El 3 de agosto se negociaron 75,441 millones de acciones en el Mercado de Valores, y cuatro meses después se negociaron 85,181 millones. ¿De cuántos puntos porcentuales fue el incremento?

solución

De manera semejante al ejemplo anterior, el incremento en porcentaje es:

$$(85,181/75,441) - 1 = 0.1291075 \quad \text{o} \quad 12.91\%$$

Ejercicios 1.8

1. Un tramo de carretera de cuota se construyó con una participación tripartita, compuesta por el gobierno federal, el gobierno estatal y una constructora. La aportación fue de 1, 3 y 2 pesos, respectivamente, por cada 6 invertidos en la construcción. ¿Cuánto le corresponde a cada parte de las utilidades, que fueron de $375,000 en un bimestre?

***2.** El equipo campeón de fútbol mexicano recibe un premio de 2.8 millones de pesos, el cual se distribuye de la siguiente manera: 20% para el cuerpo técnico y el resto para sus 22 jugadores, dividido en proporción directa al número de partidos en los que cada uno intervino. Ocho participaron en 17 juegos, 6 en 13, 5 en 8 y 3 participaron solamente en 2 partidos. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

***3.** Para premiar a 4 de sus empleados, la empresa Impresiones y Servicios, S. A., cuenta con $13,200 que distribuye en proporción inversa al número de retardos en el semestre. ¿Cuánto le corresponde a cada uno si el primero tuvo 3 retardos, el segundo 4, el tercero y el último sólo 2 cada uno?

4. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó $175,000, se deprecia $20,000 anuales y tiene 6 años de vida útil?

***5.** Los primeros 12 días del mes, un tarjetahabiente de cheque electrónico tuvo en su cuenta $450. ¿Cuánto debe depositar el treceavo día para que su saldo promedio diario sea de $990.

6. Los primeros 15 días del mes, un inversionista de una cuenta tuvo un saldo de $3,525. ¿Cuánto debe depositar el decimosexto día para mantener el saldo promedio diario requerido por el banco, que es de $8,000?

7. ¿Cuál es la utilidad esperada que obtiene una persona, quien al invertir un capital tiene 25% de probabilidades de ganar $100,000, y 75% de probabilidades de perder $20,000?

***8.** El heredero de $180,000 tiene la opción de invertir en una cuenta universal que le produce intereses del 8.465% simple anual, o en bonos que le reditúan el 9.815%. ¿Cuánto debe invertir en los bonos si pretende ganar el 9.3% simple anual en sus inversiones?

***9.** ¿En qué año se duplicará la producción anual de azúcar, si en 2010 fue de 270,000 toneladas y cada año se produce 7.5% más que el anterior?

10. En 2011 la industria del vestido reportó utilidades de 12.5 millones de dólares. ¿De cuánto serán en el año 2015, si se estima que crecen a razón de 5.3% anual?

11. El ingreso mensual de un representante de ventas está determinado por la expresión $I = 7{,}200 + 0.0015(X)$, donde X es el volumen de ventas en pesos. ¿Cuánto percibió el mes anterior si vendió 8.5 millones de pesos?

***12.** Un famoso jugador de fútbol profesional es colocado por su club como transferible. Al realizarse la operación, el jugador recibió 850,000 dólares. Determine:

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

a) La cantidad por la que se hizo la transacción, si lo que recibió el jugador representó un 15% del total.

b) Lo que pagó de impuesto si éste fue el 28.3% de lo que recibió.

c) El capital que destinó a vacacionar, si tomó el 7% de lo que quedó después de pagar impuestos.

d) El capital que gastó en hospedaje, si lo hizo con el 48.5% de lo que destinó a vacacionar.

e) El capital que invirtió en su cuenta bancaria, si éste fue el 13.2% de lo que quedó después de pagar impuestos.

13. El índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores el 4 de enero de 2011 fue de 38,542.16 puntos meses después fue de 38,925.31 puntos. ¿En qué porcentaje creció?

14. El 6 de diciembre se negociaron 132'380,000 títulos en la Bolsa Mexicana de Valores, y el día anterior, 130'746,000. ¿Cuál fue el porcentaje del incremento?

15. ¿Cuál es el porcentaje de incremento de las unidades de inversión UDIS, si el 10 de enero de 2011, se cotizaron en $4.530129 y el 24 del mismo mes en $4.548987?

16. El mes anterior los bonos a corto plazo emitidos por el gobierno mexicano conocidos como Certificados de la Tesorería de la Federación, CETES, a 28 días, pagaron con una tasa del 4.01% y este mes pagan el 4.12% anual. ¿Cuál es el porcentaje de incremento en las tasas?

En los problemas 17 a 23, seleccione, justificándola, la opción correcta.

***17.** La calificación en un examen es proporcional al número de veces que un alumno participó en clases, e inversamente proporcional al número de retardos durante el semestre. ¿Qué calificación obtuvo Antonio con 15 participaciones y 5 retardos, si Marisa con 6 retardos obtuvo 90 al participar 20 veces en el semestre?

a) 95 *b*) 81 *c*) 85 *d*) 88 *e*) Otra

18. En el problema 17, ¿qué calificación obtendrá otro compañero de Marisa y Antonio, si acumuló 3 retardos y participó en 10 clases?

a) 65 *b*) 90 *c*) 93 *d*) 75 *e*) Otra

***19.** El tiraje diario de un periódico local crece con el número de personas físicas y morales que lo utilizan para su publicidad, y decrece con el número de compañías periodísticas en la ciudad. ¿Qué tiraje tendrá el próximo año suponiendo que hay un competidor más, y que el número de personas que en él se anuncián crecerá un 12.2%? Suponga que el tiraje actual es de 23,000 ejemplares con 4 periódicos de la contraparte.

a) 21,505 *b*) 20,240 *c*) 21,420 *d*) 19,840 *e*) Otra

20. ¿Qué tiraje logrará la empresa editorial del problema 19 si el número de competidoras se mantiene en 4?

a) 25,806 *b*) 25,300 *c*) 23,920 *d*) 24,920 *e*) Otra

***21.** La producción de granos por hectárea depende de la cantidad de abono y fertilizantes que se emplea y del temporal de lluvias. Considerando que a un buen temporal se le asignan 30 puntos, 27 a uno regular y 25 a un mal temporal, ¿cuál será la producción por hectárea si se consumieron 150 kgs de abono por hectárea, es un buen temporal y el año pasado

con mal temporal se gastaron 153 kgs por hectárea en abono y fertilizantes, y se lograron producir 3.8 toneladas por hectárea?

a) 5.1685 *b*) 4.4706 *c*) 4.9621 *d*) 4.8724 *e*) Otra

22. En el problema 21, ¿qué producción se espera para el año entrante, suponiendo que será un temporal regular y se consumirán 160 kgs por hectárea en abonos y fertilizantes?

a) 4.3212 *b*) 4.9785 *c*) 5.0323 *d*) 4.2918 *e*) Otra

23. La cuenta PAGAMÁS de una importante institución bancaria ofrece al inversionista intereses del 4.5% anual, con el atractivo de: invierta a 6 meses y reciba 10 meses de rendimiento. ¿Con qué tasa de interés anual gana realmente el inversionista?

a) $7.\overline{6}\%$ *b*) 7.5% *c*) $6.\overline{6}\%$ *d*) 5.8% *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio del presente capítulo, usted debe estar capacitado para:

- Aplicar el conocimiento de que los números y las cantidades que se utilizan en las matemáticas de los negocios y en las finanzas son reales.
- Redondear los números con cifras decimales.
- Utilizar las leyes de los exponentes para simplificar y resolver ecuaciones.
- Distinguir y resolver ecuaciones lineales.
- Plantear ecuaciones, es decir, modelos matemáticos lineales para resolver problemas de índole financiera como inversiones, depreciación, producción, comercialización de bienes y capitales.
- Calcular el por ciento de números y resolver problemas relacionados con porcentajes como:
  - La cotización de las unidades de inversión, UDIS.
  - La variación en el índice de precios y cotizaciones, IPC, de la Bolsa Mexicana de Valores.
  - La depreciación de un activo con el método de la línea recta.
  - El volumen de las acciones y otros títulos que se negocian en la bolsa de valores y su variación en puntos porcentuales.
- Plantear y resolver problemas reales con cantidades que varían en proporción directa, inversa y mixta, con otras.
- Explicar el concepto de logaritmo y resolver ecuaciones utilizando los logaritmos y sus propiedades.
- Plantear ecuaciones y modelos exponenciales para resolver problemas en el campo de la administración, las finanzas y los negocios, como:
  - Plazo en inversiones con interés simple y compuesto.
  - Tiempo necesario para lograr niveles de producción preestablecidos.
  - Incrementos en la población, en las exportaciones, en la producción de bienes, etcétera.

Conceptos importantes

Antilogaritmos
Ecuación lineal
Ecuación y solución de ecuaciones
Ecuaciones con la incógnita en el exponente y logarítmicas
Enésima potencia de un número
Exponente cero y exponente negativo
Expresión algebraica
Leyes de exponentes
Logaritmos comunes y naturales
Logaritmos y exponenciales
Números reales e imaginarios
Proporcionalidad directa, inversa y mixta
Raíz enésima de los números
Redondeo de números
Tanto por ciento

Problemas propuestos para exámenes

Conteste verdadero o falso en los problemas 1 a 9 y justifique su respuesta.

1. $(5 - x)^2 = 25 - x^2$ __________
2. $3^{x+2} = (3^x)^2$ __________
3. $(4 - 2x)^0$ no está definido para $x = 2$. __________
*4. La solución de la ecuación $\sqrt{x-4} + 3 = 0$ es $x = 13$. __________
5. $\log(5) = p$ es lo mismo que $5^p = 10$ __________
6. 13.2930501 redondeado a 5 decimales es 13.29305. __________
*7. La solución de la ecuación $4^{x-2} = 1/1024$ es $x = -3$. __________
*8. La propiedad multiplicativa establece que la solución de una ecuación no cambia si se multiplica a sus 2 miembros por cualquier número real. __________
9. $3x + \log(x) - 40$ es una ecuación. __________

En los problemas 10 a 20 complete la frase.

10. Un valor de x que satisface la ecuación $\sqrt{2+x} = x$ es __________
11. $\log_{15}(30) - z = 0$ es lo mismo que __________ en forma exponencial.
12. Una raíz cuarta de 256 es __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***13.** 324 es el __________ % del 30% de 4,800.

14. $10.8^{3x} = 42$ es lo mismo que __________ en forma logarítmica.

15. La solución de la ecuación $(3 - x)^4 = 2{,}401$ es: __________

***16.** Si y es proporcional al cubo de x, e inversamente proporcional al cuadrado de $z - x$, entonces la ecuación de proporcionalidad es: __________

17. Al despejar t de la ecuación $\log(1 - 3t) = 3$ resulta: __________

18. La producción de automóviles en 2011 fue de 70,500 ¿de cuánto será en 2015 si se incrementa un 3.5% anual?

***19.** Suponiendo que la producción de automóviles se ha mantenido uniforme ¿cuántos se fabricaron en 1995 de acuerdo al problema 18?

20. Si el Índice de Precios y Cotizaciones, IPC, en la Bolsa de Valores, el 10 de enero fue de 37,650 unidades y creció un 0.22% entonces 6 meses después será: __________

En los problemas 21 a 28, simplifique.

21. $(\sqrt{721.3})^2$

22. $(5)^6(5^{-5})$

23. $(5^7)/(16)^3$

24. $\ln(65.3)^{3/2}$

25. $(30.2)^{1/2}\sqrt{30.2}$

***26.** $x^3\sqrt{(x+3)^2} \,/\, \sqrt{(x+3)^4}\,x^6$

27. $(7a)^4(7a)^5$

28. $(x-y)^2/(x-y)^{-3}$

Despeje la incógnita en los problemas 29 a 36.

29. $3^{x-3} = 9$

30. $\log_3(x + 2) = 4$

31. $\sqrt{4-3x} = 2$

***32.** $300 = 325(1 - 0.85d)$

33. $x/2 + 3/4 = 4 - x/3$

34. $(x + 3)^3 = 27$

35. $\sqrt[10]{1+i} = 1.293$

36. $\sqrt{4-3x} = x$

Utilizando calculadora, si es necesario, evalúe las expresiones en los problemas 37 a 44.

37. $\sqrt[5]{32{,}008}$

38. $\log_7(429.5)$

39. $\ln(70.98)^3$

40. $(5{,}293)^{3/4}$

41. $(21.7)^{-2}$

***42.** $\sqrt{5+\ln(30)}$

43. $\log(70) - \log(10) + \ln(e)$

44. $(\sqrt{3-\sqrt{5}}\,)^{3/4}$

45. El valor de rescate de un activo es de \$60,300, ¿cuál sería su costo inicial si se consideran 7 años de vida útil y una depreciación lineal de \$35,000 anuales?

***46.** ¿Cuál es la utilidad esperada del inversionista que tiene probabilidades del 40% de ganar \$53,200 y un 60% de perder \$19,500?

47. Si la población de la ciudad crece a razón de 3.6% anual y en 2010 había 925,000 habitantes ¿cuántos habrá en el 2013?

***48.** ¿Cuántos habitantes hubo en 1925 en la ciudad del problema 47 si se considera la misma tasa de crecimiento de manera uniforme?

49. Si el 23 de junio se negociaron 89.3 millones de acciones en la Bolsa de Valores y 2 meses después, solamente 81.5 millones, ¿de qué porcentaje fue el decremento?

50. Si en 2009 hubo 125 víctimas en accidentes del transporte urbano y en 2012 fueron 98, ¿cuál fue el porcentaje de reducción?

***51.** ¿Qué porcentaje sobre sus ventas mensuales dan a un agente si el mes pasado percibió $16,510, de los que $6,250 corresponden a su sueldo fijo? Suponga que vendió $256,500.

En los problemas 52 a 62 seleccione la opción correcta justificando su elección.

52. La raíz k-ésima de N es x porque:

a) $k = N^x$ *b*) $x^k = N$ *c*) $N^k = x$ *d*) $N = \sqrt[k]{x}$ *e*) Otra

53. Si A es inversamente proporcional a x entonces,

a) $A = k/x$ *b*) $k = A/x$ *c*) $A = k^x$ *d*) $x = kA$ *e*) Otra

54. Al despejar x de la ecuación $t/5 = 4 - 2x$ queda:

a) $x = 20/11t$ *b*) $x = 10t$ *c*) $x = 2 - t/10$ *d*) $x = t/5 - 4$ *e*) Otra

***55.** La industria del vestido reportó utilidades de 3,500 millones de dólares en 2010 y 3,624.95 millones en 2011 ¿de qué porcentaje fue el incremento?

a) 3.75% *b*) 3.68% *c*)3.92% *d*) 3.57% *e*) Otra

56. Obtenga una expresión equivalente a $(x^5)\, x^{-2}/x^3$.

a) x *b*) x^6 *c*) x^{-30} *d*) 1 *e*) Otra

***57.** La expresión $\sqrt{4-x}$ no está definida cuando:

a) x es negativo *b*) $x \geq 4$ *c*) $x < 5$ *d*) $x > 4$ *e*) Otra

58. Al redondear $\sqrt{50.902}$ a 4 cifras decimales queda:

a) 7.1350 *b*) 7.1346 *c*) 7.1344 *d*) 7.1345 *e*) Otra

***59.** Diga cuál es o corresponde a una ecuación lineal.

a) $x/3 = 3/x$ *b*) $5/x = 2/3 = x + 1$ *c*) $\sqrt{4+x} = 5$ *d*) $\sqrt{x} = 1 + x$ *e*) Otra

60. Es una expresión equivalente a $\log_a(54) - 10 = 0$.

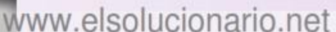
a) $54^a = 10$ *b*) $a^0 = 44$ *c*) $a^{10} = 54$ *d*) $10^a = 54$ *e*) Otra

61. Si el 125% del Y% de 5,000 es igual a 4,875 entonces Y es:

a) 78 *b*) 4.875 *c*) 125 *d*) 38 *e*) Otra

***62.** Si $A = \log_x(P - Q)$ entonces,

a) $x^A = P - Q$ *b*) $x^{P-Q} = A$ *c*) $(P - Q)^A = x$ *d*) $10^A = P - Q$ *e*) Otra







Series y sucesiones

Contenido de la unidad

En este capítulo se analiza un tema fundamental en el aprendizaje de las matemáticas financieras: las *progresiones* o *sucesiones.* Se emplean en la resolución de problemas que tienen que ver con la transferencia de capitales en partidas sucesivas, como la amortización de créditos, las compras a plazos, la renta de viviendas o las inversiones con depósitos periódicos.

Buena parte de la temática de los capítulos posteriores se fundamenta en los conceptos que aquí se presentan. Por ello, es importante y útil que se entiendan y se asimilen cabalmente por parte del estudiante antes de continuar con el estudio de los otros capítulos que conforman esta obra.

Las sucesiones que se conocen también como **progresiones**, tienen múltiples aplicaciones en diversas áreas como la ingeniería, la economía, la estadística y otras; sin embargo, las que más se utilizan en

matemáticas financieras y en finanzas son las **aritméticas** y las **geométricas**. Las primeras se caracterizan porque la diferencia entre 2 términos sucesivos cualesquiera es siempre la misma; mientras que en las segundas, el cociente entre 2 términos sucesivos es constante: es siempre el mismo.

No obstante, hay progresiones donde los términos no guardan relación alguna, tal como se aprecia en los primeros ejemplos.

2.1 Terminología y clasificación de las sucesiones

Definición 2.1

Sucesión es el conjunto ordenado de números, llamados *términos* de la sucesión y en este libro se denotan con a_n, donde el subíndice n indica la posición del término.

A partir de esta definición, se dice que las sucesiones, en general, se representan como:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Ejemplo 1

Sucesión, ventas anuales de una exportadora

Las ventas anuales de la exportadora Cítricos y Derivados, S. A., en los últimos 7 años son:

6.80, 7.25, 8.30, 8.60, 9.70, 10.25 y 12.45,

cantidades que representan una sucesión, donde el primer término es $a_1 = 6.80$, el segundo es $a_2 = 7.25$ y el último es $a_7 = 12.45$.

Ejemplo 2

Sucesión, tasas de rendimiento anual de los CETES

Suponiendo que, durante las últimas semanas, la tasa de rendimiento anual de los CETES, Certificados de la Tesorería de la Federación, a 28 días correspondió a los siguientes porcentajes:

8.21, 8.25, 8.29, 8.31, 8.32, 8.34, 8.37, y 4.13

Éstos son valores que constituyen una sucesión, cuyo primer término es $a_1 = 8.21$, el segundo es $a_2 = 8.25$, y el octavo es $a_8 = 4.13$.

Es común expresar los términos de las sucesiones mediante una fórmula en función de n o de cualquier otra literal, la cual se reemplaza sucesivamente por los números enteros positivos 1, 2, 3,…

Ejemplo 3

Términos de las sucesiones

Los primeros 5 términos de la sucesión dada por $a_n = n^2 - 2n$ son:

$a_1 = 1^2 - 2(1) = -1$ $\quad$ $a_2 = 2^2 - 2(2)$ o bien $a_2 = 0$

$a_3 = 3^2 - 2(3)$ o bien $a_3 = 3$ $\quad$ $a_4 = 4^2 - 2(4)$, es decir, $a_4 = 8$

y $\quad$ $a_5 = 5^2 - 2(5)$, esto es, $a_5 = 15$

Ejemplo 4

Suponiendo que los términos de una sucesión están dados por la fórmula:

$$a_n = 4n - 2$$

a) ¿Cuáles son los primeros 4?

b) ¿Qué lugar ocupa el número 2,498 en la sucesión?

c) ¿Qué característica se observa en los términos de la sucesión?

solución

a) Para los primeros 4 se reemplaza sucesivamente n por 1, 2, 3, 4 y, entonces,

$$a_1 = 4(1) - 2 \text{ o bien, } a_1 = 2$$

$$a_2 = 4(2) - 2 \text{ o bien, } a_2 = 6$$

$$a_3 = 4(3) - 2 \text{ o bien, } a_3 = 10 \text{ y}$$

$$a_4 = 4(4) - 2 \text{ o bien, } a_4 = 14.$$

b) Se reemplaza a_n por 2,498 y se despeja n

$$2{,}498 = 4n - 2$$

de donde $\quad$ $4n = 2{,}498 + 2$, $n = 2{,}500/4$ o bien $n = 625$

c) Los términos crecen de 4 en 4 y este número corresponde al coeficiente de n en la fórmula dada; puede decirse que para expresar los números que van de 5 en 5, por ejemplo, el coeficiente de n en la fórmula que lo representa debe ser 5, si la ecuación es lineal.

Ejercicios 2.1

1. Explique brevemente los conceptos de *sucesión, término de una sucesión, progresión aritmética* y *progresión geométrica.*
2. Escriba 10 ejemplos de sucesiones en la vida real.
3. ¿Qué significan n y a_n en una progresión?
4. Si a_i es el iésimo término en una progresión, ¿cómo indicaría el anterior y el siguiente?
5. ¿Será posible que n y a_n sean el mismo número?
6. Obtenga el octavo término de la progresión dada por:

   a) $a_n = 2n + n^3$ *b*) $a_n = 10n - 5$ *c*) $a_n = n^2 - 3n$ *d*) $a_n = 3$
7. Escribir el término vigésimo primero de la progresión dada por las fórmulas del problema 6.

*8. ¿Qué lugar ocupa el número 3,965 en la sucesión dada por $a_n = n^2 + 4n$?

9. ¿Cómo expresa los múltiplos positivos de 3?

*10. Escriba una fórmula para representar los números que van de 5 en 5, y el primero es 3.

11. ¿Cuál es el trigésimo quinto término de la progresión representada por $a_n = n^2 - 100n - 45$?

*12. Escribe los primeros 3 términos de la progresión donde cada uno es igual a la mitad del anterior y el decimoquinto es 128.

13. ¿A qué es igual el décimo término de la progresión cuyo tercer término es 18 y cada uno es igual al anterior más 5?

14. ¿Cuál es el séptimo término de la progresión donde cada uno es igual al siguiente menos 3 y el décimo quinto es 49?

*15. Encuentre los términos del octavo al decimotercero si el primero es −10 y cada uno es 4 unidades más que el que le precede.

*16. Obtenga el término decimoctavo si el quinto es 7 y el octavo es 42 y la diferencia entre 2 sucesivos es constante.

17. ¿Cuál es el vigésimo término de la sucesión dada por $a_n = (n - 2)^3 - 3n^2$?

18. El cuarto término de una progresión es 300 y cada uno es igual al triple del anterior. ¿Cuál es el primero?

En los problemas 19 a 24 conteste falso o verdadero y justifique su respuesta.

19. En una sucesión n puede ser igual a −10. ________

20. El decimoquinto término de la sucesión dada por $a_n = 4n + n^2$ es igual a 240. ________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

21. La diferencia entre 2 términos sucesivos de la progresión $a_n = 5n - 4$ es igual a 4. ________

22. Todas las sucesiones son aritméticas o geométricas. ________

***23.** Todos los términos de la progresión dada por $120 - n^2$ son positivos. ________

24. La sucesión formada por los números pares mayores que 10 es aritmética. ________

En los problemas 25 a 33 seleccione la opción correcta justificando su elección.

25. El trigésimo quinto término de la progresión dada por $a_n = 2n^2 - 4n$ es:

a) 2,380 *b*) 3,120 *c*) 1,980 *d*) 2,310 *e*) Otra

26. ¿Cómo es la fórmula para los números positivos múltiplos de 3, si n es mayor o igual a 1?

a) $a_n = 3^n$ *b*) $a_n = n + 3$ *c*) $a_n = 3 - n$ *d*) $a_n = 3n$ *e*) Otra

***27.** Es la posición que ocupa el número -20 en la sucesión dada por $a_n = 5 - \sqrt{7 + 3n}$.

a) 242 *b*) 206 *c*) 215 *d*) 190 *e*) Otra

***28.** Es la fórmula para representar los números pares mayores que -13 donde n es un entero positivo.

a) $a_n = 10n - 23$ *b*) $a_n = 2n - 13$ *c*) $a_n = 4n - 12$ *d*) $a_n = 2n - 14$ *e*) Otra

29. Son los primeros términos de la progresión dada por $a_n = 4n - 3n^2$.

a) 1, 2, 3 *b*) 1, 4, 8 *c*) 1, −4, −15 *d*) 1, −5, −10 *e*) Otra

30. La suma de los términos cuarto, vigésimo octavo y cuadragésimo sexto en la sucesión dada por $a_n = 5 + \sqrt{2n + 8}$ es:

a) 54 *b*) 63 *c*) 37 *d*) 92 *e*) Otra

31. ¿Cómo expresa mediante una ecuación la sucesión −2, 3, 8, 13…*?

a) $a_n = 5n - 7$ *b*) $a_n = 3n - 5$ *c*) $a_n = n - 3$ *d*) $a_n = 5n$ *e*) Otra

32. ¿Cuánto suman los primeros 3 términos de la progresión dada por $a_n = 5 - n^2 + 3n$?

a) 32 *b*) 23 *c*) 19 *d*) 15 *e*) Otra

33. Obtenga el término número 15 de la progresión dada por $a_n = 25/(30n - n^2)$

a) 1/9 *b*) 5/7 *c*) −1/7 *d*) −4/7 *e*) Otra

2.2 Progresiones aritméticas

Suponga que cada litro de gasolina aumenta 5 centavos por mes y que el producto interno bruto, PIB, de México crece a razón del 2.5% anual.

En el primer caso el precio de la gasolina en un mes cualquiera es igual al precio del mes anterior ***más*** un valor constante 5. Sin embargo, en el segundo, el PIB de cualquier año será igual al PIB del año anterior multiplicado ***por*** la constante 1.025 ¿Por qué?

* Los puntos suspensivos indican que los términos continúan con la misma regla.

Estos 2 casos ejemplifican la diferencia entre las progresiones aritméticas y las geométricas. En esta sección se abordan las primeras.

Definición 2.2

Una progresión es **aritmética** si cada término es igual al anterior **más** una constante d llamada diferencia común, es decir, si el enésimo término es:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Note usted que para hallar la diferencia de cualquier término se resta el que le precede, es decir, $d = a_n - a_{n-1}$ se despeja d de la ecuación de la definición 2.2.

Ejemplo 1

Progresión aritmética

Los primeros 5 términos de la progresión $a_n = 4n - 3$ son:

$a_1 = 4(1) - 3 = 1$, $a_2 = 4(2) - 3 = 5$, $a_3 = 4(3) - 3 = 9$, $a_4 = 4(4) - 3 = 13$ y $a_5 = 4(5) - 3 = 17$

La anterior es una progresión aritmética, ya que cada término es igual al anterior más 4 y la diferencia común es 4.

Ejemplo 2

Términos de la progresión aritmética



¿Cuáles son los primeros 3 términos de la progresión aritmética si el cuarto es $a_4 = 21$ y el octavo es $a_8 = -3$?

solución

Como se aprecia en la figura 2.1, la diferencia entre los términos cuarto y octavo es igual a 4 veces la diferencia común.

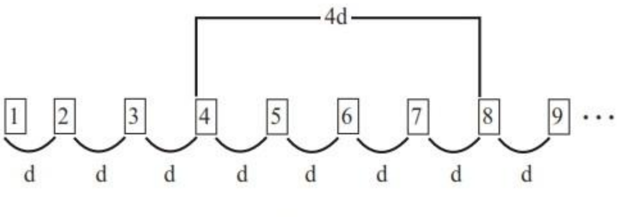


Figura 2.1

Por lo tanto, $a_8 = a_4 + 4d$ o bien,

$-3 = 21 + 4d$ se sustituye a_8 por -3 y a_4 por 21

$-3 - 21 = 4d$

$4d = -24$, $d = -24/4$, o bien, $d = -6$

Los términos anteriores al cuarto, es decir, los 3 primeros, se obtienen restando sucesiva - mente la diferencia, por ejemplo:

$a_3 = a_4 + d$ $a_3 = 21 - (-6)$ o bien, $a_3 = 27$

$a_2 = a_3 + d$ $a_2 = 27 - (-6)$ o bien, $a_3 = 33$ y

$a_1 = a_2 + d$ $a_1 = 33 - (-6)$ o bien, $a_1 = 39$

En la misma figura 2.1, donde los puntos suspensivos indican que los términos continúan indefinidamente, se observa que para obtener cualquier término n, se debe sumar al primero $(n - 1)$ veces la diferencia común. Esto quiere decir que para el quincuagésimo término del ejemplo 2 se deberá hacer lo siguiente:

$a_{50} = 39 + (50 - 1)(-6)$ o bien, $a_{50} = 39 - 294$ o bien, $a_{50} = -255$
ya que $a_1 = 39$, $d = -6$ y $n = 50$

Esto se verifica fácilmente al observar que los términos de cualquier progresión aritmética pueden escribirse, dependiendo del primer término, de la siguiente forma:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d$

$a_3 = (a_1 + d) + d$ o bien, $a_3 = a_1 + 2d$ porque $a_2 = a_1 + d$

$a_4 = a_3 + d$

$a_4 = (a_1 + 2d) + d$ o bien, $a_4 = a_1 + 3d$ ya que $a_3 = a_1 + 2d$

También se observa que en cada uno de estos términos el coeficiente de d es uno menos que el subíndice de a, lo que da lugar al siguiente teorema.

Teorema 2.1

El **enésimo término** de la progresión aritmética con a_1 como primer término y d como la diferencia común, es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Ejemplo 3

Término de la progresión aritmética

Encuentre el vigésimo cuarto término de la progresión aritmética $-3, 12, \ldots$

solución

Puesto que $a_2 = a_1 + d$, la diferencia es $d = a_2 - a_1$, es decir, $d = 12 - (-3)$ o bien, $d = 15$. El vigésimo cuarto término es, entonces,

$$a_{24} = (-3) + (24 - 1)15 \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{24} = -3 + 345$$

o bien, $a_{24} = 342$

Ejemplo 4

Valor de un término

Obtenga el valor de x en la progresión aritmética $-3, x, 15, \ldots$

solución

La diferencia entre el primero y el tercero es igual a 2 veces la diferencia común d, es decir,

$$2d = 15 - (-3), \qquad 2d = a_3 - a_1$$

de donde $2d = 18$, $\quad d = 18/2$ o bien, $d = 9$

Por lo tanto, x es igual al primero más esta diferencia pero también es igual al tercero, menos la diferencia

$x = -3 + 9 \quad x = 6$ o bien, $x = 15 - 9 \quad a_2 = a_1 + d$ y también $a_2 = a_3 - d$

Ejemplo 5

La diferencia entre los términos décimo y vigésimo en una progresión aritmética es 90; además, el cuarto es -10. Obtener los 3 primeros.

solución

Para llegar al vigésimo término, debe sumarse al décimo 10 veces la diferencia común y como esto es igual a 90, se cumple que:

$$10d = 90$$

de donde $d = 90/10$ o bien, $d = 9$

Asimismo, para llegar al cuarto, al primero debe sumarse 3 veces la diferencia, es decir,

$a_4 = a_1 + 3d$

o bien, $-10 = a_1 + 3(9)$ ya que $a_4 = -10$ y $d = 9$

de donde $a_1 = -10 - 27$ o bien, $a_1 = -37$

Para el segundo y el tercero, se suma la diferencia común, es decir, $a_2 = a_1 + 9$ o bien, $a_2 = -28$ y $a_3 = -28 + 9$ o bien, $a_3 = -19$.

Se sugiere comprobar este resultado hallando los términos siguientes hasta el vigésimo quinto.

Suma de los primeros términos

Tan útil como el enésimo término de las progresiones aritméticas es la suma de sus primeros términos. Esta suma recibe el nombre de **serie** y puede ser finita o infinita, aunque aquí se tratan las que son finitas.

Puesto que cada término es igual al anterior *más* una constante *d*, también es cierto que cada uno es igual al que le sigue menos *d*, por eso la suma se expresa como:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

o como $$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

si se invierte el orden de los términos.

Al sumar las 2 ecuaciones, en el miembro izquierdo se tiene $2\,S_n$ y en el derecho se obtiene n veces a_1 y n veces a_n, puesto que se cancelan todos los términos con d, esto es:

$$2S_n = na_1 + na_n$$

Por lo que al dividir entre 2 y factorizar n, esta ecuación se reduce a:

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$$

o también $S_n = n/2[a_1 + (a_1 + (n - 1)d]$ puesto que $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$ $a_1 + a_1 = 2a_1$

Por supuesto que la elección de una u otra fórmula dependerá de los datos que se dispongan.

Teorema 2.2

La **suma** desde el primer término a_1, hasta el enésimo a_n, en una serie aritmética con diferencia común *d es*:

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n) \quad \text{o bien,} \quad S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$

Veamos una anécdota en relación con esta suma. Se asegura que cuando Carl F. Gauss, uno de los más grandes matemáticos del siglo XVIII nacido en Alemania realizaba sus primeros estudios,

sorprendió a sus condiscípulos y maestros al dar la respuesta correcta antes que los demás, cuando se le planteó la suma de los primeros 100 números enteros positivos

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

Argumentó que sumó el primero y el último términos, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente hasta llegar a los términos medios notando que tales sumas eran siempre iguales a 101; esto es, $a_1 + a_{100}$ o $a_1 + a_n$ con $n = 100$, resultado que multiplicó por 50, es decir, por $n/2$. ¿Por qué? Su respuesta fue 5050, lo cual significa que 50(101) o $(n/2)(a_1 + a_n)$ es igual a la fórmula anterior.

Ejemplo 6

Suma de términos de una serie aritmética

Se desea encontrar la suma de los primeros 20 términos de la serie aritmética:

$$(-8) + (-4) +, \ldots$$

solución

La diferencia común es $d = a_2 - a_1 = (-4) - (-8) = 4$, el primer término es $a_1 = -8$ y además $n = 20$, entonces, la suma es:

$$S_{20} = (20/2)[2(-8) + (20 - 1)4]$$

$$S_{20} = 10(-16 + 76) \qquad \text{o bien,} \qquad S_n = 600$$

Ejemplo 7

Los primeros 15 términos en una serie aritmética suman 180 y el primero es -23. ¿Cuál es el décimo?

solución

En la segunda ecuación del teorema 2.2 se reemplazan a_1 por -23, n por 15 y S_n por 180. Después se despeja d, la diferencia:

$$180 = (15/2)[2(-23) + (15 - 1)d]$$

$$180(2)/15 = -46 + 14d$$

el 2 pasa multiplicando y el 15 dividiendo

$$24 + 46 = 14d$$

$$d = 70/14 \text{ o bien, } d = 5$$

Entonces el décimo término es:

$$a_{10} = -23 + 9(5) \qquad a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{o bien,} \quad a_{10} = 22$$

Ejemplo 8

Hallar la suma de los términos desde el decimoquinto hasta el vigésimo octavo de la progresión aritmética 6, 10,…

solución

La diferencia común es $d = 4$ porque $d = a_2 - a_1$. La suma de los primeros 28 es:

$$S_{28} = (28/2)\left[2(6)+(27)(4)\right] \quad S_n = (n/2)\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_{28} = 14(120) \qquad \text{o bien,} \qquad S_{28} = 1{,}680$$

La suma de los primeros 14 términos es:

$$S_{14} = (14/2)[2(6)+13(4)]$$

$$S_{14} = 7(64) \qquad \text{o bien,} \qquad S_{14} = 448$$

y la suma desde el decimoquinto hasta el vigésimo octavo es igual a la diferencia entre los 2 resultados, esto es:

$$S = 1{,}680 - 448 \qquad \text{o bien,} \qquad S = 1{,}232$$

Solución alterna

Se obtiene la misma solución si se considera "otra" sucesión, donde el primer término a_1, corresponde al décimo quinto t_{15} de la sucesión dada y el décimo cuarto a_{14} corresponde al vigésimo octavo, t_{28}.

Entonces $a_1 = t_{15}$ es igual a:

$$t_{15} = 6 + 14(4) \qquad t_{15} = t_1 + (n-1)d \qquad d = 10 - 6 = 4$$

$$t_{15} = 62$$

La suma es por lo tanto:

$$S_{14} = (14/2)[2(62) + (13)4]$$

$$S_{14} = 7(124 + 52) \quad \text{o bien,} \quad S_{14} = 1{,}232$$

Ejercicios 2.2

1. Obtenga el término que se indica en las progresiones aritméticas dadas.

a) 1, 5,… el octavo

b) –20, 3,… el trigésimo

c) 5, –2,… el décimo primero

d) 7, 7/3,… el vigésimo tercero

***2.** Obtenga la suma hasta el término pedido en las progresiones del problema 1.

3. Encuentre los primeros 3 términos de la sucesión aritmética donde:

a) $a_{10} = -8$ y $a_4 = 32$

b) $a_{17} = 1$ y $a_5 = 85$

c) $a_{18} = 30$ y $S_{18} = 300$

**d*) $S_{10} = 140$ y $S_{12} = 120$

4. ¿Cuál es el primer término de la progresión aritmética si el quinto es 13 y la suma de los primeros 5 es 10?

5. Calcule el quinto término de la progresión aritmética donde el primero es −35 y el vigésimo quinto es 135.

6. Si la diferencia entre los términos vigésimo y vigésimo séptimo es igual a 35/2 en una progresión aritmética y el primero es −48. Obtenga el vigésimo.

7. Encuentre el primer término de la progresión aritmética con un décimo tercer término igual a 80 y el vigésimo igual a 115.

8. ¿Cuál es el valor de x en la progresión aritmética?

a) $14, x, -7, \ldots$

b) $8, 4 - x, -30, \ldots$

c) $3/4, x, 7/8, \ldots$

d) $x + 10, -5, 2, \ldots$

9. ¿Cuánto suman los primeros 24 términos de la progresión aritmética, $-4, 3x, -49, \ldots$?

10. ¿Cuál es el valor de x en el problema 9?

***11.** En una serie aritmética, los primeros 15 términos suman 4,920 y la diferencia entre el quinto y decimoprimero es igual a 360, ¿cuáles son los 3 primeros?

***12.** La suma de los primeros 10 términos en una progresión aritmética es 215 y los primeros 25 suman 1,850, ¿cuánto suman los primeros 5 términos?

En los problemas 13 a 21 conteste verdadero o falso y justifique su respuesta.

13. La sucesión −3, 13, 29,… puede ser aritmética. ________

***14.** La progresión dada por $a_n = 5n - 3/5$ es aritmética. ________

15. La sucesión 3/4, 1/2, 1/4,… no puede ser aritmética. ________

16. En la progresión aritmética $-10, x + 4, 8, \ldots$ el valor de x es −5. ________

***17.** Los primeros 20 términos de la progresión aritmética $7, x, -4, \ldots$ suman −905. ________

18. El término número 35 en la progresión aritmética $13, x + 2, -13, \ldots$ es igual a −429. ________

19. No es posible que una progresión sea aritmética y geométrica a la vez. ________

20. En la sucesión aritmética −10, −3,… la suma de los primeros 15 términos es un número negativo. ________

***21.** No es posible que en una sucesión aritmética el décimo término sea numéricamente igual a la suma de los primeros 10 términos. ________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

En los problemas 22 a 36 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

22. Es el vigésimo séptimo término de la sucesión aritmética –3, 10,…

a) 179 *b*) 423 *c*) 255 *d*) 335 *e*) Otra

***23.** Los primeros 3 términos de la progresión aritmética donde $a_7 = 150$ y $S_7 = 490$ son:

a) –10,50/3,130/3 *b*) –10, 25, 60 *c*) 5, 15, 25 *d*) –3, 10/3, 29/3 *e*) Otra

24. Son los valores de x en la sucesión aritmética 5, $x^2 + 3x$, 3,…

a) –4, 1 *b*) 4, –1 *c*) 3, 2 *d*) 0, 4 *e*) Otra

***25.** Es una sucesión que no puede ser aritmética.

a) 4, x^2, –22,… *b*) –5, $3x$, 10/3,… *c*) 8, –10, x,… *d*) –10, $x^2 - 1$, 10,…
e) 3/5, 1/5 – 1/5,…

26. El primer término de la sucesión aritmética con $a_2 = 8$ y $a_7 = -27$ es igual a:

a) –6 *b*) 1 *c*) 15 *d*) –20 *e*) Otra

27. Los primeros 80 términos de la sucesión aritmética 3, x, –5,… suman.

a) 14,600 *b*) 9,200 *c*) 10,800 *d*) –12,400 *e*) Otra

28. En una sucesión aritmética el séptimo término es 10 y el decimoquinto es 50, entonces la suma de los 20 primeros es:

a) 550 *b*) 470 *c*) 620 *d*) 575 *e*) Otra

29. En la progresión del problema 28 el primer término es:

a) –25 *b*) –20 *c*) –5 *d*) 0 *e*) Otra

***30.** Si los primeros 3 términos de una progresión aritmética suman 45/4 y el primero es 3/4, ¿cuánto suman los primeros 25?

a) 2,926/3 *b*) 3,675/2 *c*) 928 *d*) 3,675/4 *e*) Otra

31. ¿Cuánto suman los términos desde el vigésimo sexto hasta el trigésimo quinto incluyéndolos en la progresión del problema 30?

a) 3,425/2 *b*) 2,083/4 *c*) 1,785/2 *d*) 3,250/3 *e*) Otra

32. El trigésimo cuarto término de la progresión aritmética: –7, –2,… es:

a) 192 *b*) 183 *c*) 204 *d*) 158 *e*) Otro

33. La suma de los primeros 30 términos de la sucesión del problema 32 es:

a) 1,855 *b*) 2,124 *c*) 1,965 *d*) 2,035 *e*) Otra

***34.** Los términos que van de 4 en 4 y comienzan con –3 se expresan con la ecuación siguiente donde n es entero positivo.

a) $a_n = 4n - 1$ *b*) $a_n = 4n - 7$ *c*) $a_n = 4 - 3n$ *d*) $a_n = 4n - 3$ *e*) Otra

35. Es la suma de los términos del séptimo hasta el vigésimo sexto inclusive, de la progresión aritmética dada por $a_n = 5 + 7n$.

a) 2,410 *b*) 1,944 *c*) 1,937 *d*) 1,760 *e*) Otra

36. Es un ejemplo de progresión aritmética

a) –3, 3, 6,… *b*) 10, 121, 131,… *c*) 4, 3, 2, 1, –1,… *d*) 8, 3, –2,… *e*) Otra

2.3 Progresiones geométricas

Definición 2.3

Una progresión es **geométrica** si cada término es igual al anterior ***por*** una constante r llamada *razón común*, es decir, si:

$$a_n = a_{n-1}(r)$$

Note que para hallar la razón se divide un término entre el que le precede, esto es:

$$r = a_n / a_{n-1}$$

Ejemplo 1

Términos de una progresión geométrica

Los primeros 6 términos de la progresión geométrica con $a_1 = 4$, el primer término, y $r = 1/2$, la razón común, son:

$a_1 = 4$ $a_2 = 4(1/2) = 2$ o bien, $a_2 = 2$

$a_3 = 2(1/2)$ o bien, $a_3 = 1$ $a_4 = 1(1/2)$ o bien, $a_4 = 1/2$

$a_5 = (1/2)(1/2)$ o bien, $a_5 = 1/4$ y $a_6 = (1/4)(1/2)$ o bien, $a_6 = 1/8$

Ejemplo 2

Cálculo del valor de los términos de una sucesión geométrica

Encontrar el cuarto y el decimosexto términos de la sucesión geométrica 3, –1,…

solución

La razón es $r = -1/3$, $r = a_2/a_1$

El cuarto término es igual al primero multiplicado 3 veces por la razón, ¿por qué?

$$a_4 = a_1 r(r)(r) \quad \text{o bien,} \quad a_4 = a_1 r^3$$
$$a_4 = (3)(-1/3)^3$$

es decir, $a_4 = -1/9$

Para llegar al decimosexto, el cuarto se multiplica 12 veces por la razón. ¿Por qué?

$$a_{10} = a_4(r)^{12}$$
$$= -(1/9)(-1/3)^{12}$$
$$= -1/3^{14} \quad \text{o bien,} \quad a_{10} = -0.000000209, \text{ aproximadamente.}$$

Ya que en las progresiones aritméticas puede encontrarse cualquier término sin tener el inme - diato anterior, se propone el siguiente teorema para hacerlo en las progresiones geométricas.

Teorema 2.3

El **enésimo término** de la progresión geométrica, cuyo primer término es a_1 y la razón es r, está determinado por:

$$a_n = a_1(r^{n-1})$$

Aplicando sucesivamente la definición de progresión geométrica se comprueba esta fórmula:

$a_2 = a_1 r$			
$a_3 = a_2 r = (a_1 r)r$	o bien,	$a_3 = a_1 r^2$	$a_2 = a_1 r$
$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2)r$	o bien,	$a_4 = a_1 r^3$	$a_3 = a_1 r^2$
$a_5 = a_4 r = (a_1 r^3)r$	o bien,	$a_5 = a_1 r^4$	$a_4 = a_1 r^3$, etcétera.

Se observa que el exponente de$r$, en cada término, es uno menos que el subíndice de$a$, es decir, tal como se indica en el teorema.

Ejemplo 3

Cálculo del valor de un término de una progresión geométrica

Hallar el decimoquinto término de la progresión geométrica:

$$(1.012)^3, (1.012), \ldots$$

solución

La razón es $r = a_2/a_1$, $r = 1.012/(1.012)^3$, $r = 1/(1.012)^2$ o bien, $r = (1.012)^{-2}$

ya que $a^m/a^n = a^{m-n}$ y $1/a^n = a^{-n}$.

El primer término es $a_1 = (1.012)^3$ y $n = 15$ porque se pregunta el decimoquinto, entonces:

$a_{15} = (1.012)^3((1.012)^{-2})^{15-1}$ $\quad a_n = a_1(r^{n-1})$

$a_{15} = (1.012)^3(1.02)^{-28}$ $\quad (x^m)^n = x^{mn}$

$a_{15} = (1.012)^{-25}$ o bien, $a_{15} = 0.742142303$ aproximadamente.

Ejemplo 4

Los términos décimo y vigésimo sexto en una progresión geométrica son $a_{10} = 1/128$ y $a_{26} = 512$. ¿Cuáles son los primeros 3?

solución

El término a_{26} debe ser igual al décimo multiplicado 16 veces por la razón ¿por qué?, es decir,

$$a_{26} = a_{10}(r)^{16} \text{ o bien, } 512 = (1/128)r^{16}, \text{ sustituyendo,}$$

de donde $r^{16} = 512(128)$, $r^{16} = 65{,}536$ o bien, $r = 2$

sacando la raíz décimo sexta.

También es cierto que $a_{10} = a_1 r^9$ según el teorema 2.4. Entonces, al sustituir quedará:

$$1/28 = a_1(2)^9 \quad \text{o bien,} \quad 1/128 = a_1\,(512)$$

de donde $a_1 = (1/128)/512$ $\quad a_1 = 1/65{,}536$ o $a_1 = 1/2^{16}$

Esto se multiplica por 2 para el segundo y, de nuevo por 2, para el tercero; es decir,

$a_2 = (1/2^{16})(2)$ o bien, $a_2 = 1/2^{15}$ $\quad a_2 = a_1 r$

y $a_3 = (1/2^{15})(2)$, $a_3 = 1/2^{14}$ o bien, $a_3 = 0.000061035$ aproximadamente.

Note que la razón común puede ser también -2 y esto arroja otra solución posible.

Suma de los primeros términos

La primera ecuación de las 2 siguientes es la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica. La segunda se obtiene multiplicando la primera por ($-r$). Después, se suman las 2:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-3} + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$$
$$-rS_n = -a_1r - a_1r^2 - \dots - a_1r^{n-3} - a_1r^{n-2} - a_1r^{n-1} - a_1r^n$$

Entonces $S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$

Note que al multiplicar por $(-r)$ se suma 1 a los exponentes de r en la primera ecuación y, con excepción de a_1 y a_n, todos los términos se cancelan al sumar las 2 ecuaciones. Después, se factoriza S_n en el miembro izquierdo de la ecuación que resultó y a_1 en el derecho, es decir,

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \qquad x - bx = x(1 - b)$$

de donde $$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \text{ o bien, } S_n = a_1\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$$

Esta ecuación no es válida para $r = 1$, ya que no existe la división entre cero; pero si $r = 1$, todos los términos son iguales y la suma será simplemente:

$$S_n = a_1n$$

Esto se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 2.4

Si a_1 es el primer término y r es la razón constante en una serie geométrica, la **suma** de los primeros n términos es:

$$S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{si} \quad r \neq 1 \quad \text{o bien,} \quad S_n = na_1 \quad \text{si} \quad r = 1$$

Ejemplo 5

¿Cuánto suman los primeros 15 términos de la progresión geométrica 1/3, x, 3,…

solución

Para aplicar la ecuación del teorema 2.4 necesitamos hallar la razón, y como el tercer término es igual al primero, multiplicado 2 veces por la razón, se tiene:

$$3 = (1/3)r^2$$

de donde, al pasar multiplicando al lado izquierdo el 3 que está dividiendo en el derecho, queda:

$9 = r^2$ y al sacar raíz cuadrada nos da que $r = \pm 3$ y esto significa que hay 2 soluciones. Hallamos la primera con $r = 3$ para que el lector obtenga la segunda con $r = -3$

$$S_{12} = (1/3)\frac{1-3^{15}}{1-3} \qquad S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r} \qquad a_1 = 1/3,\ n = 15$$

$$= (1/3)(7'174{,}453) \qquad \text{o bien,} \qquad S_{12} = 2'391{,}484.333$$

Ejemplo 6

Suma de términos de una progresión geométrica



Se desea obtener la suma de los primeros 18 términos de la progresión geométrica si el decimoquinto y el decimoctavo son, respectivamente, 4 y 32.

solución

El decimoquinto término es $a_{15} = 4$, para llegar al decimoctavo se multiplica éste 3 veces por la razón, esto es,

$$a_{18} = 4(r)(r)(r) \quad \text{o bien,} \quad 32 = 4r^3$$

Por lo que al dividir entre 4 y sacar la raíz cúbica, queda:

$$r^3 = 8,\ \ r = \sqrt[3]{8} \quad \text{o bien,} \quad r = 2$$

Se reemplazan en el teorema 2.3: $a_{15} = 4$, $n = 15$ y $r = 2$, para hallar a_1:

$$4 = a_1(2)^{14} \qquad\qquad a_{15} = a_1 r^{14}$$

de donde $\quad a_1 = 4/2^{14} \quad$ o bien, $\quad a_1 = (1/2)^{12}$

La suma de los primeros 18 es, por lo tanto,

$$S_{18} = (1/2)^{12}\left(\frac{1-2^{18}}{1-2}\right) \qquad S_{18} = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$= 0.000244141(262{,}143)$$

o bien, $\quad S_{18} = 63.99975586$ redondeando.

Es importante señalar que siempre que un término sea un porcentaje mayor o menor que el que le precede, es decir, cuando la tasa de crecimiento o decremento sea dada en porcentaje la sucesión será geométrica, se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

Cálculo del valor de un término y la suma de términos determinados

Se pretende obtener el decimosexto término y la suma de los primeros 16 de la progresión, donde cada término es 5% mayor que el anterior y el primero es 80.

solución

a) El segundo, puesto que el primero es $a_1 = 80$, es:

$$a_2 = a_1 + 0.05a_1 \qquad \text{5\% se expresa 0.05}$$
$$a_2 = a_1(1 + 0.05) \qquad \text{se factoriza } a_1$$
o bien, $$a_2 = a_1(1.05)$$

El tercero es:

$$a_3 = a_2 + 0.05a_2$$
$$a_3 = a_2(1.05) \qquad \text{Se factoriza } a_2$$
$$a_3 = (a_1(1.05))(1.05) \qquad \text{o bien, } a_3 = a_1(1.05)^2$$

Y el decimosexto, puesto que la razón es $r = 1.05$, tal como se observa en a_2 y a_3, será:

$$a_{16} = a_1(1.05)^{15} \qquad a_n = a_1(r^{n-1})$$
$$a_{16} = 80(1.05)^{15} \text{ o bien,}$$
$$a_{16} = 166.3142543$$

b) La suma de los primeros 16 es:

$$S_{16} = 80\,\frac{1-(1.05)^{16}}{1-1.05} \qquad S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$
$$= 80(23.65749176)$$
o bien, $$S_n = 1{,}892.599341$$

Advertencia

Mientras que si v es la tasa de incremento en los términos, cuando cada uno es un porcentaje mayor, o menor, que el anterior; $1 + v$ es la tasa o razón r de la progresión geométrica. Confundir v con $1 + v$ es un error común de nuestros alumnos. En el último ejemplo $v = 0.05$ mientras que $1 + v = 1.05$.

Ejercicios 2.3

1. Explique la característica de las progresiones *geométricas* y defina la *razón* en una progresión geométrica.
2. ¿Es posible que en una progresión geométrica algún término sea cero?
3. ¿Cuáles son los primeros 3 términos de la progresión geométrica donde el octavo es $a_8 = 10$ y la razón es 1/2?
4. ¿Por qué no es posible que en una sucesión geométrica el primer término sea 8 y el tercero sea –2?

*5. La suma de los primeros 3 términos en una progresión geométrica es 130 y el tercero es 10, ¿cuál es el cuarto?

6. Encuentre los primeros 3 términos de la progresión geométrica si el decimoprimero es 128 y la razón es 2.

*7. ¿Cuánto suman los primeros 10 términos de la progresión del problema 6?

8. Halle la suma de los primeros 15 términos de la serie geométrica $-10 + 10/3 + \ldots$
9. Obtenga el término número 21 en la sucesión geométrica 1, 3,…

*10. Evalúe la suma de los primeros 7 términos de la progresión geométrica 1.013, $(1.013)^3$,…

11. Obtenga el decimoctavo término de la sucesión del problema 10.
12. ¿Cuál es el término que ocupa la posición 20 en la progresión geométrica 1/8, $(x + 3)$, 1/2,…?
13. ¿Cuánto suman los 10 primeros términos de la progresión del problema 12?
14. El primer término de una progresión geométrica es 5 y la razón es 3/2. ¿A qué es igual la suma de los primeros 15?
15. Obtenga el término octavo en la sucesión geométrica donde el cuarto es 15 y la razón es –3.

En los problemas 16 a 24 conteste verdadero o falso.

*16. No es posible que en una progresión geométrica los términos a_{10} y a_{12} tengan signo contrario. ________

17. En una sucesión geométrica todos los términos son diferentes de cero. ________
18. En las progresiones geométricas la razón constante es siempre positiva. ________

*19. El valor de x en la progresión geométrica 6, $x + 4$, 3/2,… es $x = 3$. ________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

20. La sucesión 10, 5, 0,… es geométrica. ________

21. En la progresión geométrica 7, –3, 9/7,… la razón es –4. ________

22. La sucesión 4, 4, 4…, es geométrica, $r = 1$, pero también corresponde a una progresión aritmética. ________

23. La suma de los primeros 6 términos de la progresión geométrica 6, $x - 5$, 216,… es igual a 39,990 cuando r es negativa. ________

24. El valor de x en la progresión del ejemplo 23 es 36. ________

En los problemas 25 a 34 seleccione la opción correcta justificando su selección.

25. Es el sexto término de la progresión geométrica 9, 9/2,…

a) 3/32 *b*) –27/2 *c*) 9/32 *d*) 9/64 *e*) Otra

26. La suma de los primeros 6 términos de la progresión del problema 25 es:

a) 17.71875 *b*) 13.42531 *c*) 21.376321 *d*) 15.42157 *e*) Otra

***27.** Encuentre el término medio de la progresión geométrica de 15 términos 2,048,…1/8.

a) 16 *b*) 64 *c*) 8 *d*) 1/2 *e*) Otra

28. Son los primeros 3 términos de la progresión geométrica donde el cuarto es 0.10 y el octavo es 0.00001.

a) 0.4, 0.3, 0.2 *b*) 100, 10, 1 *c*) 1/100, 1/10, 1 *d*) 0.8, 0.4, 0.2 *e*) Otra

29. El valor de x en la progresión geométrica 6, 5, x,… es:

a) 6/25 *b*) 5/6 *c*) 4 *d*) 25/6 *e*) Otra

***30.** ¿Cuál es el octavo término de la progresión geométrica 7, 0,…?

a) –10 *b*) No es posible *c*) –56 *d*) 56 *e*) Otra

31. El decimosegundo término de la progresión geométrica 1, 2,… es:

a) 2,048 *b*) 12 *c*) 1,024 *d*) 4,096 *e*) Otra

32. Los valores x en la progresión geométrica 2, x^2, 18,… son:

a) $\pm\sqrt{10}$ *b*) 0 y 3 *c*) –2, y 3 *d*) $\pm\sqrt{6}$ *e*) Otra

33. En la progresión del problema 32, ¿cuál es el décimo término?

a) 26,244 *b*) 74 *c*) 13,122 *d*) 39,366 *e*) Otra

***34.** Son los primeros 2 términos de la progresión geométrica donde el quinto es $a_5 = 9$ y el noveno es $a_9 = 1/9$.

a) 729,243 *b*) 81,27 *c*) 6, 3 *d*) 243,27 *e*) Otra

2.4 Algunas aplicaciones

Esta sección es un compendio de ejercicios que son aplicaciones reales de progresiones aritméticas y geométricas. Su propósito principal es ayudar al estudiante a reafirmar los conceptos y a diferenciar unas sucesiones de otras; sin embargo, puede omitirse sin que con esto se pierda continuidad en el aprendizaje.

Ejemplo 1

Un empleado deposita en una cuenta bancaria \$250 la primera quincena, \$265 la segunda, y así sucesivamente incrementa sus depósitos en \$15 cada quincena. Sin considerar intereses, determinar:

a) ¿Cuánto deposita la quincena número 27?

b) ¿En qué quincena deposita \$955?

c) ¿Con cuántos depósitos logra acumular \$12,670 en su cuenta?

d) ¿Cuánto dinero tiene luego de 40 depósitos quincenales?

solución

a) El primer depósito corresponde al primer término de una sucesión aritmética, ¿por qué? La diferencia constante es $d = 15$ y $n = 27$, la pregunta es a_{27} por lo tanto.

$$a_{27} = 250 + (27 - 1)(15) \qquad a_1 = 250 \text{ el primer depósito.}$$

$$a_{27} = 250 + 26(15) \qquad \text{a} \qquad a_{27} = \$640.00$$

b) Aquí la cuestión es n para que $a_n = 955$, entonces,

$$955 = 250 + (n - 1)(15) \qquad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Para despejar n, el 250 pasa restando, el 15 dividiendo y finalmente se suma 1 a los lados.

$$(955 - 250)/15 = n - 1$$

$$47 = n - 1 \text{ o bien, } n = 48$$

quiere decir que 2 años después es cuando deposita los 955 pesos.

c) También aquí la duda es n para que la suma de todos los depósitos sea $S_n = \$12,670$

$$12{,}670 = (n/2)[2(250) + (n - 1)15]$$

$$S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$

Se multiplica todo por 2 y se hacen las operaciones entre los corchetes

$$12{,}670(2) = n(500 + 15n - 15)$$

$$25{,}340 = 485n + 15n^2 \qquad a(x + y) = ax + ay$$

Se divide entre 5 y se reordenan los términos

$$3n^2 + 97n - 5{,}068 = 0$$

Se resuelve con la fórmula general de las cuadráticas, con $a = 3$, $b = 97$ y $c = -5{,}068$

$$n = \frac{-97 \pm \sqrt{97^2 - 4(3)(-5{,}068)}}{2(3)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = (-97 \pm \sqrt{70{,}225})/6$$

$$n = (-97 \pm 265)/6$$

Es decir, $n_1 = 28$ y $n_2 = -60.\overline{3}$

El valor negativo se desecha, ¿por qué?

Entonces, luego del depósito número 28 tendrá los $12,670 en su cuenta.

d) La suma de los 40 pagos quincenales es:

$$S_{40} = (40/2)[2(250) + (40 - 1)15]$$
$$S_{40} = 20(500 + 585) \quad \text{o bien,} \quad S_{40} = \$21{,}700.00$$

y esto es lo que tendrá en su cuenta luego del cuadragésimo depósito.

Ejemplo 2

Devaluación de la moneda nacional

Si la moneda se devalúa $0.0003 por día, ¿cuánto se devaluará en 10 meses? Si el 18 de noviembre la paridad fue de $12.09 por dólar, ¿cuál será para el 16 de mayo siguiente?

solución

a) La devaluación que se alcanza en 10 meses (300 días) es simplemente la multiplicación del número de días por la devaluación diaria en pesos.

$$300(0.0003) = 0.09 \text{ o bien, 9 centavos}$$

b) Con ayuda de un calendario o de la tabla del apéndice B, notamos que el 16 de mayo corresponde al 136º día del año. Si a_1 es la paridad del 18 de noviembre anterior, entonces la del 16 de mayo será a_{179}. La diferencia común en pesos es $d = 0.0003$, por lo que:

$$a_{179} = a_1 + (179 - 1)d$$
$$a_{179} = 12.09 + 178(0.0003)$$
$$a_{179} = 12.09 + 0.0534 \quad \text{o bien,} \quad a_{179} = 12.1434$$

será la cotización de cada dólar el 16 de mayo, de acuerdo a las condiciones supuestas.

Note que de noviembre 18 al 31 de diciembre quedan comprendidos 43 días y los 136 del año siguiente dan como resultado los 179 del valor para n, el número de días comprendidos entre las 2 fechas.

Ejemplo 3

Fondo de ahorro con renta creciente

¿Cuánto acumulará el señor Hernández si realiza depósitos semanales durante 12 meses, sin incluir intereses, comenzando con \$475 e incrementando los siguientes depósitos en un 0.5% cada 4 semanas? ¿Por qué cantidad será el último pago?

solución

a) En 12 meses, es decir, en un año, se tienen 52 semanas y si los pagos crecen cada 4, entonces tenemos 13 grupos de 4, donde cada uno forma una progresión geométrica con:

$a_1 = 475$, el primer término, el primer depósito
$r = 1.005$, la razón constante, ¿por qué?
$n = 13$, el número de términos

La suma de los 13, según la ecuación del teorema 2.4, es, entonces,

$$S_{13} = 475\frac{1-(1.005)^{13}}{1-1.005} \qquad S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_{13} = 475(13.39724020) \quad \text{o bien,} \quad S_{13} = 6{,}363.689095$$

El total que se invierte en las 52 semanas es igual a 4 veces este resultado:

$$4(6{,}363.69) = \$25{,}454.76$$

b) El último pago es igual al término decimotercero de la sucesión: 475, 477.38, 479.76,… y está determinado por:

$$a_{13} = 475(1.005)^{12} = 475(1.061677812) \quad \text{o bien,} \quad a_{13} = \$504.30$$

Puesto que el primer término es $a_1 = 475$ y la razón común es $r = 1.005$.

Ejemplo 4

Utilidades y capital reinvertido por una constructora

En 2011 las utilidades de la compañía constructora VIPAR, S.A., fueron de 18 millones de pesos. En 2014 fueron de 20.25 millones. Suponiendo que el incremento se sostiene de manera geométrica, determine:

a) La tasa de incremento anual en las utilidades.

b) Las utilidades que se estima tendrá en el año 2023.

c) La reinversión total entre 2011 y 2023 inclusive, si la empresa reinvierte el 45% de sus ganancias.

solución

a) Si las utilidades de 2011 son U_1, las de 2012 son:

$U_2 = U_1 + U_1(v)$ o bien, $U_2 = U_1(1 + v)$

Donde v es la tasa de crecimiento.
Las de 2013 y 2014 son, respectivamente,

$$U_3 = U_1(1 + v)^2 \quad \text{y} \quad U_4 = U_1(1 + v)^3$$

Dado que $U_1 = 18$ y $U_4 = 20.25$ millones, al sustituir en la última de estas igualdades, quedará:

$$20.25 = 18(1 + v)^3 \quad \text{ya que también } a_4 = a_1r^{n-1}$$

de donde $20.25/18 = (1 + v)^3$

$$1.125 = (1 + v)^3$$

$$1 + v = \sqrt[3]{1.125} \text{ se saca raíz cúbica a los 2 lados}$$

$$1 + v = 1.040041912$$

$$v = 1.040041912 - 1, \text{ por lo tanto, } v = 0.040041912$$

Significa que el incremento anual en las utilidades fue del 4% aproximadamente.

b) Las utilidades del 2023 tendrán 12 incrementos respecto de las de 2011, por esto serán

$$U_{13} = 18(1.040041912)^{12}$$

$$U_{13} = 18(1.601806649)$$

$$U_{13} = 28.83251968 \text{ millones de pesos}$$

c) Para hallar el capital que se reinvierte es necesario sumar las utilidades de los 13 años, las cuales conforman una serie geométrica con:

$a_1 = 18$ millones, el primer término

$r = 1.040041912$, la razón constante

$n = 13$, el número de términos

La suma, tal como se estudió en la sección 2.3, es:

$$S_n = 18\frac{1-(1.040041912)^{13}}{1-(1.040041912)} \text{ ya que } S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_n = 18(16.63122505)$$

$$S_n = 299.3620509$$

De esto, el 45% se reinvierte:

0.45(299.3620509) = 134.7129229 o bien, \$134’712,922.90.

Ejemplo 5

Precio futuro de un bien con devaluación



¿Dentro de 2 años cuál será el precio en moneda nacional de una impresora digital, cuyo precio actual es de US\$9,750, mismo que se incrementa un 1.8% cada semestre? Considere que la moneda se devalúa un 0.3% cada mes y el tipo de cambio actual es \$11.21 por cada dólar.

solución

Para calcular el valor del dólar al cabo de 2 años, suponga que P_0 es el tipo de cambio actual, por lo que dentro de 1 mes éste será:

$$P_1 = P_0 + 0.003P_0$$
$$P_1 = (1.003)P_0$$

Al final del segundo mes, será un 0.3% mayor:

$$P_2 = P_1 + 0.003P_1$$
$$P_2 = (1.003)P_1$$
$$P_2 = (1.003)(1.003)P_0 \quad \text{porque } P_1 = 1.003P_0$$
$$P_2 = (1.003)^2P_0 \quad \text{ya que } a(a) = a^2$$

Continuando de forma semejante, se llegará a que al finalizar el vigésimo cuarto mes, el tipo de cambio será:

$$P_{24} = (1.003)^{24}P_0 = (1.074539519)(11.21) \text{ ya que } P_0 = 11.21$$

o bien, $P_{24} = \$12.04558801$

De manera semejante, el precio de la impresora en dólares dentro de 4 semestres será:

$$C = 9{,}750(1.018)^4$$
$$C = \text{US\$}10{,}471.18247$$

y en moneda nacional será:

$$C = 10{,}471.18247(12.04558801)$$

o bien, $C = \$126{,}131.55$

Observe usted que si el tipo de cambio actual es P_1, en vez de P_0, entonces al término del vigésimo cuarto mes será P_{25} y $P_{25} = P_1(1.005)^{24}$ porque $P_n = P_1(r)^{n-1}$ según el teorema 2.3, y lo mismo puede decirse de C.

Ejemplo 6

Monto en el fondo de ahorro para el retiro

¿Qué cantidad, sin contar intereses ni descuentos por comisiones, tendrá en su fondo de ahorro para el retiro dentro de 10 años, un trabajador que ahora gana $65,000 anuales. La aportación anual que hace a su Afore (administradora de fondos para el retiro) es del 6.5% de su salario y éste crece a razón del 4.5% por año? Considere que la primera aportación es en este año.

solución

La aportación en el primer año es un 6.5% de su salario:

$$A_1 = 65{,}000(0.065) = 4{,}225$$

En el segundo, es un 4.5% mayor, ya que así es como aumenta su salario:

$$A_2 = 4{,}225 + 0.045(4{,}225)$$
$$A_2 = 4{,}225\ (1.045) \qquad x + xa = x(1 + a)$$
$$A_2 = 4{,}415.125$$

En el tercero es:

$$A_3 = ((4{,}225(1.045))(1.045)$$
$$A_3 = 4{,}225(1.045)^2 = 4{,}821.43 \text{ redondeando}$$

Es posible apreciar que las 10 aportaciones anuales constituyen una serie geométrica, cuya razón es 1.045; por lo tanto, la suma es:

$$S_{10} = 4{,}225\ \frac{1-(1.045)^{10}}{1-1.045} \qquad S_m = a_1\,\frac{1-r^m}{1-r}$$
$$S_{10} = 4{,}225(12.28820938)$$
$$S_{10} = \$51{,}917.68$$

Pérdida del poder adquisitivo

La devaluación de la moneda, la inflación, el desempleo y otros factores son la causa de que la moneda de un país pierda su capacidad para adquirir bienes y servicios, con el paso del tiempo.

Aunque esta pérdida podría darse y comportarse de varios modos, a continuación analiza - mos uno donde se supone que la tasa de variación se mantiene fija y de forma geométrica.

Ejemplo 7

Pérdida del poder adquisitivo

Considerando que el poder adquisitivo de la moneda se pierde en un 5.2% anual, determinar:

a) ¿En qué porcentaje se reduce el poder de compra en 5 años?

b) ¿Cuál es la pérdida mensual en porcentaje?

c) ¿De qué porcentaje deberá ser el incremento salarial anual para recuperar el poder de compra original?

solución

a) Si a_1 es lo que ahora se compra, digamos, con mil pesos, en un año se comprará un 5.2% menos, es decir,

$$a_2 = a_1 - (0.052)a_1$$
$$a_2 = a_1\,(1 - 0.052) \qquad \text{o bien,} \qquad a_2 = a_1\,(0.948)$$

En 2 años se pierde otro 5.2% y, por eso,

$$a_3 = a_2 - (0.052)a_2$$
$$a_3 = a_2\,(1 - 0.052) \qquad \text{o bien,} \qquad a_3 = a_2\,(0.948)$$
$$a_3 = [a_1\,(0.948)](0.948) \qquad \text{ya que} \qquad a_2 = a_1(0.948)$$
$$a_3 = a_1(0.948)^2 \qquad\qquad a(a) = a^2$$

Se aprecia que estos valores forman una progresión geométrica, donde la razón es $r = 0.948$ y, por lo tanto, la capacidad de compra al final del quinto año, 5 años después de ahora será:

$$a_6 = a_1(0.948)^5 \text{ o bien, } a_6 = a_1(0.765670098).$$

Esto quiere decir que, al cabo de 5 años, se comprará solamente el 76.567% de lo que se compra ahora, ¿por qué?

Puesto que 0.765670098 puede escribirse como $1 - 0.23432992$, a_6 es expresable como:

$$a_6 = a_1(1 - 0.23432992)$$

Esto significa que la pérdida del poder adquisitivo en 5 años será del 23.432992%, que, claro, también se obtiene con la diferencia

$$100 - 76.5670098$$

Note que la pérdida del poder de compra en 5 años es menor que 5 veces la anual, es decir, 23.432992 es menor que 5.2(5) ¿por qué?

b) Si v es la pérdida mensual, entonces el poder de compra es $1 - v$ y en los 12 meses será $(1 - v)^{12}$ que, a la vez, debe ser igual al poder de adquisición dado por año: $1 - 0.052$ o 0.948, esto es,

$$(1-v)^{12} = 0.948$$

$$\text{de donde } 1 - v = \sqrt[12]{0.948}$$

$$1 - v = 0.995559822 \qquad \text{o bien,} \qquad v = 0.004440178$$

Y esto se interpreta como el 0.444% mensual, aproximadamente, suponiendo, claro, que la tasa mensual se mantiene fija durante los meses del año.

c) Si con mil pesos al comenzar el año se compraban 10 kilogramos de frijol, digamos, al final se pueden comprar solamente 9.48 kilogramos. ¿Por qué? Por lo tanto, deberá cumplirse que $9.48 + (9.48)x = 10$, donde x es el incremento en el salario para recuperar el poder de adquisición original. Para despejar x, se factoriza el 9.48, se pasa dividiendo y al final se resta la unidad, es decir,

$$9.48(1+x) = 10$$

$$1 + x = 10/9.48$$

$$x = 0.054852321 \qquad \text{o bien} \qquad 5.485\%, \text{ aproximadamente}$$

Es importante señalar que siempre que cualquier cantidad se reduzca con una tasa fija, se puede proceder como en este ejemplo. Resolvamos otro para confirmar lo anterior.

Ejemplo 8

Reducción de la deuda externa del país

Si la deuda externa de un país se reduce anualmente un 2.75%, ¿cuánto se reduce en un periodo presidencial de 6 años?

solución

Se designa con D_0 la deuda original, es decir, la del primer año. Puesto que la deuda se reduce 2.75% en cada año, en el sexto será:

$$D_6 = (1 - 0.0275)^6 D_0$$

$$D_6 = (0.845936297)D_0$$

$$D_6 = (1 - 0.154063703)D_0 \text{ entonces,}$$

$$D_6 = D_0 - 0.154063703\, D_0$$

Esto quiere decir que se reduce 15.41%, aproximadamente, en el sexenio.

Note que también ahora la reducción total no es igual a la multiplicación de la anual por el número de años, sino menor. ¿Por qué?

Ejercicios 2.4

1. ¿De cuántos puntos porcentuales será la inflación anual si se considera uniforme del 0.5% mensual?

2. ¿De qué porcentaje será la pérdida del poder de compra de la moneda nacional en un sexenio si es del 1.7% trimestral y se considera constante?

*3. ¿Qué porcentaje de incremento deberá tener un empleado al final de un año en las condiciones del problema 2 para recuperar su poder de compra?

4. Si el precio de cada litro de gasolina aumenta 5 centavos por mes y en febrero fue de $10.08. ¿Cuánto costará en agosto del año siguiente?

5. ¿Cuánto costaba el litro de gasolina en abril del año anterior, cuando costaba 10.08, si se ha mantenido el mismo incremento mensual que en el problema 4?

6. Resuelva los problemas 4 y 5 suponiendo que el incremento mensual es del 0.4 por ciento.

*7. El primero de un total de 60 abonos mensuales que se hicieron para una hipoteca fue de $6,300 incluyendo intereses. ¿Cuánto se pagó en total si cada pago fue 1.3% mayor que el anterior?

8. ¿De cuánto fue el último abono en el problema 7 y de cuánto fue el vigésimo octavo?

9. ¿Cuál será el precio de un automóvil nuevo dentro de 4 años si ahora cuesta $255,000 y aumenta su precio en 5.2% anual?

10. ¿En cuánto se venderá 3 años después de comprar el automóvil del problema 9 si se devalúa un 5.4% cada cuatrimestre?

*11. Si se sabe que la inflación total en los primeros 4 meses del año fue del 1.75%, ¿cuál será la inflación acumulada al término de un año si se mantiene uniforme?

12. ¿Cuál es el total que un docente aportará en 21 años a su fondo de ahorro para el retiro si éstos corresponden al 2.18% de su salario que actualmente es de $45,000 anuales y se prevé que aumenta a razón del 4.35% anual?

13. ¿De qué porcentaje será la inflación mensual si es del 6.3% anual? Supóngase uniforme.

En los problemas 14 a 20 conteste verdadero o falso.

*14. Si Estela reduce su peso un 0.7% cada bimestre, entonces su peso varía de forma geomé - trica. __________

*15. Las utilidades anuales de unos de los empresarios más ricos del país se incrementan 3.2% en el primer año, 3.7% en el segundo y 4.2, 2.9, 3.9, y 4.8% respectivamente en los siguien tes 4, entonces en el sexenio crecerán la suma de los porcentajes, es decir, 22.7 por ciento. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

16. El porcentaje en el que se pierde el poder adquisitivo de la moneda cada semestre es del 0.8%, entonces el trianual es del 39.3645% aproximadamente. _________

17. El precio de un tractor nuevo aumenta 3.52% cada año, entonces en 4 años crece 3.52(4) = 14.08%. _________

18. Las reservas internacionales del país reportaron el 8 de octubre del 2010 US$108,384.9, US$110,445 el 18 de noviembre y US$112,995.7 2 meses después, entonces crecieron de forma geométrica. _________

***19.** La variación de la cotización de cada centenario se comporta de forma geométrica. _________

20. Si un traje se vende al público en $3,250 y éste creció un 2.7% semestral, entonces 3 semestres antes se ofrecía en $3,000.35. _________

En los problemas 21 a 35 seleccione la opción correcta justificando su elección.

21. La deuda externa del país fue de $1,750 millones ¿de cuánto será 3 años después si se reduce $8.5 millones cada mes?

a) 1,520 millones *b*) 1,495 millones *c*) 1,444 millones *d*) 1,265 millones *e*) Otra

22. El 8 de diciembre de 2010 el precio del petróleo mezcla mexicana fue de US$81.18 por barril. ¿Cuál será su precio el mismo día del año 2016 si aumenta uniformemente un 1.3% cada semestre?

a) $101.71 *b*) $105.49 *c*) $94.79 *d*) $93.28 *e*) Otra

23. ¿En cuánto se venderá una camioneta que se devalúa en 14.75% cada año si 4 años antes se compró en $275,000?

a) $163,289.00 *b*) $168,495.20 *c*) $145,248.03 *d*) $165,429.30 *e*) Otra

24. ¿Cuántos pesos por cada dólar se necesitarán el 21de junio de 2013 si el 3 de enero de 2011 se necesitaban $12.05 y la devaluación diaria del peso es de 0.0008% en promedio?

a) $15.758 *b*) $12.752 *c*) $13.051 *d*) $12.136 *e*) Otra

***25.** ¿Cuánto aportará a su administradora de fondos para el retiro (Afore), durante los 15 años siguientes, un empleado que ahora tiene un sueldo anual de $48,000, mismo que se incrementa en un 5.1% cada año en promedio? Considere que aporta el 1.13% de su salario.

a) $11,792.69 *b*) $13,521.58 *c*) $15,205.35 *d*) $10,629.38 *e*) Otra

***26.** ¿Cuántos pesos necesitará Laura para disponer de US$5,300 el 8 de julio para vacacionar, si el 8 de octubre anterior el dólar se cotizó en $12.30 y esta cotización crece a razón del 0.11% por mes?

a) $65,838.23 *b*) $80,093.25 *c*) $71,921.00 *d*) $75,967.27 *e*) Otra

27. Resuelva el problema 26 suponiendo que la cotización del dólar aumenta 4 centavos por mes.

a) $70,829.00 *b*) $67,098.00 *c*) $69,895.35 *d*) $69,265.30 *e*) Otra

28. Si el 10 de enero de 2011 las UDIS, Unidades de Inversión, se cotizaron en \$4.530129, ¿en cuánto se cotizarán el 15 de agosto siguiente suponiendo que su valor crece a razón de 110 millonésimas de pesos por día?

a) \$4.553889 *b*) \$4.562935 *c*) \$5.003214 *d*) \$4.605132 *e*) Otra

29. La producción de azúcar crece con una tasa del 1.3% cada semestre. ¿Cuántas toneladas se producirán en el segundo semestre de 2018, si en el primero de 2012 se produjeron 965 mil toneladas?

a) 1,236.4059 *b*) 989.3615 *c*) 1,141.4322 *d*) 1,087.2931 *e*) Otra

***30.** ¿De qué porcentaje será la inflación en un sexenio, si se considera uniforme del 0.8% bimestral?

a) 32.25721% *b*) 31.05679% *c*) 33.22298% *d*) 32.96931% *e*) Otra

***31.** El número de desempleados se redujo un 3.6% en un periodo anual. ¿En qué porcentaje se redujo cada quincena si se sostiene uniforme?

a) 0.13243% *b*) 0.15265% *c*) 0.16305% *d*) 0.18213% *e*) Otra

32. El 7 de octubre de 2010 la Bolsa Mexicana de Valores cerró en 34,257.81 puntos y el 3 de enero de 2011 en 38,243.10. ¿En cuántos puntos cerrará la Bolsa el 28 de mayo siguiente si se mantiene la misma tasa de incremento diario de forma geométrica?

a) 50,968.31 *b*) 43,297.43 *c*) 44,583.28 *d*) 45,846.24 *e*) Otra

33. Resuelva el problema 32 considerando que el incremento por día se sostiene de forma aritmética.

a) 44,839.44 *b*) 43,067.31 *c*) 44,809.77 *d*) 43,860.35 *e*) Otra

***34.** El 17 de noviembre de 2010 el centenario se cotizó a la venta en \$20,600 y el 3 de enero siguiente en \$21,500. Si se sostiene la tasa de incremento geométrico por día, ¿cuál sería la cotización el 7 de junio de 2011?

a) \$23,565.65 *b*) \$21,357.65 *c*) \$24,242.42 *d*) \$24,809.14 *e*) Otra

35. Resuelva el problema 34 suponiendo que el incremento en pesos por día se mantiene uniforme.

a) \$22,798.01 *b*) \$24,513.04 *c*) \$21,263.50 *d*) \$21,519.57 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo usted debe estar capacitado para:

- Definir los conceptos de *progresión, serie* y *término* de una sucesión.
- Distinguir las progresiones aritméticas y geométricas.
- Encontrar cualquier término de las progresiones aritméticas con la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- Obtener el enésimo término de las progresiones geométricas con la fórmula:

$$a_n = a_1(r^{n-1})$$

- Calcular la suma de los primeros n términos de las progresiones aritméticas. Con las fórmulas:

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n) \quad \text{o bien,} \quad S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$

- Hallar la suma de los primeros n términos de las progresiones geométricas con la fórmula:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad \text{o bien,} \quad S_n = a_1(n)$$

- Plantear y resolver problemas de aplicación en el área económico-administrativa y de nego - cios, utilizando sucesiones.

Conceptos importantes

Fórmulas para el enésimo término y la suma de los primeros términos de las series aritméticas y geométricas

Progresión aritmética

Progresión geométrica

Razón constante y diferencia común en las sucesiones

Sucesiones y series

Problemas propuestos para exámenes

1. ¿Cuál es la diferencia básica entre las *progresiones aritméticas* y las *geométricas*?

*2. ¿Por qué la progresión $-3, x-2, 10,\ldots$ no es geométrica?

3. Obtenga los primeros 3 términos de la progresión aritmética donde el décimo es 15 y el vigésimo quinto es -45.

*4. ¿Cuál es el quinto término de la sucesión $5,\ x, 45,\ldots$ suponiendo que es:

a) aritmética? *b*) geométrica?

5. ¿Cuánto suman los primeros 15 términos en las progresiones del ejemplo 4?

En los problemas 6 a 12 complete la frase, justificando su respuesta.

6. El sexto término de la progresión aritmética $-7, 3,\ldots$ es _________

7. La suma de los 25 primeros términos de la sucesión aritmética donde el primero es 40 y el vigésimo quinto es -40 es _________

*8. Obtenga la suma desde el décimo hasta el decimoquinto término de la progresión geométrica, 5, 12, 28.8,… _________

9. Si el primer término de una progresión geométrica es 50 y el quinto es 25/8, el término medio es _________

10. _________ es el cuarto término de la progresión geométrica donde $a_6 = 21$ y $r = -3$.

*11. La suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética representada por $a_n = 3n - 10$ es _________

12. La suma de los primeros 1,350 pares positivos es _________

En los problemas 13 a 24 diga si la sucesión es aritmética, geométrica o ninguna de las dos.

*13. La progresión dada por $a_n = n^2 - 3n$ es _________

14. La sucesión de los números positivos múltiplos de 5 es _________

15. Si $a_n = (-1)^n$ la sucesión es _________

16. Los números impares positivos forman una sucesión _________

*17. Si los términos de una sucesión están dados por $a_n = (1/3)^n$ entonces es _________

18. La progresión $-3, 39, 81,\ldots$ es _________

19. Si la suma de los primeros 5 términos de la progresión $4, 2,\ldots$ es igual a 31/4 entonces es _________

20. El vigésimo segundo término de la progresión $-10, -3,\ldots$ es igual a 137 entonces es ______

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

21. La progresión 1/2, 1/3, 1/4… es _________

22. La progresión 10, −10, 10,… es _________

***23.** La sucesión dada por $a_n = n^2/2 + 4$ es _________

24. La sucesión donde $a_2 = -10$, $a_5 = 10$ y $a_8 = 30$ es _________

En los problemas 25 a 44 seleccione la opción correcta justificando su elección.

25. Si la inflación en el primer semestre de 2011 fue del 5.3%, ¿cuál será el porcentaje de inflación en el segundo semestre del 2019 si crece a razón de 0.12 puntos porcentuales por semestre?

a) 5.61% *b*) 6.28% *c*) 7.34% *d*) 7.93% *e*) Otra

***26.** Si las utilidades de la Comercializadora del Bajío fueron de 7.5 millones de pesos en 2010 y de 7.65 millones en 2012, ¿de cuánto serán en 2018 si se mantiene el incremento anual de forma geométrica?

a) $8’665,329.08 *b*) $9’063,729.51 *c*) $8’118,241.21 *d*) $7’207,429.32 *e*) Otra

27. Resuelva el problema 26 si se considera que el incremento es aritmético.

a) $8’100,000 *b*) $8’294,000 *c*) $7’329,000 *d*) $7’800,000 *e*) Otra

28. Obtenga el término número 18 en la progresión aritmética −5, 8,…

a) 263 *b*) 302 *c*) 216 *d*) 225 *e*) Otra

***29.** El primer término de una sucesión geométrica es −3 y el décimo primero es 59,049, ¿cuál es el quinto?

a) 161.2931 *b*) 147.3258 *c*) 156.5877 *d*) No tiene solución *e*) Otra

30. Si el octavo y el decimoquinto término enuna sucesión geométrica son 7, ¿cuánto suman los primeros 35?

a) 2^{35} *b*) 245 *c*) 2^{34} *d*) 490 *e*) Otra

31. Es la suma de los primeros 15 términos de la sucesión aritmética −125, −75,…

a) −3,125 *b*) −3,375 *c*) 3,375 *d*) 3,600 *e*) Otra

32. La serie geométrica 1/81 + … + 81 consta de 9 términos, ¿cuál es el décimo?

a) 3 *b*) 1 *c*) 1/3 *d*) 5/81 *e*) Otra

***33.** Las utilidades anuales de una empresa del sector manufacturero fueron de 75 mil dólares y en el siguiente año fueron de $75,600, ¿en qué año las utilidades alcanzarán $80,576.10 anuales? Suponga que la variación anual es de forma geométrica.

a) en el octavo *b*) en el séptimo *c*) en el décimo *d*) en el noveno *e*) Otra

34. ¿En qué porcentaje disminuye el poder de compra de la moneda en un periodo de 3 años si se reduce 0.7% cada trimestre?

a) 8.3651% *b*) 7.965% *c*) 8.084% *d*) 8.4% *e*) Otra

***35.** En el problema 34, ¿de qué porcentaje deberá ser el incremento al final del año para recuperar el poder de compra inicial?

a) 8.7950204% *b*) 8.1832403% *c*) 9.3642135% *d*) 8.435463% *e*) Otra

36. El valor de x en la progresión aritmética $-27, x^2, 3, \ldots$ es:

a) $-1/3$ *b*) 3 *c*) $+1/3$ *d*) No tiene solución *e*) Otra

37. Las exportaciones de la industria del calzado en 2011 fueron de 750,000 pares y en 2009 habían sido de 680,272 pares de zapatos, ¿cuántos pares se exportarán en 2020 si se considera que el incremento anual es geométrico?

a) 875,578 *b*) 1'163,497 *c*) 963,241 *d*) 1'029,409 *e*) Otra

***38.** Resuelva el problema 28 suponiendo que el incremento geométrico es cuatrimestral y las cantidades corresponden al tercer cuatrimestre de 2011 y al primero de 2009 y la pregunta corresponde al tercero de 2020.

a) 869,429 *b*) 1'042,532 *c*) 963,428 *d*) 1'105,310 *e*) Otra

39. El licenciado Valdivia paga $900.00 por su membresía en un club deportivo y paga además $20.00 el primer mes para mantenimiento y servicio. ¿Cuánto pagará el cuadragésimo octavo mes, si la cuota mensual crece $5.00 cada mes?

a) $305 *b*) $285 *c*) $255 *d*) $325 *e*) Otra

40. Resuelva el problema 39 si la cuota mensual crece 5% cada mes con respecto al anterior, claro.

a) $198.12 *b*) $203.75 *c*) $225.35 *d*) $256.08 *e*) Otra

41. En el problema 39, ¿cuánto dinero se habrá ahorrado el licenciado en los 4 años si no se inscribe en el club?

a) $7,100 *b*) $8,250 *c*) $6,600 *d*) $7,500 *e*) Otra

***42.** La capacidad de producción de una fábrica de dulces es de 175 toneladas, ¿en qué año se alcanzará tal producción si crece 6.3% cada año y en el primero se produjeron 95 toneladas?

a) 10° *b*) 11° *c*) 8° *d*) 12° *e*) Otra

43. Patricia deposita en su cuenta bancaria $650 y decide continuar con depósitos quincenales que incrementa en $20 cada vez hasta completar los $22,900. ¿Con cuántos pagos lo logrará?

a) 25 *b*) 26 *c*) 28 *d*) 30 *e*) Otra

44. Resuelva el problema 43 considerando que el incremento en los pagos quincenales es del 2.96 por ciento.

a) 30 *b*) 18 *c*) 25 *d*) 24 *e*) Otra



Capítulo 3

Interés y descuento simple

Contenido de la unidad

3.1 Algunas definiciones

Luego de un breve repaso de algunos conceptos básicos en los primeros 2 capítulos, propiamente aquí comenzamos con el estudio de las matemáticas financieras, un área importante de la matemática aplicada, en la que se analizan los elementos y la metodología para trasladar, en el tiempo y de manera simbólica, pero que refleja la situación de la vida real, los capitales que intervienen en cualquier operación de índole financiera y comercial. Como en los otros, al final de este capítulo se incluyen interesantes ejemplos de aplicación, relacionados con la temática que aquí se aborda; sin embargo, antes veremos algunos conceptos y definiciones importantes.

Definición 3.1

Interés es el pago por el uso del dinero ajeno, se denota con I.

Otras formas de conceptualizar los intereses o réditos son:

- El cambio en el valor del dinero con el paso del tiempo.
- El dinero que produce un capital al prestarlo o invertirlo para que otros lo usen sin ser de su propiedad. Por ejemplo, si usted consigue un préstamo bancario, estará utilizando un dinero que no es suyo sino del banco. También si invierte un capital en un banco, entonces el banco le pagará intereses por usar el dinero de usted.
- Es el precio que tiene el dinero como cualquier otro bien; es el pago por la adquisición de bienes y servicios en operaciones de crédito, etcétera.

Numéricamente hablando, los intereses son la diferencia entre 2 cantidades: el capital y el monto.

Definición 3.2

Si al transcurrir el tiempo una cantidad de dinero, C, se incrementa hasta otra, M, entonces el interés es $I = M - C$, donde C es el **capital**, y M el **monto** del capital.

Dependiendo del caso y de las circunstancias, el *capital* también tiene el nombre de *principal, valor presente* o *valor actual.* De igual manera, algunos sinónimos del *monto del capital* son *valor futuro, montante, valor acumulado* o simplemente *monto.*

Definición 3.3

Al número de días u otras unidades de tiempo que transcurren entre las fechas inicial y final en una operación financiera se le llama **plazo** o **tiempo**.

En la figura 3.1 se ilustran estos conceptos.

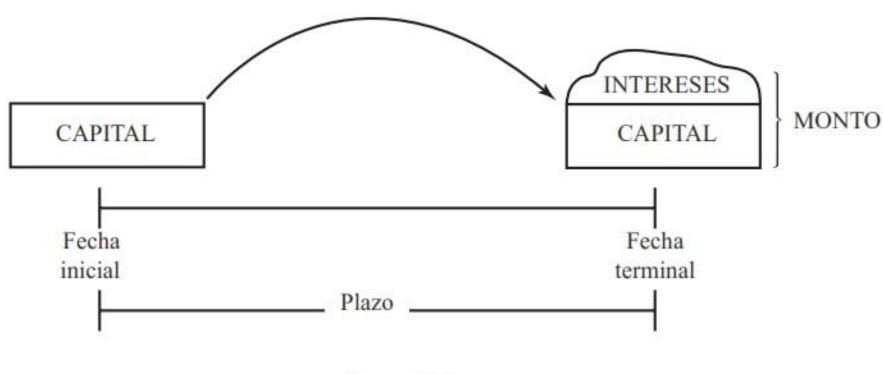


FIGURA 3.1

Desde este punto de vista, el monto siempre es mayor que el capital y se ubica en un tiempo futuro respecto del capital.

Definición 3.4

La razón entre el interés I y el capital C por unidad de tiempo se llama **tasa de interés**, por lo tanto:

$$i = I/C$$

Gracias a la estabilidad económica que actualmente se vive en el país, las tasas de interés son relativamente bajas, muy por debajo de las que se tuvieron en épocas anteriores, cuando a la par que la inflación, llegaron a porcentajes aun mayores del 100% anual. No obstante, a pesar de lo anterior, estas tasas son variables y se determinan sumando puntos porcentuales a las **tasas de referencia** siguientes:

a) La *tasa líder*, de rendimiento, con que se ofrecen los Certificados de la Tesorería de la Federación, CETES, a 28 días de plazo en su colocación primaria.

b) El CPP, o costo porcentual promedio de captación.

c) La TIIE o tasa de interés interbancaria de equilibrio.

Éstas varían con lapsos diferentes y su nuevo valor se publica en el *Diario Oficial de la Federación*; por ejemplo, la TIIE se publica a diario, ya que cotidianamente se determina por las cotizaciones que algunos bancos presentan al Banco de México. El CPP, por otro lado, es una tasa que el mismo banco estima de acuerdo con los saldos de captación bancaria en un periodo mensual, para aplicarse en el siguiente mes.

Si la tasa de interés se multiplica por 100 se obtiene la tasa de interés en porcentaje. De esta manera, la tasa de interés es el valor de una unidad monetaria en el tiempo. Si está en porciento será el valor de 100 unidades monetarias en el tiempo.

Cuando la tasa de interés se expresa en porcentaje se le llama *tipo* de interés, y al valor correspondiente expresado en decimales, el que se emplea para las operaciones, se denomina como *tasa* de interés, pero en la práctica es al primero al que le llaman *tasa de interés*.

Ejemplo 1

Intereses, capital, monto, tasa de interés, plazo y tipo de interés

La licenciada Adriana invierte \$4,000 y al término de un año recibe \$4,500 por su inversión. El valor presente es $C = \$4{,}000$, el monto es $M = \$4{,}500$ y los intereses son la diferencia de M y C:

$$I = 4{,}500 - 4{,}000$$
$$I = \$500$$

La tasa de interés es $i = 500/4{,}000 = 0.125$. El *tipo* de interés es, por lo tanto, $0.125(100) = 12.5\%$ anual, y el plazo es de un año.

Interés simple e interés compuesto

Las 2 clases de interés que más comúnmente se utilizan son el interés *simple* y el *compuesto*.

Definición 3.5

El interés es **simple** cuando sólo el capital gana intereses y es **compuesto** si a intervalos de tiempo preestablecidos, el interés vencido se agrega al capital. Por lo que éste también genera intereses.

Suponga que hace una inversión a plazo fijo. Si al final retira el capital y los intereses, entonces estará ganando un interés simple; sin embargo, si no hace retiro alguno, entonces los intereses, al término del plazo fijo, se suman al capital y a partir del segundo periodo ganarán intereses, puesto que ya forman parte integral de dicho capital y en tales condiciones la inversión estará devengando con interés compuesto.

Cabe señalar que es práctica común que al final de un periodo se retiren sólo los intereses, por lo que en ese caso se estará ganando un interés simple.

3.2 Interés simple

En la sección anterior se dijo que la tasa de interés por unidad de tiempo es $i = I/C$. Si se despeja I multiplicando los 2 miembros de la ecuación por C, se obtienen los intereses:

$$I = Ci$$

Pero si el plazo no es la unidad sino cualquier otro valor, digamos n periodos, entonces los intereses serán:

$$I = Cin$$

Es decir, que son proporcionales al capital, al plazo y a la tasa de interés, lo cual se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 3.1

Los **intereses** que produce un capital C con una tasa de interés simple anual i durante n años están dados por:

$$I = Cin$$

Ejemplo 1

Tasa de interés simple en un préstamo

¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si con \$56,385 se liquida un préstamo de \$45,000 en un plazo de 6 meses?

solución

Los intereses son la diferencia entre el monto y el capital prestado.

$$I = 51{,}885 - 45{,}000 \qquad I = M - C$$

o bien, $I = \$6{,}885.00$

El plazo en años es $n = 1/2$, que equivale a un semestre. La tasa anual, i, se despeja de la ecuación siguiente que resultó de sustituir los valores anteriores en $I = Cin$.

$$6{,}885 = 45{,}000(i)(1/2)$$

de donde, $6{,}885(2)/45{,}000 = i$

$$i = 0.306 \quad \text{o bien,} \quad 30.6\% \text{ anual.}$$

Advertencia

- Cabe decir que cuando alguien pide dinero prestado las tasas de interés son relativamente altas, por ejemplo, la tasa que se paga por el uso de tarjeta de crédito puede llegar actualmente hasta un 60 o 70% anual, en cambio, cuando se invierten capitales las tasas con las que se gana, pocas veces rebasan el 10% de las anteriores.

- La unidad de tiempo para la tasa de interés puede no ser anual, sino mensual, diaria, trimestral o de cualquier otra unidad de tiempo. Sin embargo, en cualquier caso es importante hacer coincidirla con las unidades de tiempo del plazo; por ejemplo, si la tasa de interés es semanal entonces el plazo debe expresarse y manejarse en semanas.
- Si no se dice otra cosa con respecto a la tasa de interés, ésta se considerará como *simple anual*. Por ejemplo, al decir una tasa del 11.5% se sobreentenderá como 11.5% simple anual, al menos así se considera en este libro.
- Recuerde, además, que para las operaciones la tasa dada debe dividirse entre 100, recorriendo el punto decimal 2 lugares hacia la izquierda y, lo más importante, debemos en todo caso aclarar la forma en que se están tratando las tasas de interés de cualquier operación financiera o comercial, ya que de no hacerlo podrían suscitarse ciertos problemas entre las partes que intervienen en tales operaciones. Veremos que, una tasa del 13% arroja diferentes resultados si es simple, compuesta por meses o compuesta por semestres, por ejemplo, aunque en todo caso es una tasa anualizada.

Fórmula del interés simple

Anteriormente se mencionó que los intereses son la diferencia entre el monto y el capital:

$$I = M - C$$

Si pasamos sumando la C al lado izquierdo, se despeja M.

$M = C + I$ porque $I = Cin$

$M = C + Cin,$

$M = C(1 + in),$ ya que se factoriza C

Teorema 3.2

El ***valor acumulado*** M de un capital C que devenga intereses con la tasa de interés simple anual, i, al final de n periodos anuales es:

$$M = C(1 + in)$$

Ésta se conoce como fórmula del interés simple.

Es muy importante insistir en que si la tasa de interés no es anual, entonces es necesario que tanto la tasa como el plazo estén en las mismas unidades de tiempo.

Ejemplo 2

Monto acumulado en cuenta bancaria

¿Cuánto acumula en 2 años en su cuenta bancaria el señor Morales, si invierte $28,000 ganando intereses del 7.3% simple anual?

solución

Los valores a sustituir en la ecuación 3.2 son:

C = \$28,000, el capital
n = 2, el plazo en años
i = 0.073, la tasa de interés simple anual

M es la incógnita, entonces,

$$M = 28{,}000[1 + 0.073(2)]$$
$$M = 28{,}000(1.146)$$
$$M = \$32{,}088$$

Recuerde que de esta fórmula, o de cualquier otra, puede determinarse una de las variables que en ella aparecen. Para despejar una cualquiera, es recomendable hacerlo hasta después de haber reemplazado los valores que son conocidos, es decir, los datos.

Ejemplo 3

Plazo en que una inversión crece un porcentaje dado

¿En cuánto tiempo crece un 24% un capital que se invierte con el 6.3% de interés simple anual?

solución

Si C es el capital que se invierte, entonces el monto M debe ser un 24% mayor, esto es $M = C + 0.24C$ o bien, $M = 1.24C$ por lo que al sustituir en la ecuación del teorema 3.2 resulta:

$$1.24C = C(1 + 0.063(n)) \qquad M = C(1 + in)$$

Al pasar una C al otro lado de la ecuación, se anula. Después se pasa restando el 1 a la izquierda y el coeficiente de n, 0.063, se pasa dividiendo, es decir,

$$1.24 - 1 = 0.063n$$
$$0.24/0.063 = n \qquad \text{o bien,} \qquad n = 3.80952381 \text{ años}$$

y son años porque la tasa de interés es anual.

Conversión de años en años con meses y días

Para expresar este plazo en años, meses y días, primero la parte decimal se multiplica por 12, que son los meses que tiene un año

$$0.80952381(12) = 9.71428572$$

Esto significa que 0.80952381 años, son equivalentes a 9.71428572 meses. Ahora bien, la parte fraccionaria de este número se multiplica por el número de días, 30, contenidos en un mes

$$0.71428572(30) = 21.4285716$$

que se redondea a 21 y por eso el plazo queda como: 3 años, 9 meses y 21 días.

Note que:

a) El plazo puede expresarse hasta en horas, mediante la multiplicación de la fracción por 24. Por lo que esto pudiera continuar sucesivamente.

b) En el resultado no tiene importancia el tamaño del capital que se invierta, C, puesto que se eliminó desde el primer paso en el desarrollo anterior, lo cual quiere decir que cualquier capital se duplicará en este plazo a una tasa del 13% simple anual.

Ejemplo 4

Precio de un bien con interés simple, TIIE

¿Cuál es el precio de un televisor que se paga con un anticipo del 30% y un documento a 3 meses con valor nominal de $3,600? Suponga que la tasa de interés es igual a la TIIE más 9 puntos porcentuales y que el día de la compra la TIIE fue de 4.8%.

solución

Primero se encuentra el valor presente de los $3,600 sustituyendo la tasa $i = 0.048 + 0.09 = 0.138$ en la fórmula del interés simple y los demás valores:

M por $3,600, el valor futuro del crédito, y n por 3/12 o 0.25 años, que es el plazo. La ecuación queda así:

$$3{,}600 = C[1 + 0.138\,(0.25)] \qquad M = C(1 + in)$$

$$3{,}600 = C(1.0345)$$

De donde el valor presente del documento es:

$$C = 3{,}600/1.0345 \qquad \text{o bien,} \qquad C = \$3{,}479.94$$

Puesto que el anticipo fue del 30%, este resultado corresponde al 70% del precio del televisor y por eso:

$$(0.70)\ \text{Precio} = 3{,}479.94$$

de donde:

$$\text{Precio} = 3{,}479.94/0.70 \qquad \text{o bien,} \qquad \$4{,}971.35$$

Ejemplo 5

Tasa de interés simple

¿Con qué tasa de interés simple se realizó una operación crediticia que se liquidó con un pago a los 10 meses con $42,350, suponiendo que el crédito fue por $37,644.44?

solución

Los valores a sustituir en la fórmula del interés simple son:

$M = 42{,}350$, el valor futuro del crédito
$C = 37{,}644.44$, el valor presente, es decir, el valor del crédito
$n = 10$ meses, el plazo o $n = 10/12$ años
$i =$ la tasa de interés simple anual es la incógnita

Entonces,

$$42{,}350 = 37{,}644.44[1 + (10/12)i] \qquad M = C(1 + ni)$$

Para despejar la incógnita i, el 37,644.44 pasa dividiendo al lado izquierdo, el 1 pasa restando y el coeficiente de i, 10/12, pasa dividiendo; esto es:

$$42{,}350/37{,}644.44 = 1 + (10/12)i$$
$$1.125 - 1 = (10/12)i$$
$$0.125 = (10/12)i$$

de donde $i = 0.125/(10/12)$, $i = 0.15$ o bien, 15% simple anual, redondeando.

Ejercicios 3.2

1. Explique brevemente los conceptos de *interés, monto, valor presente* y *plazo* en operaciones financieras.
2. ¿Qué diferencia hay entre *tasa* de interés y *tipo* de interés?
3. ¿Cuál es la diferencia entre interés simple e interés compuesto?
4. ¿Qué es mayor, el capital o el monto del capital?
5. ¿Qué está primero en el tiempo, el capital o el monto?
6. ¿Cuál es el capital que produce $4,350 de intereses en 9 meses al 5.8% simple anual?

*7. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital que se presta con el 21.3% simple anual?

8. ¿Con cuánto dinero se cancela un préstamo de $12,000, 7 meses después, si se cargan intereses el 13.2% simple anual?
9. ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual si en 13 meses un capital de $45,000 genera $4,500 por concepto de intereses?
10. Diga qué es más productivo, ¿invertir con el 0.69% de interés simple mensual o con el 8.28% simple anual?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***11.** ¿Qué cantidad de dinero se recibió en préstamo el día 13 de marzo si se liquidó con $16,869.04 el 25 de septiembre siguiente? Suponga cargos del 19.5% simple anual.

12. ¿Qué tasa de interés simple anual se está cargando en un crédito de US$6,750 que 200 días después se paga con US$7,110?

13. En la tabla siguiente se dan algunos valores, obtenga el que falta considerando interés simple.

	Capital	Monto	Plazo (*n*)	Tipo de interés
1	25,000	26,750	10 meses	–
2	–	13,200	15 meses	8.4% anual
3	37,200	–	1.5 años	15.3% anual
4	125,000	136,250	20 meses	–
5	4,520	4,662.38	–	5.4% anual
6	63,000	–	9 meses	0.7% anual

En los problemas 14 a 19 conteste verdadero o falso y justifique su respuesta.

***14.** Prestar un capital al 7.8% simple anual es más redituable que invertirlo con el 0.15% simple semanal. ________

15. Los intereses que genera un capital de $53,250 en 10 meses con el 11.4% simple anual son $5,058.75. ________

16. El 7 de febrero se consiguió un crédito de $25,350 que se canceló con $26,780.35 el 17 de julio, considerando interés del 9.9% simple anual. ________

17. Un capital de $17,250 que se presta con el 27.3% de interés simple anual genera $3,139.50 de utilidades en 8 meses. ________

18. El 28 de enero vence un documento con valor nominal de $14,204.25 que ampara un crédito por $13,275 recibido el 10 de septiembre anterior con interés del 0.05% simple diario. ________

***19.** Es más conveniente para un inversionista adquirir Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) que pagan el 0.38% de interés simple por periodo de 28 días, que invertir su dinero en una cuenta que bonifica el 4.75% simple anual. ________

En los problemas 20 a 33 seleccione la opción correcta justificando su elección.

20. ¿Cuánto debe invertirse ahora al 6.3% simple anual para disponer de $56,830.90, 13 meses después?

a) $49,973.60 *b*) $53,200.00 *c*) $51,928.00 *d*) $54,098.35 *e*) Otra

21. ¿Qué día vence un documento que ampara un préstamo por $18,300 conseguido el 3 de febrero anterior? Suponga intereses del 36% simple anual y su valor nominal es $20,038.50.

a) Junio 25 *b*) Abril 30 *c*) Mayo 9 *d*) Junio 1° *e*) Otra

22. ¿Con qué tasa de interés simple anual se tendrán $24,086 el 5 de julio próximo si ahora, 20 de diciembre, se invierten $23,350.00?

a) 4.98% *b*) 5.36% *c*) 5.08% *d*) 5.76% *e*) Otra

23. En el problema 22, ¿cuánto se tendrá en la cuenta el 14 de octubre siguiente?

a) $25,093.72 *b*) $24,463.34 *c*) $24,809.3 *d*) $24,625.35 *e*) Otra

***24.** ¿Cuánto recibe por concepto de intereses el licenciado Godínez si el 10 de junio le dan $84,620.00 por un capital que depositó el 3 de febrero anterior, con intereses del 6.24% simple anual?

a) $1,822.65 *b*) $1,976.60 *c*) $2056.08 *d*) $2,129.35 *e*) Otra

***25.** Lupita deposita $26,500 en una cuenta que le bonifica el 5.1% de interés simple anual, 4 meses después retira el 40% de lo que tiene en su cuenta y 3 meses más tarde el resto. ¿Cuánto le dieron por concepto de intereses?

a) $690.25 *b*) $598.73 *c*) $656.67 *d*) $720.30 *e*) Otra

26. ¿Qué conviene más a un inversionista, abrir una cuenta bancaria que le ofrece el 6.9% de interés simple mensual o comprar centenarios cuyo valor crece con una tasa del 0.15% por semana? Considere 6 meses de plazo.

a) Cuenta bancaria

b) Centenarios

c) Prestar su dinero con el 0.54% simple mensual

d) Es indiferente

e) Otra

***27.** ¿De cuánto es cada uno de 3 pagos mensuales iguales que cancelan un crédito de $48,700 con intereses del 16.2% simple anual?

a) $16,669.71 *b*) $16,021.35 *c*) $18,424.39 *d*) $15,725.09 *e*) Otra

***28.** Resuelva el problema 27 considerando que los pagos se hacen a 2, 3 y 5 meses de que se logró el crédito.

a) $16,473.08 *b*) $16,527.32 *c*) $16,959.44 *d*) $17,123.23 *e*) Otra

29. El profesor Gutiérrez deposita en junio su prima vacacional de $17,450 en un banco que le bonifica el 5.44% simple anual, ¿cuánto puede retirar en el mes de diciembre?

a) $17,924.64 *b*) $18,625.30 *c*) $17,529.08 *d*) $18,123.32 *e*) Otra

***30.** Al jubilarse un empleado recibe $65,000 en su finiquito, el 40% lo deposita en un banco que genera intereses del 6.69% simple anual y con el 35% compra plata cuyo valor crece a razón del 1.7% por bimestre. ¿Cuánto tuvo de utilidades en 3 años de plazo?

a) $12,729.65 *b*) $12,968.85 *c*) $13,282.94 *d*) $13,605.32 *e*) Otra

31. En el problema 30, ¿cuál de las 2 inversiones le produjo más utilidades y de cuánto fueron éstas?

a) $5,928.20 segunda

b) $8,064.74 segunda

c) $6,929.31 primera

d) $7,429.61 segunda

e) Otra

32. ¿Qué día se prestaron $45,000 con intereses del 18.9% simple anual si el 5 de octubre se regresaron $48,543.75 dejando la deuda en ceros, claro?

a) Junio 18 *b*) Mayo 29 *c*) Mayo 8 *d*) Junio 3 *e*) Otra

33. ¿En cuánto tiempo un capital de $15,600 genera $670.80 por concepto de interés del 7.2% simple anual?

a) 209 días *b*) 215 días *c*) 198 días *d*) 235 días *e*) Otra

3.3 Diagramas de tiempo

Para plantear y resolver situaciones en las que interviene un número relativamente grande de cantidades y fechas —por ejemplo, cuando un conjunto de obligaciones que deudores y acreedores contrajeron con anterioridad se reemplaza por otro que es equivalente, pero con otros tiempos y otras cantidades—, se utilizan gráficas que se conocen como *diagramas de tiempo.* Éstos consisten en una simple línea recta en la que se anotan los valores, los montos, los capitales, las fechas y los plazos del problema a resolver. Además se pueden agregar flechas para indicar el sentido y la distancia en el tiempo en el que las cantidades de dinero se desplazan de manera simbólica

Algunas veces, cuando los periodos son iguales, en el tema de anualidades, por ejemplo, en lugar de la recta se utilizan rectángulos que representan los periodos. En todo caso, es preciso señalar que un diagrama de tiempo o temporal sirve para ilustrar cantidades en el tiempo.

En los siguientes ejemplos se muestra lo anterior.

Ejemplo 1

Inversión con interés simple para montos preestablecidos



¿Cuánto deberá invertirse al 5.1% simple anual el 15 de febrero, para disponer de $7,000 el 9 de mayo, de $15,500 el 20 de junio, y de $10,000 el 23 de diciembre?

solución

En la figura 3.2 está el diagrama de tiempo con las 4 fechas, las cantidades de dinero y el número de días entre 2 fechas sucesivas. Las flechas indican que las 3 cantidades, montos, se desplazan hasta el 15 de febrero.

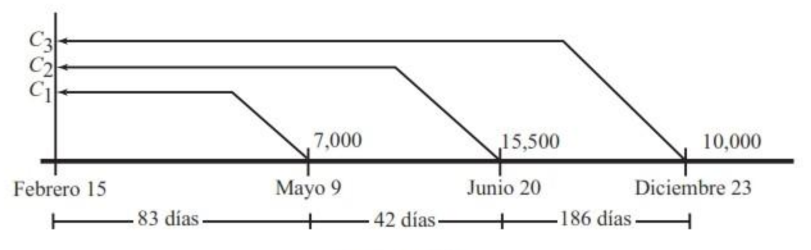


FIGURA 3.2

Los plazos se obtienen con un calendario a la vista, con la tabla del apéndice B o de la siguiente forma, donde se requiere saber cuántos días tiene cada mes; por ejemplo, como se observa en la lista, entre el 20 de junio y el 23 de diciembre, se tienen 186 días.

junio	10 (30 − 20)
julio	31
agosto	31
septiembre	30
octubre	31
noviembre	30
diciembre	23
TOTAL:	186 días

Los otros 2 plazos se calculan de igual manera.

El procedimiento consiste en quitar los intereses a los 3 montos, para luego sumar los 3 capitales, y obtener así el capital a invertir el 15 de febrero. Para esto se usa la fórmula del interés simple.

$$M = C(1 + in)$$

de donde, al pasar dividiendo $(1 + in)$ queda:

$$C = M/(1 + in) \text{ o } C = M(1 + in)^{-1} \qquad \text{ya que } a/b = ab^{-1}$$

El primer capital es:

$$C_1 = 7{,}000[1 + 0.051(83/360)]^{-1} \qquad C = M(1 + in)^{-1}$$
$$C_1 = 7{,}000(1.011758333)^{-1}$$
$$C_1 = 7{,}000(0.988378319) \text{ o bien, } C_1 = \$6{,}918.65$$

Para el segundo, el plazo es de 125 días y el monto es de \$15,500, y por eso:

$$C_2 = 15{,}500[1 + 0.051(125/360)]^{-1}$$
$$C_2 = 15{,}500(0.982599796) \text{ o bien,}$$
$$C_2 = \$15{,}230.30$$

El plazo para el último es de 311 días y el monto es de \$10,000, entonces:

$$C_3 = 10{,}000[1 + 0.051(311/360)]^{-1}$$
$$C_3 = 10{,}000(0.95780089) \text{ o bien,}$$
$$C_3 = \$9{,}578.01$$

El capital que debe invertirse el 15 de febrero es, entonces,

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \text{ o bien, } C = \$31{,}726.96$$

Ejemplo 2

Diagramas de tiempo

El 11 de marzo Adriana depositó \$30,000 en una cuenta que devenga intereses del 6.24% simple anual. El 15 de diciembre anterior había depositado otros \$45,000, pero el 28 de enero retiró \$39,000. ¿Cuánto podrá retirar el 9 de mayo? ¿Cuánto ganó por intereses?

solución

a) Un diagrama de tiempos es el de la figura 3.3, donde se marcan las fechas, los plazos y las cantidades de dinero en miles de pesos, los depósitos por encima y los retiros por debajo.

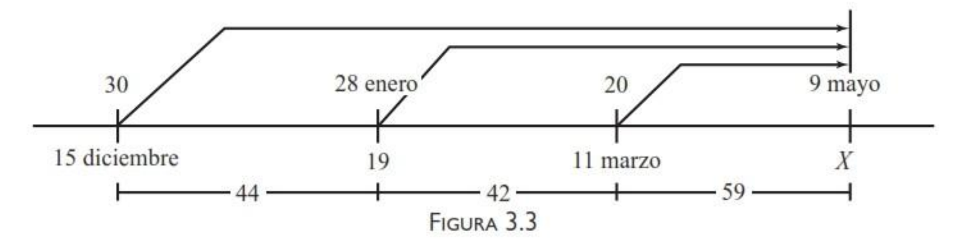


FIGURA 3.3

De las 3 cantidades se obtiene el monto al 9 de mayo, al primer depósito, porque el plazo es de 145 días, corresponde:

$$M_1 = 45{,}000(1 + (0.0624/360)145) \quad M = C(1 + in)$$

$$M_1 = 45{,}000(1.0251\bar{3}) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = 46{,}131.00$$

Al segundo depósito con 59 días de plazo, corresponde:

$$M_2 = 30{,}000(1 + (0.0624/360)59)$$

$$= 30{,}000(1.010226667) \quad \text{o bien,} \quad M_2 = 30{,}306.80$$

y la suma de los 2 al 9 de mayo es:

$$M = M_1 + M_2 = 76{,}437.80$$

El valor futuro del retiro con plazo de 101 días es:

$$M_3 = 39{,}000(1 + (0.0624/360)101)$$

$$= 39{,}000(1.017506667) \quad \text{o bien,} \quad M_3 = 39{,}682.76$$

La diferencia entre este resultado y M es lo que Adriana podrá retirar el 9 de mayo, es decir,

$$x = 76{,}437.80 - 39{,}682.76 \quad \text{o bien,} \quad x = \$36{,}755.04$$

b) Los intereses son la diferencia entre las 2 disposiciones y los 2 depósitos en la cuenta, es decir:

$$I = 39{,}000 + 36{,}755.04 - (30{,}000 + 45{,}000) \quad \text{o bien,} \quad I = \$755.04$$

Ejemplo 3

Inversión en cuenta de ahorros y adquiriendo centenarios

El 40% de su indemnización la deposita el señor González en una cuenta de ahorros que le bonifica el 13.2% simple anual y con el resto, $45,000, compra centenarios. Siete meses después retira su dinero del banco y adquiere más centenarios. ¿Cuánto valen sus monedas un año y medio después de su retiro laboral, considerando que su valor se incrementa un 1.05% mensual en promedio? ¿A cuánto ascienden las utilidades para el señor González?

solución

a) En la figura 3.4, se localizan las cantidades en miles de pesos y los plazos.

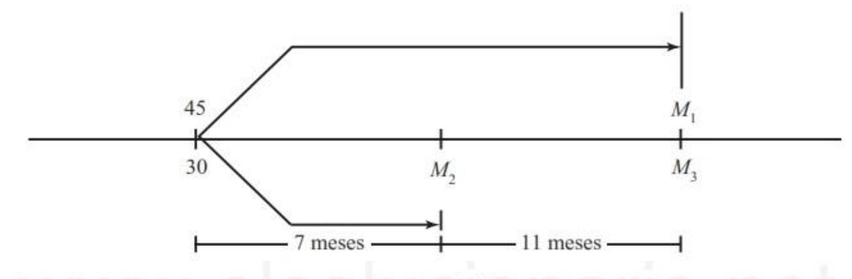


FIGURA 3.4

Primero se encuentra el valor futuro de los centenarios, considerando que aumentan su valor de forma geométrica con razón $r = 1.0105$. El primer término es 45,000 y, por lo tanto, el último es:

$$M_1 = 45{,}000(1.0105)^{18} \qquad a_{19} = M_1 \quad \text{y} \quad a_{19} = a_1(r)^{18}$$

$$M_1 = 45{,}000(1.206851185)$$

o bien, $M_1 = 54{,}308.30$, redondeando.

Por otro lado, si C es el capital que percibe el señor González, en su indemnización entonces el 60% de C es lo que destinó a comprar centenarios, es decir,

$$0.60C = 45{,}000$$

de donde:

$$C = 45{,}000/0.60 \text{ o bien, } C = \$75{,}000$$

que es lo que le dieron al indemnizarlo, y el 40% fue a la cuenta de ahorros.

$$0.40(75{,}000) = 30{,}000$$

lo cual, al final de 7 meses con los intereses, crece hasta:

$$M_2 = 30{,}000[1 + (0.132/12)7] \qquad M = C(1 + in)$$

$$M_2 = 30{,}000(1.077) \qquad \text{o bien,} \qquad M_2 = 32{,}310$$

Once meses después el valor de los centenarios que ahora se adquieren es:

$$M_3 = 32{,}310(1.0105)^{11}$$

$$M_3 = 32{,}310(1.121758829) \qquad \text{o bien,} \qquad M_3 = 36{,}244.03$$

El valor de los centenarios al final de los 18 meses es, entonces,

$$M = 54{,}308.00 + 36{,}244.03 \qquad M = M_1 + M_3$$

o bien, $M = \$90{,}552.33$

b) Las utilidades son la diferencia entre este resultado y lo recibido con la indemnización, es decir,

$$U = 90{,}552.33 - 75{,}000$$

o bien, $U = \$15{,}552.33$

Ejemplo 4

Capital, monto e intereses

El 15 de noviembre un comerciante compró mercancía que liquidó con un 35% de contado, un pago por \$32,050, que corresponde al 40% el día 3 de marzo, y otro por el resto el día 22 de abril. Considerando cargos del 16.8% anual determinar:

a) El valor de la mercancía el día de la compra.
b) El monto que se paga al 22 de abril.
c) El costo, es decir, los intereses por no pagar de contado.

solución

a) En la figura 3.5 se aprecian las cantidades, los plazos y las fechas, C es el valor de la mercancía y X el último pago.

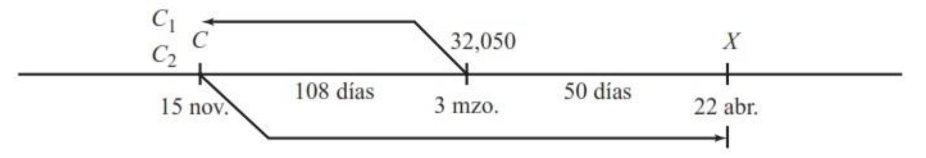


FIGURA 3.5

El valor presente del segundo pago es:

$$C_1 = 32{,}050[1 + (0.168/360)108]^{-1} \qquad C = M(1 + in)^{-1}$$

$$C_1 = 32{,}050(0.952018279)$$

o bien, $C_1 = 30{,}512.19$

Puesto que esto corresponde al 40% del valor de la mercancía, C, se cumple que

$$0.40C = 30{,}512.19 \text{ de donde}$$

$$C = 30{,}512.19/0.40 \quad \text{o bien,} \quad C = \$76{,}280.48$$

b) El 25% de este valor, es el valor presente del último pago,

$$C_2 = 0.25(76{,}280.48) \qquad \text{25\% es lo que resta}$$

o bien, $C_2 = 19{,}070.12$

Y el valor futuro, puesto que el plazo es de 158 días, es:

$$X = 19{,}070.12[1 + (0.168/360)158]$$
$$X = 19{,}070.12(1.07373333) \text{ o bien, } X = 20{,}476.22$$

c) Los intereses son la diferencia entre el total pagado, sin contar el anticipo, y el 65% del valor de la mercancía porque el anticipo fue del 35%, esto es,

$$I = 32{,}050 + 20{,}476.22 - 0.65(76{,}280.48)$$
$$I = 52{,}526.22 - 49{,}582.31$$

o bien, $I = \$2{,}943.91$

Note que $C_1 + C_2$ + anticipo = valor de la mercancía.

Ejercicios 3.3

Haga un diagrama de tiempo en los siguientes problemas ya que puede ayudarle.

1. Se compra mercancía en abarrotes con valor de $73,250 para pagarse con $25,000 a los 3 meses, y otro pago a 5 meses de la compra. ¿De cuánto es este pago si se cargan intereses del 9.6% simple anual?

2. El primero de febrero Rosa María deposita $19,500 en una cuenta que le reditúa el 5.7% de interés simple mensual. ¿De cuánto dinero puede disponer el primer día de septiembre si el 1° de abril había retirado $6,500 de su cuenta?

***3.** Se compra una camioneta con un anticipo del 25%, un pago a los 3 meses que corresponde al 35% del precio, y otro 5 meses del anterior por $185,000. Suponiendo intereses del 15.6% simple anual, determine:

a) El precio de contado del vehículo.

b) El tamaño del pago a los 3 meses.

c) El costo por no pagar de contado, es decir, los intereses.

4. Al vender su residencia el abogado Hinojosa compra un departamento y deposita el resto en una cuenta que le bonifica el 8.4% de interés simple anual. ¿Cuánto le dieron por su casa si en 5 años la cuenta le redituó $243,600 por concepto de intereses y cuánto dinero invirtió en el departamento, suponiendo que fue el 53.6%?

5. Claudia pretende acumular $35,000 y para eso 6 meses antes abre una cuenta con $7,500, ganando intereses del 6.63% simple anual. Dos meses después deposita otros $10,300. ¿Cuánto deberá depositar 3 meses después de la apertura para lograr su objetivo?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***6.** Juan Antonio compra un camión para transportar su cosecha de caña, lo liquida con un anticipo del 40%, un abono a los 3 meses por $650,000 y otro por $825,000 5 meses después. Poco antes de efectuar el primer abono decide con su acreedor cambiar los 2 compromisos por 4 mensuales haciendo el primero a los 3 meses de la compra. ¿Por qué cantidad son estos pagos suponiendo que le cargan el 18.6% de interés simple anual y:

a) Los 4 son iguales?

b) Cada uno es 18% mayor que el anterior?

c) El último es igual a la suma de los primeros 3 que son iguales?

7. Obtenga los intereses en los casos *a*) y *c*) del problema 6.

***8.** ¿Cuánto tendrá Lupita en su cuenta bancaria el día 25 de mayo si el 7 de noviembre anterior la abrió con $6,300, el 3 de enero hizo un depósito por $15,000 y el 10 de febrero dispuso de $9,500? Suponga intereses del 7.2% simple anual.

9. ¿Con cuánto se cancela hoy un crédito que se obtuvo 7 meses antes por medio millón de pesos? Considere intereses del 17.4% simple anual y que hace 3 meses se abonaron $200,000.

10. ¿Cuál fue el costo por el financiamiento en el problema 9?

***11.** El 7 de enero la Comercializadora del Centro compró mercancía con valor de $75,000 a pagarse el 18 de julio. El 20 de abril le otorgan otro crédito por $67,250 a liquidarse el 9 de agosto y el 4 de mayo logra otro endosando un documento con valor nominal de $60,750 y vencimiento al 21 de septiembre, ¿cuánto dinero pagó en total por concepto de intereses si le cargan el 15.3% simple anual?

Justificando su elección, seleccione la opción correcta en los problemas 12 a 21.

12. ¿Con cuánto cancela su deuda el día de hoy el señor González si el 8 de octubre anterior debía $20,250, el 10 de diciembre le prestan $15,725 y otros 18 mil pesos el 15 de febrero? Suponga intereses del 19.2% simple anual y que hoy es 23 de marzo.

a) $55,708.43 *b*) $56,977.23 *c*) $54,248.42 *d*) $57,329.85 *e*) Otro

***13.** El 21 de junio se abonaron $12,350 a una cuenta que el 3 de marzo anterior tenía un saldo en contra del deudor por $7,925, ¿cuál es el saldo el 13 de octubre si el 8 de mayo se hizo una disposición de 9 mil pesos? Suponga intereses del 9.36% simple anual.

a) $11,098.00 *b*) $9,521.00 *c*) $9,227.00 *d*) $10,358.21 *e*) Otro

14. ¿Cuál habrá sido el saldo el día 3 de marzo si con $15,325 se deja en ceros el día 13 de agosto la cuenta del problema 13?

a) $11,629.35 *b*) $10,829.45 *c*) $12,008.23 *d*) $11,778.53 *e*) Otro

***15.** ¿Qué día vence un par de documentos con valor nominal de $70,200 y $45,300 si el primero cubre un crédito de $63,080.71 y el otro de $42,435.60, conseguidos respectivamente el 18 de octubre y el 10 de enero siguientes? Considere que los intereses son del 19.44% simple anual.

a) Mayo 15 *b*) Junio 8 *c*) Marzo 25 *d*) Mayo 27 *e*) Otro

16. José Luis compra una lancha de motor con un anticipo de 75 mil pesos, un abono a los 4 mese y otros 3 meses después por $87,500 que corresponde al 35% del precio de compra. Obtenga el tamaño del abono si le cargan intereses del 21.6% simple anual.

a) $157,610.66 *b*) $175,421.38 *c*) $143,798.03 *d*) $138,940.51 *e*) Otro

17. ¿Cuál es el precio de contado de la lancha en el problema 16?

a) $222,024.86 *b*) $248,629.30 *c*) $235,905.65 *d*) $198,685.30 *e*) Otro

18. ¿Cuánto dinero pagó José Luis por la lancha del problema 16?

a) $90,325.40 *b*) $93,668.45 *c*) $102,048.30 *d*) $98,085.80 *e*) Otro

19. El 10 de octubre Juan Pérez prestó $22,000 a un amigo con interés del 18.9% simple anual y plazo al 27 de enero siguiente. Este día depositó en una cuenta $18,000 y lo que el amigo le pagó por el préstamo, ¿cuánto tendrá en su cuenta el 15 de abril si ganó con el 7.2% simple anual en la cuenta?

a) $39,065.33 *b*) $40,921.65 *c*) $41,902.59 *d*) $43,059.32 *e*) Otro

***20.** Obtenga el tamaño de cada uno de los 3 pagos que se realizan el 18 de septiembre, 3 de noviembre y 28 de enero para cancelar un préstamo por $48,300, realizado el 5 de agosto anterior, con intereses del 12.6% simple anual considerando que cada uno es un 20% menor que el anterior.

a) $22,058.70, $17,646.96, $14,117.57

b) $20,437.81, $16,350.25, $13,080.20

c) $21,286.58, $17,029.26, $13,623.41

d) $22,835.45, $18,268.36, $14,614.69

e) Otro

21. Resuelva el problema 20 suponiendo que cada pago es $1,750 menor que el siguiente.

a) $14,761.39, $16,511.39, $18,261.39

b) $15,028.31, $16,778.31, $18,528.31

c) $14,039.05, $15,789.05, $17,539.05

d) $15,621.08, $17,371.08, $19,121.08

e) Otro

3.4 Descuento simple

Cuando se consigue un préstamo por un capital C, el deudor se compromete a pagarlo mediante la firma de un pagaré, cuyo *valor nominal* generalmente es mayor que C, puesto que incluye los intereses. Es práctica común que el acreedor, es decir, el propietario del documento, lo negocie antes de la fecha de vencimiento, ofreciéndolo a un tercero —a una empresa de factor aje, por

ejemplo—, a un precio menor que el estipulado en el propio documento, con un *descuento* que puede evaluarse de 2 formas:

a) *Descuento simple real*.
b) *Descuento simple comercial*.
c) *Descuento compuesto*.

El primero se calcula utilizando la fórmula del interés simple $M = C(1 + in)$, donde M es el valor nominal. Este descuento se explica en el primer ejemplo.

El descuento simple comercial se trata en los siguientes ejemplos y el descuento compuesto, en el capítulo cuatro.

Ejemplo 1

¿Cuál es el descuento simple real de un documento con valor nominal de $25,300, 72 días antes de su vencimiento con una tasa de descuento del 6.3% simple anual?

solución

En la fórmula del interés simple, se sustituyen

M por 25,300, el valor nominal del documento
n por 72 días, el plazo o tiempo que falta para el vencimiento
i por $d = 0.063$, la tasa de interés, es decir, de descuento

Entonces,

$$25,300 = C[1 + (0.063/360)72] \qquad M = C(1 + in)$$
$$25,300 = C(1.0126)$$

de donde: $C = 25,300/1.0126$ o bien, $C = 24,985.19$

El descuento real es, entonces, $D = M - C$, es decir,

$$D = 25,300 - 24,985.19 \quad \text{o bien,} \quad D = \$314.81$$

A diferencia del anterior, el *descuento comercial,* llamado así por su semejanza con la rebaja que los comerciantes hacen a sus artículos cuando los venden, quitando algunos pesos al precio de lista, se calcula restando al valor nominal un descuento. La adquisición de CETES es un claro ejemplo de inversiones que se manejan con descuento comercial, el cual, en general, se obtiene multiplicando el valor nominal del documento por el plazo y por la tasa de descuento, es decir,

$$D = Mnd$$

donde d es la tasa de descuento simple anual, n es el plazo en años, D es el descuento comercial y M es el valor nominal del documento correspondiente.

Ejemplo 2

Descuento comercial de un pagaré

El descuento comercial de un documento con valor nominal de $6,500, 3 meses antes de vencer, es decir, $n = 3/12$, puesto que éste es el plazo en años, con un tipo de descuento del 11.2% simple anual, es:

$$D = 6{,}500(3/12)(0.112) \quad \text{o bien,} \quad D = Mnd$$
$$D = \$182$$

Si al valor nominal del pagaré se le resta este descuento, entonces se obtendrá su *valor comercial* o *valor descontado P,* que en este caso será:

$$P = 6{,}500 - 182 \quad \text{o bien,} \quad P = \$6{,}318$$

Fórmula general

El resultado anterior se expresa generalmente como

$$P = M - Mnd \quad \text{ya que} \quad D = Mnd$$

donde, al factorizar M, se obtiene la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 3.3

El **valor comercial** P de un documento con valor nominal M, n años antes de su vencimiento es:

$$P = M(1 - nd)$$

donde d es la tasa de descuento simple anual.

También en este caso la tasa de descuento y el plazo deben estar en las mismas unidades de tiempo.

Ejemplo 3

Valor comercial de un pagaré



¿Cuál es el valor comercial del 12 de mayo de un documento que ampara un préstamo de $26,500, recibido el 25 de enero anterior con intereses del 12% simple anual y cuyo venci - miento es el 30 de julio? Suponga que la tasa de descuento simple anual es del 12.5%.

solución

En la figura 3.6 se muestra un diagrama temporal, donde aparecen las fechas, las cantidades de dinero y los plazos.

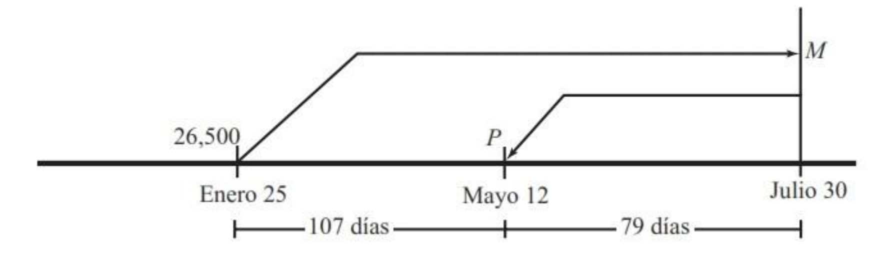


Figura 3.6

Primero es necesario hallar el valor futuro de los \$26,500 del préstamo, mediante la fórmula del interés simple:

$$M = 26{,}500[1 + (0.12/360)(186)] \qquad M = C(1 + ni)$$

$$M = 26{,}500(1.062) \quad \text{o bien,} \quad M = \$28{,}143$$

Con este valor futuro, el plazo $n = 79/360$ años y la tasa de descuento $d = 0.125$, se obtiene el valor descontado.

$$P = M(1 - nd)$$

$$P = 28{,}143[1 - (79/360)(0.125)]$$

$$P = 28{,}143(0.972569445) \qquad \text{o bien,} \qquad P = \$27{,}371.02$$

Ejemplo 4

Plazo y tasa de interés en un documento

¿Qué día se negocia en \$32,406 el siguiente documento con descuento del 10.02% simple anual? Suponiendo que ampara un crédito en mercancía por \$32,000, ¿cuál fue la tasa de interés simple anual?

Bueno por \$33,050.00

Por este pagaré me obligo a pagar incondicionalmente a la orden de CH Impresiones en México D.F. el día 17 de febrero de 2013 la cantidad de \$33,050.00 (treinta y tres mil cincuenta pesos 00/100 m.n.), valor recibido a mi entera satisfacción.

Lugar y fecha: Naucalpan, Estado de México, a 5 de octubre de 2012

Nombre: Antonio Gutiérrez

Domicilio: Calle 4 # 27, Col. Alce Blanco

acepto

solución

a) El valor nominal es de $33,050, el valor en que se comercializa es de $32,406, la tasa de descuento es $d = 0.1002$, por lo tanto,

$$32{,}406 = 33{,}050[1 - n(0.1002)] \qquad P = M(1 - nd)$$

de donde $32{,}406/33{,}050 - 1 = -n(0.1002)$

$$n(0.1002) = 0.019485628$$

$$n = 0.019485628/0.1002$$

$n = 0.194467343$ años, porque la tasa es anual, esto es,

$$0.194467343(360) = 70.00824359 \text{ días}$$

Significa que 70 días antes del 17 de febrero, es decir, el 9 de diciembre de 2012, el documento se comercializa en $32,406.

b) El plazo entre el 17 de febrero y el 5 de octubre anterior es de 135 días, el capital es el valor de la mercancía $32,000, el monto es $M = 33{,}050$ y la tasa de interés i se obtiene despejándola de la siguiente ecuación:

$$33{,}050 = 32{,}000[1 + i(135)] \qquad M = C(1 + in)$$

$$33{,}050/32{,}000 - 1 = i(135)$$

$0.0328125 = i(135)$ o bien,

$i = 0.000243056$ diaria, porque el plazo está en días.

Para la tasa anual se multiplica por 360:

$0.000243056(360) = 0.0875$, es decir, 8.75%

Ejemplo 5

Descuento interbancario

El Banco del Sur descuenta al señor Gómez el 7.5% de interés simple anual de un documento con valor nominal de $30,000 que vence 45 días después. El mismo día, el banco descuenta el pagaré en el Banco Nacional con el 6.75% anual. ¿Cuál fue la utilidad para el Banco del Sur?

solución

El plazo es $n = 45/360$ años, el monto (valor nominal) es $M = 30{,}000$, la tasa de descuento es $d = 0.15$; entonces, el capital que el señor Gómez recibe por el documento es:

$$P = 30{,}000[1 - (0.075/360)(45)]$$

$P = 30{,}000(0.990625)$ o bien, $P = \$29{,}718.75$

Ahora bien, el capital que el Banco del Sur recibe del Nacional, dado que la tasa de descuento es $d = 0.0675$, es:

$$P = 30{,}000[1 - (0.0675/360)(45)]$$
$$P = 30{,}000(0.9915625)$$
$$P = \$29{,}746.88$$

La diferencia entre los 2 resultados es la utilidad para el Banco del Sur:

$$U = 29{,}746.88 - 29{,}718.75$$
$$U = \$28.12$$

Note que esto es igual a la utilidad de los \$30,000 al 0.75% en 45 días.

$$U = 30{,}000(0.0075/360)(45)$$
$$U = \$28.12$$

El 0.75% es la diferencia entre los porcentajes de descuento.

Ejercicios 3.4

1. Explique los conceptos de *descuento simple* y *descuento compuesto*.
2. ¿Qué diferencia hay entre valor descontado y valor comercial de un documento?
3. ¿Por qué le llaman descuento comercial al que hacen a un documento?
4. ¿Cuál es la fórmula para calcular el descuento simple real y para el descuento simple comercial?
5. ¿Cuál descuento es mayor, el comercial o el descuento real?
6. ¿De cuánto es el descuento real de un documento con valor nominal de \$73,500.00, 3 meses antes de su vencimiento, considerando el 9.9% de descuento simple anual?

*7. ¿En cuánto se negocia el 23 de octubre un documento con vencimiento al 5 de enero, valor nominal de \$6,500 y una tasa del 10.5% simple anual considerando

a) descuento real y *b*) descuento comercial?

8. Obtenga el descuento comercial a un documento que vence 7 meses después y tiene valor nominal de \$15,750. Considere el 8.4% anual.

*9. ¿Cuál es el precio de compra-venta, el 7 de agosto, de un documento que ampara un crédito por 145 mil pesos el 13 de mayo cuyo vencimiento es el 15 de enero siguiente? Suponga interés del 15.6% simple anual y descuento comercial del 13.2% simple anual.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

10. En el problema 9, ¿en cuánto se negocia el documento el mismo día del préstamo?

11. Obtenga la tasa de descuento simple comercial que se aplicó a un documento que se negoció el 27 de febrero en $17,350, el cual vence el 7 de julio y su valor nominal es de $17,775.18.

***12.** El señor Mendoza presta $25,000 a un amigo con intereses del 15.3% simple anual y plazo de 5 meses, pero 2 meses después negocia el pagaré correspondiente en $25,750, ¿cuál fue la tasa de descuento comercial?

13. El 15 de enero se compra un refrigerador con un anticipo de $3,375.00 y un pagaré al 23 de mayo por el 55% restante e intereses del 20.1% simple anual, determine:

a) El valor nominal del documento.

b) El precio de contado del refrigerador.

c) El valor comercial del pagaré el 16 de marzo si el descuento comercial es del 18.6% simple anual.

14. El 8 de abril el Banco del Centro descuenta al doctor Velasco una tasa del 9.6% simple anual en un documento que vence el 25 de septiembre siguiente y valor nominal de $45,325. El mismo día el banco transfiere el pagaré al Banco del Bajío con descuento comercial del 8.24% simple anual. ¿Cuánto dinero ganó el Banco del Centro por la transferencia?

***15.** El 23 de noviembre una tienda departamental compra mercancía con valor de $105,300 y firma un documento por el 58% de esta cantidad y vencimiento al 3 de mayo del año siguiente. El 2 de enero firma otro pagaré con valor nominal de $98,725 que incluye los intereses que vence el 21 de junio. ¿Cuánto recibe por los 2 documentos el 19 de marzo? Suponga descuento comercial del 10.5% simple anual e intereses del 9.8% simple anual en los 2 créditos.

***16.** En el problema 15, ¿cuál fue el costo, es decir, los intereses para la tienda por no pagar de contado la mercancía? Considere que el 42% del primer crédito se pagó el 1º de agosto.

***17.** Resuelva los problemas 11 y 15 con descuento simple real.

Seleccione la opción correcta en los problemas 18 a 35 justificando su elección.

18. El descuento comercial a un documento por $9,320, 47 días antes de su vencimiento, con el 5.9% simple anual es:

a) $81.19 *b*) $71.79 *c*) $80.23 *d*) $75.28 *e*) Otro

19. El 15 de abril se transfiere un pagaré en $12,823.68 con una tasa de descuento del 11.7% simple anual y vencimiento al 23 de julio siguiente, ¿cuál es su valor nominal?

a) $13,623.83 *b*) $12,729.08 *c*) $13,250 *d*) $14,125.35 *e*) Otro

***20.** ¿Qué día vence un pagaré con valor nominal de $23,429 si el 5 de agosto se negocia en $22,735.50? Considere el 7.2% de descuento simple comercial anual.

a) Diciembre 3 *b*) Enero 10 *c*) Noviembre 19 *d*) Diciembre 31 *e*) Otro

21. ¿De cuánto fue un crédito que cubre un documento con plazo de 9 meses, suponiendo que 4 meses después se comercializa en $37,351.03, considerando descuento del 13.2% e intereses del 14.7% simple anual?

a) $35,128.45 *b*) $35,600.00 *c*) $34,875.39 *d*) $36,529.33 *e*) Otro

22. Adriana presta $19,500 a su amiga Beatriz con intereses del 21% simple anual y 7 meses de plazo, pero 2 meses después vende el documento a Carlos con descuento del 19.2% simple anual, ¿cuánto dinero "ganó" Carlos al intervenir en la transacción?

a) $1,751.10 *b*) $2,030.92 *c*) $1,923.62 *d*) $1,850.09 *e*) Otro

23. ¿Qué día vence un documento con valor nominal de $63,250.00 si el 3 de julio se negocia en $61,600.44 con el 5.76% de descuento simple comercial anual?

a) Diciembre 21 *b*) Noviembre 3 *c*) Enero 15 *d*) Diciembre 13 *e*) Otro

24. ¿Con qué tasa de descuento simple semanal se negocia 9 meses antes en $26,710.40 un documento con valor nominal de $31,424.00?

a) 0.3425% *b*) 0.3906% *c*) 0.3523% *d*) 0.3846% *e*) Otro

***25.** Suponiendo que le descontaron el 11.16% simple anual, ¿cuánto recibe el 25 de marzo el señor Cortés por 2 documentos, de los cuales el primero vence el 13 de agosto con valor nominal de $28,125, y el segundo vence el 5 de octubre y cubre un préstamo por $32,450 recibido el 3 de noviembre anterior con intereses del 14.2% simple anual?

a) $59,873.72 *b*) $62,129.03 *c*) $61,436.18 *d*) $60,948.21 *e*) Otro

***26.** ¿Cuánto recibe un comerciante el 15 de abril por 3 pagarés con la siguiente información, considerando descuento del 6.84% comercial simple anual?

Documento	Crédito	Vencimiento, monto	Tasa de interés
1	$20,350, diciembre 5	Junio 8, ––	7.2% simple anual
2	–– Enero 10	Agosto 21, $35,300	0.55 simple mensual
3	$27,325, febrero 28	Octubre 10, ––	0.018 simple diario

a) $79,893.63 *b*) $81,096.36 *c*) $80,904.05 *d*) $82,793.29 *e*) Otro

27. En el problema 26, ¿por qué cantidad fue el segundo crédito el 10 de enero?

a) $33,295.08 *b*) $32,675.24 *c*) $31,448.65 *d*) $33,913.50 *e*) Otro

28. ¿Cuántos días faltan para el vencimiento de un pagaré con valor nominal de $15,050.00 si se negocia en $14,548.53 con el 12.24% de descuento simple anual?

a) 89 *b*) 95 *c*) 102 *d*) 98 *e*) Otro

29. Multiservicios Pérez compra cemento para la construcción y lo paga con un anticipo del 45% y un crédito por $45,000, intereses del 13.2% simple anual, con un documento por $46,237.50. ¿De cuántos días es el plazo?

a) 75 *b*) 70 *c*) 68 *d*) 82 *e*) Otro

30. ¿En cuánto se negocia el documento del problema 29 un mes después de la compra si se descuenta el 11.4% simple anual?

a) $45,578.62 *b*) $45,093.05 *c*) $44,958.00 *d*) $46,089.93 *e*) Otro

31. ¿Cuál es el valor nominal del documento que vence el 29 de octubre si con descuento comercial del 10.4% simple anual se negocia en $40,638.15 el 11 de mayo anterior?

a) $42,750.00 *b*) $41,921.50 *c*) $42,096.35 *d*) $43,005.63 *e*) Otro

***32.** ¿Por qué cantidad fue el crédito que la Mueblería del Sur otorgó a uno de sus clientes el 19 de marzo si el documento correspondiente se transfiere el 5 de septiembre en $36,662.03? Suponga que los intereses son del 6.4%, el descuento es de 6.6% simple anual y el documento vence el 25 de noviembre.

a) $35,073.20 *b*) $34,225.00 *c*) $34,929.60 *d*) $35,625.00 *e*) Otro

33. En el problema 32 que día vencería el documento si su valor nominal es de $36,847.29?

a) Octubre 12 *b*) Septiembre 28 *c*) Septiembre 5 *d*) Agosto 25 *e*) Otro

34. ¿Cuánto dinero recibe una vinatería el 23 de marzo por sus documentos; el primero por $25,000.00 y vencimiento el 1º de agosto; el segundo por $21,750.00 que vence el 17 de diciembre, y un tercero que vence el 13 de junio y ampara un crédito por $23,528.00 otorgado el 10 de febrero anterior? Suponga intereses del 17.4% simple anual y descuento del 15.8%.

a) $63,298.65 *b*) $64,929.36 *c*) $66,774.46 *d*) $65,321.08 *e*) Otro

35. En el problema 34, ¿cuál es el valor nominal del último documento?

a) $24,926.74 *b*) $23,908.60 *c*) $25,215.31 *d*) $25,310.95 *e*) Otro

3.5 Interés simple exacto y comercial

Una de las características de la vida moderna es la rapidez con la que cambian las cosas, y el mundo de las finanzas no es la excepción. Es sorprendente ver cómo los sucesos nacionales e internacionales influyen sobremanera en las tasas de interés que ofrecen los bancos y otras instituciones que se dedican a la transferencia de capitales en todas sus formas. Basta con echar un vistazo a lo que sucede en el área de remates de la Bolsa Mexicana de Valores para darse cuenta de ello, donde la cotización de las acciones y otros títulos de inversión cambian minuto a minuto, dependiendo básicamente de la oferta y la demanda con que se negocian.

Esta dinámica da lugar a que en las inversiones, y las operaciones de crédito en general, se consideren los plazos en días y no en meses u otras unidades de tiempo mayores, como lo fueron en décadas pasadas. En todos los ejemplos hasta aquí planteadas se considera que el año tiene 360 días para el año comercial; y el número de días naturales, los del calendario, para el plazo. Ésta es la forma más usual y así continuaremos considerándola, mientras no se diga lo contrario.

Sólo como referencia, cuando el año se considera de 360 días, se denominan interés y descuento, simple *comercial* u *ordinario*; mientras que lo llamamos interés *exacto*, cuando el año se considera de 365 días, o 366 si es bisiesto.

El plazo también se evalúa de 2 maneras:

a) Con tiempo *real* o *exacto* si se contabilizan los días naturales entre las fechas inicial y terminal.

b) Con tiempo *aproximado* si todos los meses se consideran de 30 días.

Así que confirmando lo anteriormente dicho, el que más se utiliza es el *interés comercial con tiempo real*.

Cabe señalar que, por ejemplo, los CETES, con algunas excepciones, se emiten con plazos de 28 días o múltiplos de este valor, con lo cual se tendrán 13 meses de 28 días en un año, dando como resultado 364 días por año, lo cual es aún más preciso.

También es cierto que para el número de días en el plazo no se considera el día que corresponda a la fecha inicial o terminal, es decir, se contabiliza sólo una de las 2 fechas.

Ejemplo 1

Monto con interés simple comercial y con tiempo aproximado y la TIIE

Utilizando un interés simple comercial con tiempo aproximado, obtenga el monto que se acumula al 15 de octubre, si el 25 de marzo anterior se depositan $15,000 en una cuenta que abona con la TIIE + 2.4 puntos porcentuales. Suponga que la TIIE es de 4.44% anual.

solución

El tiempo, o sea, el plazo en tiempo aproximado, es de 200 días ya que:

De marzo:	30 − 25 = 5 días
De abril a septiembre:	6(30) = 180 días
De octubre:	15 días
Total:	200 días

La tasa de interés es 4.44 + 2.4 = 6.84% o bien, $i = 0.0684$

El monto es, entonces,

$$M = 15{,}000(1 + 200(0.0684/360))$$

$$M = 15{,}000(1.038) \quad \text{o bien,} \quad M = \$15{,}570.00$$

Ejemplo 2

Monto con interés simple exacto y con tiempo real

Resuelva el ejemplo 1 con interés simple exacto con tiempo real.

solución

Aquí la tasa anual se divide entre 365 y el plazo es de 204 días. El monto con la misma fórmula del interés simple es:

$$M = 15{,}000(1 + 204(0.0684/365)) \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 15{,}000(1.038229041) \quad \text{o bien,} \quad M = \$15{,}573.44$$

Nota: El tiempo real para el plazo puede obtenerse con un calendario a la vista o con la tabla del Apéndice B. Ahí se aprecia que el 15 de octubre es el día número 288 del año, el 25 de marzo es el 84 y el plazo es igual a la diferencia: 288 − 84 = 204 días.

Ejemplo 3

Tasa de descuento simple comercial con tiempo aproximado

El 9 de noviembre se negocia en \$14,735 un documento con valor nominal de \$15,400 y vencimiento al 23 de abril del año siguiente. ¿Cuál es la tasa de descuento suponiendo que es comercial u ordinario con tiempo aproximado?

solución

En este caso el tiempo es de 164 días:

De noviembre:	30 − 9 = 21	
De diciembre a marzo:	4(30) = 120	
De abril:	23	
Total	164	días

En el teorema 3.3, para descuento comercial, se sustituyen el plazo n, por 164, el monto M, por \$15,400, y P por \$13,680. Después, se despeja la tasa d.

$$14{,}735 = 15{,}400[1 - (164/360)(d)] \quad P = M(1 - nd)$$
$$14{,}735/15{,}400 - 1 = -(164/360)d$$
$$-0.043181818 = -0.4\overline{5}\,(d)$$

de donde:

$$d = 0.043181818/0.4\overline{5}$$
$$d = 0.094789357 \text{ o bien, } 9.4789\%, \text{ aproximadamente.}$$

Ejemplo 4

Crédito mercantil, descuento simple exacto

El 9 de octubre la Comercial Ferretera López vendió materiales y le firmaron un pagaré con valor nominal de $31,750, con vencimiento al 6 de febrero e interés del 14.3% simple anual.

a) ¿Cuál fue el precio de los materiales?

b) ¿Qué día se descuenta el documento en $30,800 en un banco que opera con el 15.11% de descuento simple anual?

Utilice tiempo real para el plazo, el interés y el descuento exacto.

solución

El diagrama temporal de la figura 3.7 sirve para anotar y ver las cantidades y los plazos.

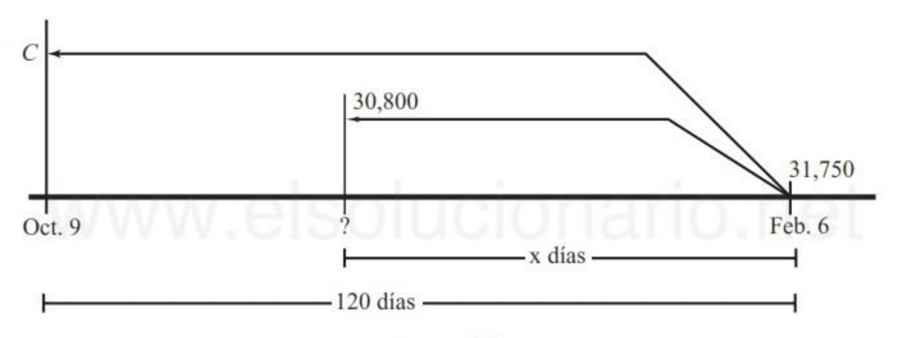


FIGURA 3.7

a) En la tabla del apéndice B se ve que el plazo entre las 2 fechas es de 120 días, además, $M = \$31,750$ y la tasa $i = 0.143$, por lo tanto:

$$31,750 = C[1 + (120/365)(0.143)] \quad M = C(1 + ni)$$

$$31,750 = C(1.047013699)$$

de donde: $C = 31,750/1.047013699$ o bien, $C = \$30,324.34$

b) Para encontrar el día en que se comercializa el documento, se necesita el plazo. Para esto se sustituyen en el teorema 3.3 los valores de M por $31,750, el valor nominal, P por $30,800, el valor comercial, y d por 0.1511, la tasa de descuento simple anual:

$$30,800 = 31,750[1 - n(0.1511)] \quad \text{con } n \text{ en años}$$

$$30,800/31,750 - 1 = -n(0.1511)$$

$$n(0.1511) = 0.02992126$$

$$n = 0.02992126/0.1511$$

$$n = 0.198022897 \text{ años, porque la tasa es anual.}$$

Para convertirlo en días, se multiplica por 365, los días naturales de un año no bisiesto:

$$0.198022897(365) = 72.27835755$$

es decir, 72 días que se cumplen el 26 de noviembre, lo que se obtiene con el auxilio de la tabla del apéndice B.

Ejercicios 3.5

1. Explique las características del interés y del descuento simple *exacto* con tiempo *aproximado.*

2. ¿Qué características tiene el *descuento comercial exacto* con tiempo *aproximado*?

3. Diga qué caracteriza al interés simple *ordinario* o *comercial*, con tiempo *real,* ¿y con tiempo *aproximado*?

4. ¿Será posible que el tiempo real y el tiempo aproximado sean iguales? ¿Por qué?

5. ¿Qué es más productivo para un inversionista, el interés simple exacto o el comercial?

6. ¿Cuál es el valor comercial el 3 de marzo de un pagaré que vence el 15 de junio, si su valor nominal es de $32,000 y el descuento es del 8.7% simple anual? Utilice tiempo aproximado e interés exacto.

***7.** El 23 de febrero una exportadora vende mercancía y le firman 2 pagarés por US$25,000 cada uno, con vencimiento al 15 de abril y al 30 de mayo. Considerando interés exacto y tiempo real determine:

a) El valor de la mercancía, si se carga el 15.53% de interés simple anual.

b) ¿Cuánto le dan por los 2 pagarés el 10 de marzo en un banco que descuenta con el 15.75% simple anual?

En los problemas 8 a 11 utilice el descuento o interés *comercial* con *tiempo aproximado*.

8. ¿Con qué tasa se descuenta el 15 de abril a un precio de $8,750 un documento que vence el 25 de julio y cuyo valor nominal es de $9,200?

***9.** El 13 de diciembre una tienda de electrodomésticos vende mercancía por $23,800. Le pagan con un anticipo y 2 documentos con valor nominal igual al anticipo, el 28 de enero y el 8 de marzo, respectivamente, ¿de cuánto es cada pago si se cargan intereses del 15.8% simple anual?

10. En el problema 9, ¿en cuánto se negocian el 20 de diciembre los 2 pagarés en un banco que descuenta el 10.5% simple anual?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

11. El 5 de enero usted se compra un equipo de cómputo que se paga con un enganche de $6,000, un abono por $8,000 el 20 de febrero y otro el 19 de marzo para liquidar el resto. ¿Por cuánto será este pago, si el precio del equipo fue de $20,600 y se cargan intereses del 16% simple anual?

En los problemas 12 a 15 utilice el interés o el descuento simple *exacto* con *tiempo real.*

12. ¿Cuánto debe invertir un padre de familia el 12 de septiembre en una cuenta bancaria que paga el 9.8%, para disponer de $16,000 el 15 de diciembre siguiente?

13. ¿En cuántos días crece un 23% un capital al 13.9% de interés simple anual?

***14.** Obtenga el valor que falta en el cuadro siguiente, donde *D* y Z representan, respectivamente, el tipo de descuento y de interés anual.

	Fecha inicial	Fecha de vencimiento	Tipo	Valor presente	Valor nominal
1	enero 10	junio 25	Z 7%	$7,500	$ –
2	octubre 8	enero 15	D–	$21,009	$22,050
3	marzo 19	agosto 3	D 6.3%	$ –	$15,750
4	agosto 7	diciembre 23	Z 13.5%	$5,400	$ –
5	–	abril 21	Z 11.8%	$10,350	$11,120
6	septiembre 20	–	D 5.7%	$18,000	$20,500

15. Determine los intereses en los ejercicios de los renglones 1, 4 y 5 del problema 14; así como el descuento en los restantes.

Seleccione la opción correcta justificando su elección en los problemas 16 a 30, y en los problemas 16 al 21 considere interés o descuento *comercial* con *tiempo real.*

16. ¿Cuál es el valor descontado el 5 de febrero de un pagaré con valor nominal de $72,560 y vencimiento al 23 de junio? Suponga que se descuenta con el 5.22% simple anual.

a) $71,695.69 *b*) $69,960.52 *c*) $71,108.07 *d*) $70,829.30 *e*) Otra

17. Una mueblería ofrece una recámara con un anticipo del 40% y el resto a crédito con 2 pagos de $4,250 cada uno; el primero a 40 días, y el segundo a 65 días después de la compra. ¿Cuál fue el precio de contado de la recámara, si se cargan intereses del 18.4%?

a) $13,797.00 *b*) $14,546.81 *c*) $13,923.85 *d*) $14,243.50 *e*) Otra

***18.** En el problema 17, ¿de cuánto resulta cada abono para un cliente que compra el mueble con solo el 25% de anticipo?

a) $5,601.21 *b*) $5,410.71 *c*) $5,905.38 *d*) $5,043.43 *e*) Otra

19. En el problema 18, ¿cuánto pagó el supuesto cliente por concepto de intereses?

a) $450.08 *b*) $495.02 *c*) $473.67 *d*) $419.84 *e*) Otra

***20.** El 21 de marzo se compran materiales para construcción con valor de $47,275, que se liquidan con un anticipo y 2 pagos iguales al enganche, el 9 de mayo el primero, y el 25 de julio el otro. ¿Por qué cantidad es cada uno, si se consideran cargos del 17.5% simple anual?

a) $16,420.30 *b*) $16,269.34 *c*) $15,987.23 *d*) $16,195.51 *e*) Otra

***21.** En el problema 20, ¿por cuánto es el último pago si cada uno es mil pesos mayor que el anterior?

a) $17,410.18 *b*) $16,996.43 *c*) $17,010.93 *d*) $17,215.28 *e*) Otra

En los problemas 22 a 25 considere interés o descuento comercial con tiempo aproximado.

22. Si el 10 de febrero se descuenta un pagaré en $62,750 con una tasa del 6.7% simple anual, ¿cuál es el valor del bien que se adquirió al endosar el documento, considerando intereses del 9% simple anual? Suponga que vence el 25 de abril y se firmó el 7 de noviembre anterior.

a) $62,250.08 *b*) $60,129.37 *c*) $60,980.95 *d*) $61,043.91 *e*) Otra

***23.** El 19 de marzo el señor Valenzuela depositó $53,000 en una cuenta bancaria que bonifica intereses del 7.2%, el 23 de mayo siguiente retira $58,250, y el 1 de octubre deja su cuenta en ceros. ¿Cuánto retiró este día, si el 3 de enero tenía un saldo a favor de $27,401.35 en la misma cuenta?

a) $25,320.10 *b*) $24,164.06 *c*) $23,925.42 *d*) $23,298.65 *e*) Otra

24. En el problema 23, ¿cuánto ganó el señor Valenzuela por concepto de intereses en el periodo del 3 de enero al 1º de octubre?

a) $1,969.30 *b*) $2,350.00 *c*) $2,012.71 *d*) $2,510.28 *e*) Otra

***25.** El 17 de junio el señor Santillán depositó en una cuenta que paga el 6.3% de interés simple anual, el 80% de su reparto de utilidades, y el 20 de diciembre su aguinaldo, que fue de $21,350. ¿Cuánto recibió por el reparto de utilidades, si el 21 de abril del año siguiente tiene en su cuenta $49,344.79? Suponga que el 17 de junio tenía $10,983.45 en la cuenta.

a) $18,085.23 *b*) $18,989.99 *c*) $19,124.08 *d*) $20,350.00 *e*) Otra

En los problemas 26 a 30 utilice interés o descuento simple exacto con tiempo real.

26. ¿En cuanto se negocia, el 25 de julio, un documento con valor nominal de $12,450 y vencimiento al 3 de diciembre siguiente? Suponga descuento simple anual del 10.96%.

a) $11,960.27 *b*) $12,003.42 *c*) $11,998.36 *d*) $12,129.31 *e*) Otra

***27.** Laura María depositó $6,300 en un banco que bonifica el 6.32% el 15 de febrero, y el 3 de junio otros $8,750 en la misma cuenta. ¿Cuánto tiene el 25 de noviembre, si en su cuenta tenía $15,275.60 el 23 de diciembre anterior?

a) $30,963.21 *b*) $32,983.15 *c*) $31,790.81 *d*) $33,007.93 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero ganó Laura, la del problema 27, en su cuenta bancaria desde el 23 de diciembre al 25 de noviembre del año siguiente por concepto de intereses?

a) $1,968.07 *b*) $1,357.28 *c*) $1,215.62 *d*) $1,465.21 *e*) Otra

***29.** A la Exportadora de Cítricos le endosaron 3 pagarés, el 10 de febrero, con valor nominal y fecha de vencimiento dados en la tabla a intereses del 6.72% simple anual.

Documento	Valor nominal	Vencimiento
A	US$78,950	15 de mayo
B	US$65,300	23 de junio
C	US$59,500	4 de agosto

¿Por qué cantidad fue el crédito?

a) US$197,885.89 *b*) US$196,721.23 *c*) US$193,421.95 *d*) US$198,988.95 *e*) Otra

30. En el problema 29, ¿cuánto le dan por los 3 documentos al gerente de la exportadora, si los descuenta el 23 de marzo con el 7.02%?

a) US$200,256.36 *b*) US$197,429.35 *c*) US$201,059.03 *d*) US$198,956.42 *e*) Otra

3.6 Amortización con interés simple

Hay básicamente 2 maneras de liquidar un crédito en efectivo, en bienes o en servicios:

- Con un desembolso único al final del plazo.
- Con 2 o más pagos, cuya frecuencia y tamaño pueden ser iguales o diferentes, y en este caso se dice que el crédito se *amortiza,* que significa "dar muerte" a la deuda (por sus raíces del latín, *ad* y *mortus*).

Definición 3.6

Amortizar es el proceso de cancelar una deuda y sus intereses mediante pagos periódicos.

Cuando el número de pagos es relativamente corto, el problema se resuelve considerando pago tras pago como en los ejemplos que preceden; pero si son muchos, resulta poco práctico hacerlo de esta manera y entonces se utilizan fórmulas que luego se justifican.

También es cierto que existen, por lo menos, 3 maneras diferentes de considerar los cargos por intereses al amortizar un crédito:

- Con interés global.
- Con interés simple.
- Con interés compuesto.

En el capítulo 5 se estudiarán las amortizaciones de renta fija con interés compuesto.

Amortización de renta fija

En la amortización con interés global, los pagos son todos iguales, ya que el interés total se divide entre el número de pagos y el resultado se suma al pago a capital, llamado **amortización**.

Es importante y oportuno señalar que **abono** y **amortización** son diferentes, ya que una parte de cada abono es para cubrir los intereses del periodo, y la otra, es decir, la amortización, se destina al capital que se adeuda haciendo que con cada pago se reduzca; esto es:

ABONO = INTERESES + AMORTIZACIó N,

tal como se aprecia en el ejemplo.

Ejemplo 1

Amortización de un crédito con pagos fijos

¿Cuál es el abono mensual con el que se amortiza un préstamo de $90,450 en año y medio, si se cargan intereses del 3.5% simple, es decir, global mensual?

solución

Los intereses a pagar en cada mes están dados por $I = C\,(i)$ donde

$C = 90{,}000$, el valor de la deuda

$i = 0.015$, la tasa de interés mensual e

$I = 90{,}000(0.015)$ o bien, $I = \$1{,}350.00$

Por otro lado, la amortización, la porción que reduce a la deuda, es igual al cociente del préstamo, entre el número de pagos:

$A = 90{,}000/18$ o bien, $A = 5{,}000$

y cada pago, intereses y amortización, es, por lo tanto,

$R = 1{,}350 + 5{,}000$ o bien, $R = \$6{,}350$

Por supuesto que este resultado también puede obtenerse con la fórmula del interés simple:

$M = 90{,}000[1 + (0.015)18]$ $M = C(1 + in)$

$M = 114{,}300$

Por lo que cada pago es:

$R = 114{,}300/18$ o bien, $R = \$6{,}350$

que es igual al anterior.

Note usted que esta forma de amortizar una deuda es muy injusta e ilegal, porque, por ejemplo, al hacer el último abono, puesto que lo que se debe son solamente $5,000 de los cuales se están cargando $1,350 de intereses, resultan intereses del 27% mensual, porque

$1{,}350/5{,}000 = 0.27$ $i = I/C$

Estos \$5,000 que se deben al efectuar el último abono y los \$10,000 que se deben al hacer el penúltimo y los restantes, sin contar intereses, claro, se conoce como **capital vivo de la deuda**, **deuda viva**, **remanente** o más comúnmente como **saldo insoluto**, y lo más justo será que los intereses se calculen sobre este valor, que en general es lo que se debe del crédito original, al hacer un pago cualquiera no incluyendo los intereses.

Ejemplo 2

Crédito que se amortiza con pagos semanales fijos

¿De qué tamaño es el crédito que se amortiza con 13 pagos semanales de \$2,500 con interés global anual del 7.54%?

solución

Si C es el crédito, entonces la amortización semanal es $A = C/13$ y los intereses de cada periodo semanal son $I = (0.0754/52)C$ o $I = 0.00145C$, $I = i(n)C$, entonces, cada abono debe ser igual a \$2,500, es decir,

$$C/13 + 0.00145C = 2{,}500 \qquad \text{Amortización + Interés}$$

de donde $C(1/13 + 0.00145) = 2{,}500$ se factoriza C

$$C(0.078373077) = 2{,}500$$

$$C = 2{,}500/0.078373077 \qquad \text{o bien,} \qquad C = \$31{,}898.71$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado, procediendo como en el ejemplo 1.

Amortización de renta variable

Que los intereses en cada pago se calculan sobre el saldo insoluto, sobre la deuda viva, dará como resultado que cada abono sea menor que el anterior, ya que los intereses bajan si se reduce la deuda, aunque también pueden prorratearse para que todos sean iguales, como se verá en el ejemplo 5 y los que le siguen.

Ejemplo 3

Amortización de un crédito con renta variable

Usted compra un televisor de \$6,500 con un pago inicial del 20%, y después 8 abonos mensuales con cargos del 12% simple anual sobre saldos insolutos. Hallar los pagos y los intereses.

solución

a) Luego de dar el anticipo, y hasta el final del primer mes, cuando se hace el primer abono, la deuda es del 80% del precio:

$$C = 0.80(6{,}500) \quad \text{o bien,} \quad C = \$5{,}200$$

La amortización, es decir, el abono al capital en cada pago, es:

$$A = 5{,}200/8 \quad \text{o bien,} \quad A = 650$$

Los intereses al efectuar el primer abono son:

$$I_1 = 5{,}200(0.12/12)$$
$$I_1 = 5{,}200(0.01) \quad \text{o bien,} \quad I_1 = \$52$$

Los intereses para el segundo abono, puesto que la deuda ya se redujo en \$650, son:

$$I_2 = 4{,}550(0.01) \quad \text{o bien,} \quad I_2 = 45.50$$

Para el tercer pago, la deuda se redujo en otros \$650 y los intereses son:

$$I_3 = 3{,}900(0.01) \quad \text{o bien,} \quad I_3 = 39.00$$

Continuando de esta manera se llegará hasta el último pago, donde la deuda viva, dado que se han realizado 7 abonos de \$650 al capital, es:

$$5{,}200 - 7(650) = 650$$

Esto, como era de esperarse, es igual a la amortización. Los intereses son ahora:

$$I_8 = 650(0.01) \quad \text{o bien,} \quad I_8 = \$6.50$$

Y los 8 abonos, incluyendo intereses, son los siguientes, que se obtienen sumando a cada amortización de \$650.00 los intereses del periodo, es decir,

$$R_1 = 650.00 + 52.00 \quad \text{o bien,} \quad R_1 = 702.00$$
$$R_2 = 650.00 + 45.50 \quad \text{o bien,} \quad R_2 = 695.50$$
$$R_3 = 650.00 + 39.00 \quad \text{o bien,} \quad R_3 = 689.00$$

y así sucesivamente, hasta

$$R_8 = 650.00 + 6.50 \quad \text{o bien,} \quad R_8 = 656.50$$

b) El total que se carga por intereses es la suma de los intereses en cada abono, esto es,

$$I = 52.00 + 45.50 + 39.00 + \ldots + 6.50$$

que constituye una serie aritmética con:

$a_1 = 52.00$, el primer término
$d = -6.50$, la diferencia común y
$n = 8$, el número de términos

entonces, la suma, es decir, el total de intereses es:

$$I = (8/2)[2(52) + (7)(-6.50)] \quad S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$
$$I = 4(58.50) \quad \text{o bien,} \quad I = \$234.00$$

que puede comprobarse sumándolos uno por uno.

Ejemplo 4

Crédito con intereses sobre saldos



El último de 15 abonos quincenales que amortizan un crédito es de \$3,016.50. ¿Por qué cantidad es el crédito, si se considera el 13.20% de interés simple anual sobre saldos insolutos?, ¿y de cuánto es cada pago?

solución

a) Si C es el capital, es decir, el crédito, la amortización quincenal es $A = C/15$, porque son 15 abonos. Los intereses del último pago son:

$$I_{15} = (C/15)(0.132/24) \qquad I = Ai$$

o bien, $I_{15} = C(0.000366667)$

El último pago es, entonces,

$$R_{15} = C/15 + C(0.000366667) \qquad \text{Amortización + intereses}$$

o bien, $R_{15} = (0.067033333)C$ Se factoriza C

Por lo tanto,

$(0.067033333)C = 3,016.50$, que es el último abono,

de donde:

$C = 3,016.50/0.067033335$ o bien, $C = \$45,000.00$, es el crédito.

b) Los intereses del primer abono son, entonces,

$$I = 45,000(0.132/24) \quad \text{o bien,} \quad I = 247.50$$

y la amortización constante es:

$$A = 45,000/15 \quad \text{o bien,} \quad A = 3,000$$

Entonces, el primer pago es:

$$R_1 = 3,000.00 + 247.50 \quad \text{o bien,} \quad R_1 = \$3,247.50$$

Los intereses del segundo, puesto que ya se redujo la deuda en 3,000, son

$$I_2 = 42,000(0.132/24)$$
$$I_2 = 231.00$$

Por lo que el segundo es:

$$R_2 = 3{,}000 + 231 \text{ o bien, } R_2 = \$3{,}231$$

El tercero y los demás se obtienen restando sucesivamente la diferencia entre los 2 abonos:

$$3{,}247.50 - 3{,}231.00 = \$16.50$$

diferencia que es equivalente a los intereses del último pago. ¿Por qué? Entonces,

$$R_3 = 3{,}231.00 - 16.50 \quad \text{o bien,} \quad R_3 = \$3{,}214.50$$

$$R_4 = 3{,}214.50 - 16.50 \quad \text{o bien,} \quad R_4 = \$3{,}198.00 \text{ etcétera.}$$

Note que: continuando de esta manera se llegará hasta el último que será $R_{15} = 3{,}000 + 16.50$ o bien, 3,016.50 y esto es igual a la amortización más los intereses de un periodo quincenal,

$$I = 3{,}000(0.132/24) = 16.50.$$

Intereses sobre saldos insolutos (renta fija)

En los ejemplos 3 y 4 los intereses y los pagos son variables, y se reducen conforme transcurre el tiempo. Ahora consideramos el caso en que la totalidad de intereses se divide entre el número de abonos y, en consecuencia, todos resultan iguales, por lo que el acreedor recibirá cantidades menores en la primera parte del plazo, y mayores en la segunda, comparando, claro, con lo que recibiría con rentas que decrecen.

Esta opción es más equitativa que cuando los intereses se cobran y se cargan de manera global sin considerar que la deuda se reduce en cada amortización. Se trata de una equidad que se desvanece cuando la inflación es considerablemente alta o la operación es a largo plazo.

Procediendo como en los 2 ejemplos que preceden, se obtiene una fórmula que se formula en el teorema 3.4.

Ejemplo 5

Fórmula general

Suponga que se compran computadoras con un crédito de $81,000, que se liquidan con 9 abonos mensuales con cargos del 15.6% simple anual sobre saldos insolutos. Hallar el tamaño de cada abono, suponiendo que son iguales, y los intereses.

solución

La amortización, es decir, el abono que se hace al capital con cada pago es un valor constante y está dado por:

$$A = 81{,}000/9 \quad \text{o bien,} \quad A = 9{,}000$$

que en general estará dada por $A = C/n$, donde n es el número de pagos y C la deuda original. Los intereses del último abono, como se observa en los ejemplos 3 y 4, están dados por:

$$I = 9{,}000(0.156/12) \quad \text{o bien,} \quad I = 117.00$$

que se generaliza como $I = (A)(i)$, donde i es la tasa de interés por periodo o tiempo entre un pago y otro. Este interés coincide siempre con la diferencia entre los intereses, es decir, es el valor en que se reducen los intereses de un abono al que le sigue.

Los intereses del primer periodo mensual son:

$$I_1 = 81{,}000(0.156/12) \quad \text{o bien,} \quad I_1 = \$1{,}053.00$$

Luego de hacer el primer pago, la deuda viva es:

$$81{,}000 - 9{,}000 = 72{,}000$$

y los intereses ahora son:

$$I_2 = 72{,}000(0.156/12) = 72{,}000(0.013) \quad \text{o bien,} \quad I = \$936$$

Como se dijo, la diferencia con los primeros es de \$117.00. El total que se carga por intereses es igual a la serie aritmética:

$$I = 1{,}053 + 936 + \ldots + 234 + 117$$

o bien, $I = 117 + 234 + \ldots + 936 + 1{,}053,$ ya que $a + b = b + a$

La suma, por lo tanto, se evalúa con la fórmula del teorema 2.2, donde $n = 9$, el número de términos, es decir, de pagos. El primer término es $a_1 = 9{,}000(0.013) = 117$ y esto es igual tanto a la diferencia común como a los intereses del último pago.

$$S_9 = (9/2)[2(117) + (8)(117)] \qquad S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_9 = (9/2)(1{,}170) \quad \text{o bien,} \quad S_9 = 5{,}265$$

Al dividir entre 9, el número de pagos, se obtienen los intereses de cada uno $I = 5{,}265/9$ o $I = 585$, que al sumarse con cada amortización la renta o el pago mensual resulta:

$$R = 9{,}000 + 585 \quad \text{o bien,} \quad R = \$9{,}585$$

Note que la suma de intereses en general es:

$$S_n = I = (n/2)[2(Ai) + (n-1)Ai] \qquad a_1 = Ai = d, \text{ la diferencia común}$$

$$I = (n/2)Ai[2 + n - 1] \qquad \text{se factoriza } Ai$$

$$I = (n/2)(C/n)i(n+1) \qquad A = C/n$$

$$I = (Ci/2)(n+1) \qquad \text{se cancela } n$$

Para los intereses de cada periodo, este resultado se divide entre n, el número de pagos, luego se suma la amortización C/n y se obtiene el valor de cada pago, esto es:

$$R = \frac{(Ci/2)(n+1)}{n} + \frac{C}{n}$$

$$R = \frac{Ci(n+1)}{2n} + \frac{2C}{2n} \qquad C/n = 2C/2n$$

Se factoriza $C/2n$ y se obtiene la fórmula del siguiente.

Teorema 3.4

Una deuda C se amortiza con n pagos periódicos iguales, según la ecuación:

$$R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$$

donde:

i es la tasa de interés simple por periodo sobre saldos insolutos, y

R es el abono periódico, la *renta*.

Note que:

- El saldo insoluto se mantiene fijo desde que se hace un pago hasta inmediatamente antes de hacer el siguiente, es decir, los intereses se vuelven efectivos hasta que se realiza el pago.
- Esta fórmula es útil para relacionar un capital C, no necesariamente una deuda, al inicio del plazo con n pagos, que se hacen al final de cada periodo devengando un interés*simple sobre saldos insolutos*.
- Es aproximada porque se distribuyeron los intereses de manera uniforme, y en realidad son mayores en la primera parte del plazo.

Ejemplo 6

Compruebe el ejemplo 5 con la fórmula del teorema 3.4.

solución

Los valores a sustituir en la fórmula $R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$ son:

$C = 81,000$, la deuda inicial

$n = 9$, el número de pagos mensuales

$i = 0.013$, la tasa de interés simple mensual

Entonces,

$$R = (81,000/18)[(9 + 1)(0.013) + 2] \quad 2n = 2(9) = 18$$

$$R = (4,500)(0.13 + 2)$$

$$R = (4,500)(2.13) \quad \text{o bien,} \quad R = \$9,585$$

que es igual al que se obtuvo en el ejemplo 5.

Ejemplo 7

Amortización de un crédito con interés simple sobre saldos insolutos


Un crédito se amortiza con 20 abonos semanales fijos de \$3,750 e intereses del 0.0325% simple diario. Determine:

a) El valor del crédito, es decir, el capital.

b) El total que se paga por intereses.

solución

Para obtener el valor del crédito en la ecuación 3.5 se reemplazan:

R por 3,750, la renta o pago semanal
n por 20, el número de abonos
$i = 0.000325(7)$ o bien, $i = 0.002275$, la tasa de interés semanal.

Entonces:

$$3{,}750 = (C/40)[(20 + 1)(0.002275) + 2]$$
$$3{,}750(40) = C(0.047775 + 2)$$
$$150{,}000 = C(2.047775)$$

de donde: $C = 150{,}000/2.047775$ o bien, $C = \$73{,}250.24$

b) Los intereses son la diferencia entre el capital recibido en el crédito y el total que se pagó en los 20 abonos.

$$I = 20(3{,}750) - 73{,}250.24 \quad \text{o bien,} \quad I = \$1{,}749.76$$

Relación entre interés simple e interés global

Si en el ejemplo 7 los intereses se dividen entre el crédito, se obtiene la tasa de *interés global* total g:

$$g = 1{,}749.76/73{,}250.24$$
$$g = 0.02388743 \quad \text{o bien,} \quad 2.388743\%, \text{ aproximadamente,}$$

y al dividir esto entre los 20 periodos semanales, se obtiene la tasa de interés global semanal:

$$0.02388743/20 = 0.001194372 \text{ o bien, } 0.1194372\%$$

De aquí que para obtener una fórmula genérica para relacionar las tasas de interés global y simple en amortización con interés simple, se observa lo siguiente:

La tasa global es $g = I/C$ donde los intereses son $I = nR - C$; esto es, el total que se paga en los n abonos, menos el capital que originalmente se debe, y por eso al sustituir queda:

$$g = (nR - C)/C \qquad g = I/C$$
$$g = nR/C - C/C \quad \text{o bien,} \quad g = (n/C)R - 1 \qquad C/C = 1$$

Pero la renta, según el teorema 3.4, está dada por:

$R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$	por lo tanto, al sustituir queda
$g = (n/C)(C/2n)[(n + 1)i + 2] - 1$	$g = (n/C)R - 1$
$g = (1/2)[(n + 1)i + 2] - 1$	se cancelan n y C
$g = (1/2)(n + 1)i + (1/2)2 - 1$	$a(b + c) = ab + ac$
$g = (n + 1)(i/2)$	$(1/2)i = i/2$ y se cancela el 1

que se formula en el siguiente. . .

Teorema 3.5

La tasa de interés global total g en amortizaciones con interés simple y pagos iguales es:

$$g = (n + 1)(i/2)$$

donde i es la tasa de interés simple por periodo y n es el número de pagos o periodos.

Ejemplo 8

Interés global en la amortización de un crédito

En el ejemplo 7, la tasa de interés global total, según el teorema 3.5, es:

$g = (20 + 1)(0.002275/2)$

$g = 0.0238875$ o bien, 2.3887%, igual a la que se obtuvo antes.

Ejemplo 9

Comparación de tasas al comprar un automóvil

A Juan le ofrecen un automóvil a crédito con 30 mensualidades e interés global total del 15%, y en otra agencia se lo venden con el 12% de interés simple anual, ¿qué le conviene más?

solución

La tasa por periodo mensual en la segunda opción es $i = 0.12/12$ o bien, $i = 0.01$, y el número de pagos es 30, entonces la tasa global total equivalente, según el teorema 3.5, es:

$g = (30 + 1)(0.01/2)$ $\quad g = (n + 1)(i/2)$

$g = 0.155$ o bien, 15.5%

Como éste es mayor que el 15% de la primera opción, ahí compra el automóvil. Note usted que no importan la magnitud de los pagos ni el precio del automóvil.

Saldo insoluto

Para liquidar de inmediato una deuda o para refinanciarla completamente antes de amortizarla, es necesario conocer el saldo insoluto al efectuar un pago cualquiera.

Este saldo es igual a la multiplicación de una amortización C/n por el número de abonos que faltan al efectuar el pago k-ésimo y si n es el total de pagos, entonces $n - k$ son los que faltan. Entonces:

Teorema 3.6

En la amortización de una deuda con interés simple, luego de hacer el k-ésimo abono, el saldo insoluto está dado por:

$$S = (n - k)(C/n)$$

donde:

n es el número de pagos y

C es la deuda original

Note que: no intervienen los intereses.

Ejemplo 10

Saldo insoluto, tasa de interés simple



La compañía Empaques del Norte, S. A. de C. V., adquiere una póliza de seguro contra incendio a un precio de \$79,800, pagaderos en 12 abonos quincenales vencidos de \$7,000cada uno. ¿Con cuánto la liquidará al realizar el quinto pago? ¿y cuál es la tasa de interés simple anual?

solución

En el teorema 3.6 se reemplazan:

a) n por 12, el número de abonos quincenales; k por 5 y C por \$79,800, el precio de la póliza. El saldo insoluto luego de hacer el quinto pago, es entonces:

$$S = (12 - 5)(79{,}800/12)$$

$$S = 7(6{,}650) \text{ o bien, } S = 46{,}550$$

El quinto pago, incluidos los intereses, es de \$7,000; entonces, para cancelar la deuda al efectuar este abono se pagarán:

$$46{,}550 + 7{,}000 = \$53{,}550$$

b) La tasa de interés simple anual se obtiene con la fórmula del teorema 3.5; sin embargo, se encuentran antes los intereses y la tasa global. Los intereses son la diferencia entre el total que se pagará y el costo de la póliza:

$$I = 12(7{,}000) - 79{,}800 \text{ o bien, } I = \$4{,}200$$

La tasa global total es entonces:

$$g = 4{,}200/79{,}800 \quad \text{o bien,} \quad g = 0.052631579$$

y la de interés simple i por quincena es i de la siguiente ecuación

$$0.052631579 = (12 + 1)(i/2) \qquad g = (n + 1)(i/2)$$

de donde (0.052631579) (2/13) = i

o bien, $i = 0.008097166$ o bien, 0.8097166% por quincena

La anual es:

$$0.008097166(24) = 0.194331984$$

o bien, 19.4332% aproximadamente

Ejercicios 3.6

1. Explique lo que significa *amortizar* un crédito.

2. ¿Cuál es la característica primordial de las amortizaciones de esta sección?

3. Explique brevemente las distintas clases de amortización que se estudiaron en esta sección.

4. ¿Cómo obtiene los pagos decrecientes en la amortización con interés simple sobre saldos insolutos?

5. ¿Qué es el saldo insoluto cuando se amortiza una deuda?

6. ¿Para qué sirve encontrar el saldo insoluto?

***7.** ¿Cómo se obtiene el valor de cada pago en la amortización con tasa global total?

8. ¿Cómo se obtiene cada pago constante o congelado, cuando se amortiza una deuda con interés simple sobre saldos insolutos?

***9.** ¿Cómo se relaciona la tasa global total con la tasa de interés simple por periodo o tiempo que hay entre un pago y otro?

10. ¿Para qué sirve la ecuación que relaciona la tasa de interés simple por periodo con la tasa global total?

11. ¿Cómo se desglosa un abono al cancelar una deuda?

12. ¿Cuál es la diferencia entre amortización y abono?

13. ¿Será posible que la amortización sea menor que los intereses, en un pago para cancelar un crédito?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

14. ¿De qué otras maneras se llama al saldo insoluto?

15. ¿De cuánto es el abono quincenal que amortiza una deuda de $25,000 si los intereses son de $3,750 y el plazo es de 15 meses? Considere tasa global de interés.

16. En el problema 15, ¿cuál es la tasa global total? ¿Y la global quincenal?

17. ¿De cuánto es cada uno de los 15 abonos mensuales que cancelan un crédito de $35,000, si se consideran intereses del 1.2% global mensual?

18. El 40% del precio de un automóvil se paga al comprarlo, y el resto con 25 abonos mensuales de $4,000 con cargos del 0.92% global mensual. ¿Cuál es el precio del vehículo?

***19.** Determine los 3 primeros pagos mensuales que amortizan un crédito de $35,600, si se c onsideran intereses del 1% mensual sobre saldos insolutos. Suponga que son 10 y decrec en.

***20.** ¿A cuánto ascienden los intereses de un crédito de $43,000 que se amortizan con 13 abonos quincenales, considerando que se cargan intereses del 0.6% simple quincenal sobre saldos insolutos?

21. El último de los 25 abonos mensuales que decrecen y amortizan un crédito es de $2,950. ¿Por cuánto fue el crédito si se consideran intereses del 14.4% simple anual sobre saldos insolutos?

***22.** Encuentre los otros 24 abonos en el problema 21.

23. Una pizzería compra una flotilla de motocicletas con un anticipo de $30,000 y el resto con 10 abonos mensuales, de los cuales el último es de $5,250. ¿Cuál es el precio de contado de la flotilla, si se cargan intereses del 1.2% mensual sobre saldos insolutos?

24. En el problema 23, ¿de cuánto resulta cada pago si todos son iguales y no se paga enganche?

25. Un agricultor compra un tractor de $375,000, con un anticipo del 30% y 14 abonos mensuales iguales. ¿De cuánto es cada uno si le cargan intereses del 7.3% simple anual sobre saldos insolutos?

26. ¿Con cuántos abonos quincenales de $3,250 se cancela una deuda de $25,473, considerando intereses del 11.04% simple anual sobre saldos insolutos?

27. Sandra compró un automóvil con una tasa del 9.6% simple anual. Poco después se enteró de que en otro lado se lo ofrecían con el 8% global total. Considerando un plazo de año y med io y que los abonos son mensuales, ¿estará arrepentida de haberlo tratado donde lo compró?

En los problemas 28 a 37, seleccione la opción correcta y justifíquela.

28. ¿De cuánto es el pago mensual que amortiza un crédito de $36,400, si los intereses son de $3,900 y el plazo es de 13 meses? Considere una tasa global de interés.

a) $3,190 *b*) $3,050 *c*) $3,100 *d*) $3,250 *e*) Otra

29. Un crédito de $11,547.72 se amortiza con 6 pagos semanales de $1,950 cada uno. ¿Cuál es la tasa de interés global semanal?

a) 0.21978% *b*) 0.22095% *c*) 0.21123% *d*) 0.23232% *e*) Otra

***30.** ¿Cuál fue el precio de una trilladora que se paga con un anticipo del 35% y 15 abonos mensuales de $60,000, considerando intereses del 13.2% global?

a) $1'228,904.07 *b*) $1'223,158.47 *c*) $1'305,429.53 *d*) $1'198,983.03 *e*) Otra

31. ¿Cuántos pagos de $3,050 son necesarios para amortizar un crédito de $21,500, considerando que en total por intereses se pagarán $2,900?

a) 7 *b*) 8 *c*) 9 *d*) No es número entero *e*) Otra

32. Es el valor del primer abono mensual que cancela una deuda de $9,800 con cargos del 11.64% de interés simple anual sobre saldos insolutos, suponiendo que son cinco.

a) $2,068.43 *b*) $2,055.06 *c*) $2,043.50 *d*) $1,996.45 *e*) Otra

***33.** ¿Cuántos pagos semanales de $3,228.80 se necesitan para amortizar un préstamo de $25,600 con interés simple anual del 10.4% sobre saldos?

a) 9 *b*) 8 *c*) 10 *d*) No es número entero *e*) Otra

34. Un crédito automotriz de $125,000 se amortiza con 24 mensualidades. ¿De cuánto es cada una si se cargan intereses del 1.5% simple mensual sobre saldos insolutos?

a) $6,262.62 *b*) $5,985.36 *c*) $6,205.42 *d*) $6,184.90 *e*) Otra

35. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago 17 en el problema 34?

a) $35,429.72 *b*) $36,458.33 *c*) $37,293.67 *d*) $31,250 *e*) Otra

36. Carlos compra una lancha de motor con un anticipo del 40% y 10 abonos mensuales iguales de $30,200 con cargos del 12.96% anual sobre saldos insolutos. ¿Cuál es el precio de contado?

a) $512,308.22 *b*) $475,111.70 *c*) $501,629.32 *d*) $487,223.03 *e*) Otra

***37.** ¿Cuántos pagos bimestrales de $8,720 se requieren para amortizar un crédito de $88.000 con intereses del 9% simple anual sobre saldos?

a) 10 *b*) 12 *c*) 11 *d*) No es número entero *e*) Otra

3.7 Ejemplos de aplicación

Si bien es cierto que los ejemplos que preceden en esta sección son verdaderas aplicaciones del interés y del descuento simple, ahora se proponen y se resuelven algunas aplicaciones más específicas de estos temas, que al menos servirán para enriquecer lo que hasta ahora se ha aprendido. Estas aplicaciones están relacionadas con las inversiones en los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), la forma en la que se calculan los intereses que se cargan en las tarjetas de crédito y la adquisición de cartera por vencer, esto es el **factoraje**, el cálculo de utilidades o pérdidas en inversiones en Unidades de Inversión (UDIS) y otras.

Certificados de la Tesorería de la Federación CETES

Los Certificados de la Tesorería de la Federación, CETES, son títulos de crédito al portador con denominación en moneda nacional, títulos que se emiten por primera vez en el mes de noviembre de 1977, cuando se publicó en el Diario Oficial el decreto que autorizaba a la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, SHCP, su emisión. Esta secretaría está facultada para colocarlos con descuento o a la par y también determina los montos, rendimientos, plazos, condiciones de colocación y otras condiciones específicas de cada emisión.

Los CETES se emiten con plazos de 28, 91, 182 o 180 y 364 o 360 días y esporádicamente a 7 y 14 días y hasta 2 años de plazo.

Se subastan los martes a través del Banco de México que previamente lanza una convocatoria al público en general, entregándolos a las casas de bolsa y los bancos que ofrezcan más dinero por ellos, esto es a quienes le cobren más barato por prestarle.

Estos certificados son papel en dinero con alta liquidez ya que pueden cobrarse rápidamente y por eso son muy solicitados, además el riesgo para los inversionistas es bajo, aunque depende básicamente de las condiciones económicas del país y particularmente de la capacidad que tenga el gobierno para pagarlos al vencimiento.

Además de constituir el medio por el que el gobierno consigue dinero prestado, tienen la función de regular las tasas de referencia en el mercado del dinero, ya que en muchos préstamos las tasas de interés que se cargan se basan en la tasa con la que se ofrecen los CETES, cumpliendo un papel semejante al que hacen las tasas de interés interbancaria de equilibrio, TIIE.

Inversión en CETES

Ejemplo 1

Valor comercial de los CETES

Calcular el valor comercial, el día de su colocación en la Bolsa Mexicana de Valores, de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) que se emiten a un plazo de 28 días, con un valor nominal de $10 y un 5.5% de descuento simple anual.

solución

Los valores a reemplazar en la Fórmula del descuento simple, teorema 3.3 son:

$M = \$10$, el valor nominal

$d = 0.055$, la tasa de descuento simple anual

$n = 28/360$, el plazo en años o 28 días

El valor comercial es, entonces,

$P = 10[1 - (28/360)(0.055)]$ $\quad P = M(1 - nd)$

$P = 10(0.995722222)$ o bien, $P = \$9.9572$, redondeando.

Ejemplo 2

Ganancias, tasa de interés en CETES y otra alternativa de inversión

Una persona que logró un premio de 3.5 millones de pesos en los Pronósticos Deportivos adquiere CETES a un plazo de 182 días y descuento del 6.3% simple anual.

a) ¿A cuánto ascienden sus ganancias?

b) ¿Con qué tasa de interés simple anual estará ganando?

c) ¿Le conviene más comprar centenarios que aumentan su cotización en 0.15% cada semana?

solución

a) El valor comercial de los certificados, cuyo valor nominal es de $10, se obtiene con el teorema 3.3:

$$P = 10[1 - (182/360)(0.063)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P = 10(0.96815) \text{ o bien,}$$
$$P = \$9.6815$$

El total de certificados que adquiere es:

$$3'500{,}000/9.6815 = 361{,}514.2282 \quad \text{o bien,} \quad 361{,}514$$

A los 182 días recibirá, por lo tanto,

$$361{,}514(10) = \$3'615{,}140.00$$

Sus utilidades en dinero, sin descontar impuestos y otros gastos, son

$$3'615{,}140 - 3'500{,}000 = \$115{,}140$$

b) Para determinar la tasa de interés simple que ganaría en su inversión se utiliza la fórmula del interés simple, donde $M = 10$, $C = 9.6815$ y $n = 182/360$

$$10 = 9.6815[1 + (182/360)i] \quad M = C(1 + ni)$$

por lo que la tasa de interés simple anual i será

$$10/9.6815 - 1 = (182/360)i \quad \text{de donde}$$
$$0.032897795(360)/182 = i$$
$$0.065072562 = i \quad \text{o bien,} \quad 6.507256\% \text{ simple anual}$$

c) Por cada peso que invierta en la compra de centenarios en 182 días, es decir, 1/2 año o 26 semanas, tendrá

$$(1)(1 + 0.0015)^{26} = \$1.039740101$$

Es decir, que su inversión crece un 3.974% en las 26 semanas, mientras que con los CETES crece un 3.2898% aproximadamente, porque el incremento, como se vio en el ejemplo 13 de la sección 1.8, es:

$$(10/9.6815 - 1)100 = (0.032897795)100$$
$$= 3.2897795\%$$

Por lo tanto, le es más redituable invertir en centenarios.

El factoraje

Otro ejemplo de operaciones que se realizan con descuento es *el factoraje,* que es un servicio que ofrecen algunos organismos, las empresas de factoraje, para ayudar a solventar los problemas de liquidez de las personas morales y físicas, comprando sus documentos por cobrar.

Por supuesto que este servicio lleva consigo un riesgo para quien adquiere la cartera por cobrar, a quien se denomina *factor,* y un costo por comisiones que el *cedente,* el que vende la cartera, paga al factor por el privilegio de disponer de una parte de su dinero, antes de la fecha de vencimiento.

Es evidente que el capital que el cedente recibe del factor en la compraventa es menor que el valor consignado en el documento, su valor nominal M. Los cálculos se realizan tomando como base el *aforo* o *valor aforado,* el cual oscila entre el 70 y 95% del valor nominal d el documento. La diferencia entre los dos, el valor aforado y el valor nominal, se liquida hast a la fecha de vencimiento y generalmente no se considera en los descuentos y comisiones que se originan en la operación de compraventa.

Cabe señalar que la magnitud de las comisiones y los descuentos depende de la empresa de Factoraje, así como de la calidad y la solvencia del organismo deudor.

En el siguiente ejemplo se ilustra lo anterior.

Ejemplo 3

Adquisición de cartera por cobrar (factoraje)

El 10 de abril el administrador de Frigoríficos del Sureste, S. A., acude a una empresa de factoraje para negociar 2 documentos. El primero tiene un valor nominal de $90,000 y vence el 11 de junio, y el segundo tiene un valor de $75,000 y vence el 25 de julio. ¿Cuánto recibe por los 2 documentos si le cobran el 0.6% de comisión, le descuentan el 6.084% simple anual y el valor aforado es el 90% del valor nominal?

solución

En la figura 3.8 se aprecian las fechas, los plazos que se obtienen con la tabla del apéndice B y las cantidades en miles de pesos.

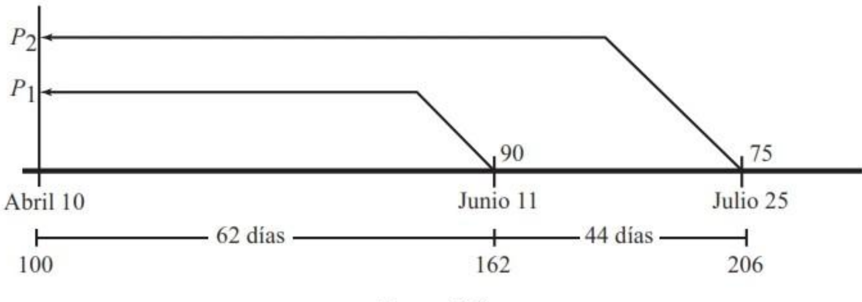


FIGURA 3.8

El valor aforado del primer documento es el 90% de su valor nominal:

$$0.90(90,000) = \$81,000$$

y el valor comercial, 62 días antes es:

$$P_1 = 81,000[1 - (62/360)(0.06084)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P_1 = 81,000(0.989522)$$
$$P_1 = \$80,151.282$$

El aforo del segundo es:

$$0.90(75,000) = \$67,500$$

y el valor comercial 106 días antes es:

$$P_2 = 67,500[1 - (106/360)(0.06084)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P_2 = 67,500(0.982086)$$
$$P_2 = \$66,290.805$$

La comisión es del 0.6% del total aforado:

$$0.006(81,000 + 67,500) = \$891$$

en consecuencia, la cantidad que el administrador recibe, por parte de la empresa de factoraje, es:

$$80,151.28 + 66,290.80 - 891 = \$145,551.09$$

Tarjeta de crédito

La tarjeta de crédito es el instrumento de uso más generalizado para conseguir dinero en efectivo o comprar a crédito bienes y servicios, la cual puede convertirse, cuando se tienen saldos en favor por parte del usuario, en herramienta de ahorro e inversión, aunque con muy bajos intereses.

Cada banco tiene sus propios sistemas para evaluar los intereses que se devengan por el uso de la tarjeta de crédito. A continuación se presenta uno, ilustrado con un ejemplo, donde se supone que la fecha de corte es el séptimo día de cada mes.

Los intereses de un mes cualquiera son iguales a la suma de las siguientes 2 cantidades.

a) Los intereses que se obtienen tomando como base el saldo promedio diario (SPD), según las compras y disposiciones del mes anterior.

b) Los intereses del saldo insoluto promedio diario del periodo mensual actual.

Si este saldo resulta negativo, es decir, cuando el usuario hace depósitos que sobrepasan el saldo anterior y las disposiciones, el banco generalmente abona con una tasa de interés menor a la tasa con la que hace los cargos.

Ejemplo 4

Cargo por intereses en tarjeta de crédito

¿Cuánto pagó un tarjetahabiente por concepto de intereses en el periodo comprendido del 8 de abril al 7 de mayo? Su saldo anterior fue de $725.28; el 12 de marzo anterior hizo una compra de $350 con cargo a su tarjeta en una tienda de autoservicio; el 23 de marzo dispuso de $400 en el cajero automático, y el 1 de abril pagó $275 por consumo en alimentos. Considere, además, que hizo 2 abonos de $300 cada uno el 15 y el 30 de abril, y la tasa que el banco le carga por intereses es del 5.31 % mensual.

solución

Se recomienda repasar el ejemplo 6 de la sección 1.6 para calcular el saldo promedio diario.

En la figura 3.9 se representan las fechas, los plazos y las cantidades de las compras y disposiciones del mes anterior.

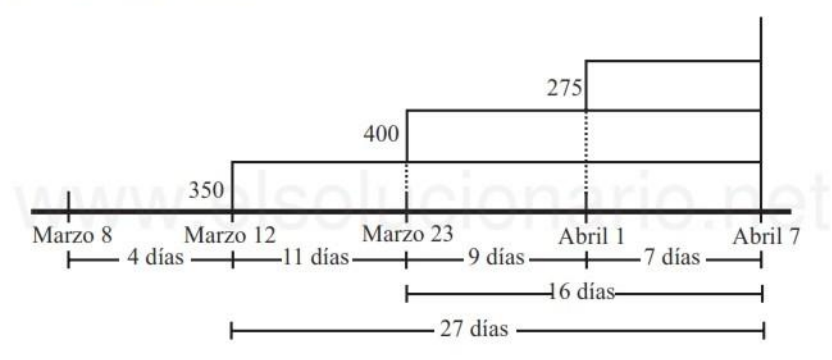


FIGURA 3.9

Los primeros $350 generan intereses durante 27 días, entre el 12 de marzo y el 7 de abril; los $400 siguientes durante 16 días y los últimos $275 solamente durante 7 días, tal como se presenta en la figura 3.9. El saldo promedio diario es, por lo tanto,

$$SPD = \frac{350(27) + 400(16) + 275(7)}{31}$$

$$SPD = \frac{17,775}{31}$$

$$SPD = \$573.39$$

y los intereses son:

$$573.39(0.0531) = \$30.45$$

Note que los cargos se hacen efectivos el mismo día en que se realizan, por eso el plazo incluye las fechas inicial y terminal.

Para los otros intereses se calcula el saldo insoluto promedio por día en el presente periodo, con el auxilio de la figura 3.10, donde se indican los 2 abonos, el saldo al principio del mes y el saldo final.

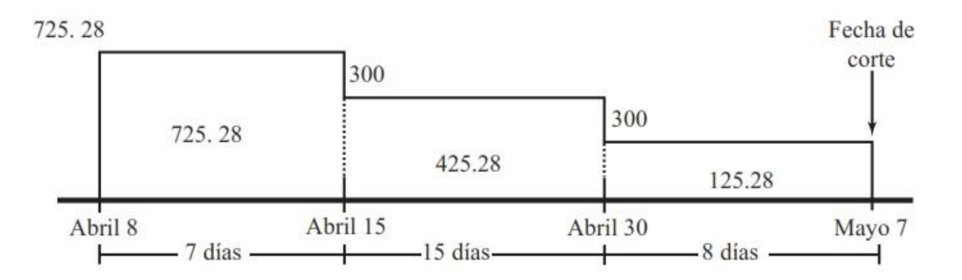


FIGURA 3.10

Por lo que

$$\frac{725.28(7)+425.28(15)+125.28(8)}{30}=\$415.28$$

Siendo los intereses ahora:

$$415.28(0.0531) = 22.051368$$

El cargo total por concepto de intereses es, por lo tanto,

$$I = 30.45 + 22.05$$
$$I = \$52.50$$

Note que el último saldo promedio diario puede llegar a ser negativo, lo que daría lugar a que los intereses se redujeran.

Por ejemplo, si el 15 de abril se abonan $900, en vez de los $300, el saldo será:

$$\frac{725.28(7)+(-174.72)(15)+(-474.72)(8)}{30}=-\$44.72$$

y los intereses:

$$I = (-44.72)(0.0531)$$
$$I = -\$2.375$$

Otra manera de evaluar los intereses de un periodo en la tarjeta de crédito consiste en hacerlo de manera directa y común, considerando los depósitos, el saldo al inicio del plazo y las disposiciones del mes, tal como se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5

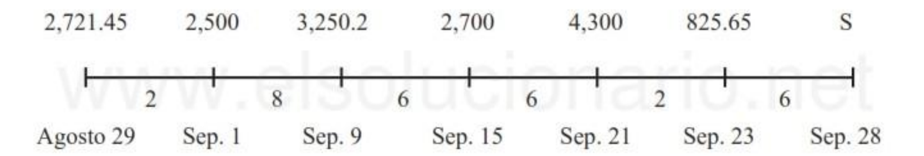
Suponga que el día 28 de cada mes es la fecha de corte de cada periodo y los movimientos en la tarjeta de un banco que cobra con el 5.73% simple mensual son los siguientes, donde además existe un saldo al inicio del periodo a favor del banco por $2,721.45.

	Cargos	Abonos	
Agosto 29	2,721.45	---	Saldo anterior
Septiembre 1	---	2,500	Abono a la cuenta
Septiembre 9	3,250.20	---	Pago en el súper
Septiembre 15	---	2,700	Abono a la cuenta
Septiembre 21	4,300	---	Retiro de cajero automático
Septiembre 23	825.65		Consumo de alimentos

¿Cuál es el saldo al final del periodo mensual?

solución

Un diagrama de tiempo con cantidades de dinero, fechas y plazos en días es el siguiente.



Se obtiene el monto o valor acumulado al 28 de septiembre primero de cada cargo y luego de los 2 abonos, con la Fórmula del interés simple.

$$M_1 = 2{,}721.45(1 + 30(0.0573/30)) = 2{,}877.39$$
$$M_2 = 3{,}250.20(1 + 20(0.00191)) = 3{,}374.36$$
$$M_3 = 4{,}300.00(1 + 8(0.00191)) = 4{,}365.70$$
$$M_4 = 825.65(1 + 6(0.00191)) = 835.11$$
$$M_5 = 2{,}500(1 + 28(0.00191)) = 2{,}633.70$$
$$M_6 = 2{,}700(1 + 14(0.00191)) = 2{,}772.20$$

Entonces el saldo al final del periodo es:

$$S = M_5 + M_6 - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)$$
$$S = 5{,}405.90 - 11{,}452.56 = -\$6{,}046.66$$

Recuerde que debe hacerse un pago mínimo y para no generar intereses este saldo debe liquidarse completamente antes de una fecha que el mismo banco determina.

Unidades de Inversión (UDIS)

En abril de 1995 se crearon en México las Unidades de Inversión (UDIS) con el propósito primordial de auxiliar a los deudores de la banca mexicana en la reestructuración de sus deudas.

Su valor original fue de un peso por cada unidad, pero se diseñaron para incrementar su valor de acuerdo a la inflación declarada por el Banco de México y por eso pueden considerarse como una opción para los inversionistas que ganan paralelamente a los índices inflacionarios y además con las tasas de interés que se ofrece en esta clase de inversiones, usualmente inferiores a los que se ofrecen en otras formas de inversión. Se han convertido en una carga adicional para quienes tienen sus deudas en estas unidades, ya que además de pagar intereses, digamos normales, su deuda se ve incrementada por los efectos inflacionarios reflejados en las UDIS.

Veamos 2 ejemplos que expliquen con detalle el cálculo de las utilidades en esta clase de inversiones.

Ejemplo 6

Valor futuro de inversiones en UDIS



¿Cuál fue el monto acumulado el 12 de noviembre si el 11 de febrero anterior se invirtieron $350,000 en UDIS, considerando que el banco paga el 3.05% de interés simple anual en este tipo de inversiones, que el 11 de febrero las UDIS se cotizaron en $4.563190 y este valor se incrementa en 0.018% en promedio por día.

solución

En la primera tabla del apéndice se observa que el 12 de noviembre es el día 316 del año y el 11 de febrero es el 42, entonces el plazo es 316 – 42 = 274 días.

El valor futuro de la inversión es entonces,

$$M = 350{,}000(1 + 274(0.0305/360)) \qquad M = C(i + ni)$$

$$M = 350{,}000(1.023213889) \text{ o bien, } M = 358{,}124.8612$$

Ahora bien, las UDIS incrementan su cotización en 5.0551812% porque si el incremento diario es del 0.018% en promedio, entonces en los 274 días será:

$$r = (1 + 0.00018)^{274} \text{ o bien, } r = 1.050551812$$

En consecuencia, el monto que se busca con este incremento en las UDIS será:

$$M = 358{,}124.8612\ (1.050551812) \text{ o bien, } M = \$376{,}228.72$$

Solución alterna

El valor de cada UDI al 12 de noviembre es:

$$V = 4.563190(1.00018)^{274} \text{ o bien, } V = 4.793867523$$

y el número de unidades que se adquieren con los $350,000 iniciales es:

$$350{,}000/4.563190 = 76{,}700.729$$

Con la tasa de interés dada este número se incrementa a

$$N = 76,700.729(1 + (274(0.0305/360))$$
$$N = 76,700.729(1.023213889) \text{ o bien, } 78,481.25131 \text{ UDIS}$$

por lo que el banco debería pagar:

$$78,481.21731\ (4.793867523) = \$376,228.72 \text{ que es igual al anterior.}$$

Note usted que para lograr este monto los $350,000 deberían invertirse en una cuenta que bonifique el 9.8460263 simple anual porque

$$376,228.72 = 350,000(1 + (i/360)274)$$

de donde para despejar la incógnita i, el 350,000 se pasa dividiendo, luego el 1 pasa restando, el 274 dividiendo y finalmente el 360 multiplicando

$$i = [(376,228.72/350,000 - 1)/274]360$$
$$i = (0.0749392/274)360 \text{ o bien, } i = 0.098460263$$

Este resultado es más del triple de la tasa dada, 3.05% y es por eso que la situación en la actualidad es complicada para quienes reestructuraron sus deudas en UDIS.

Nota: el porcentaje de incremento dado en el problema es un porcentaje muy cercano a la realidad en las fechas que se dan en el ejemplo, es decir, al comienzo del año 2011.

Compras a plazos y sin intereses

Frecuentemente nos enteramos que una práctica común de los comerciantes consiste en ofrecer sus bienes o servicios a pagarse a plazos y sin intereses, pero esto no necesariamente es cierto, porque al mismo tiempo ofrecen un descuento si se paga de contado, veamos el siguiente caso.

Ejemplo 7

Una agencia automotriz anuncia la venta de un automóvil con el 23.5% de enganche y 12 mensualidades fijas de $12,750, sin cargo de intereses y un descuento del 12% si se paga de contado, ¿pero qué tasa de interés se estaría cargando realmente?

solución

Suponiendo que no hay intereses, el financiamiento del vehículo será simplemente

$$12(12,750) = 153.000$$

y el precio será 153,000/0.765 = 200,000 porque el enganche es del 23.5% y 1 − 0.235 = 0.765.

Al pagarlo de contado resulta un descuento de $D = 0.12\ (200,000) = 24,000$.

Quiere decir que el desembolso único para el comprador del automóvil es:

$$200,000 - 24,000 = \$176,000$$

Por otro lado, el total que se paga con 12 mensualidades y el enganche es:

$$153,000 + 47,000 = 200,000$$

dado que el anticipo fue:

$$0.235(200,000) = 47,000$$

La diferencia entre las 2 cantidades es un cargo, un costo para el cliente, y éstos son los intereses que supuestamente no existían

$$I = 200,000 - 176,000 \text{ o bien, } I = \$24,000$$

La tasa global total en la operación de compraventa es:

$$g = 24,000/176,000 \qquad g = I/C$$

o bien, $g = 0.136363636$

y la tasa de interés simple mensual se obtiene con la fórmula del teorema 3.5, con $n = 12$

$$0.136363636 = (13)\, i/2 \qquad g = (n + 1)\, i/2$$

de donde $i = 0.136363632(2)/13$

$i = 0.020979021$ o bien, 2.0979021% simple mensual.

Ejercicios 3.7

***1.** ¿Cuál es el monto acumulado al 4 de noviembre de 2015, suponiendo que el 20 de enero anterior se invirtieron $175,000 en unidades de inversión (UDIS)? Considere que el banco, en esta clase de inversiones, paga intereses del 3.16% simple anual. El 20 de enero las UDIS se cotizaron en $5.182350 y el 4 de noviembre de 2015 en $5.280531, y que las inversiones en UDIS se manejan con interés simple ordinario y tiempo real.

***2.** En el problema 1, ¿cuál será el monto acumulado al 20 de diciembre de 2016, suponiendo que ese día cada UDI se cotiza en $5.310728 y la tasa de interés se mantiene?

3. En el problema 1, ¿cuál será el monto al 10 de febrero del 2018 considerando que las UDIS aumentan su cotización con la inflación del 0.37% mensual y la tasa de interés no varía?

4. ¿Qué le conviene más a un inversionista, depositar su dinero en cuenta bancaria que reditúa con el 9.13% de interés simple anual o invertir en UDIS en las condiciones del problema 1?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***5.** El valor de las UDIS al 12 de febrero de 2011 fue de $4.563518 y se estima que el mismo día del año 2012 será de $4.623032. ¿Cuántas UDIS tendrá el licenciado González, si el banco reditúa el 2.75% simple anual en estas operaciones y si invirtió $65,000 el 12 de febrero de 2011?

***6.** ¿Cuánto paga un usuario de tarjeta de crédito por concepto de intereses en el periodo de corte del 29 de agosto al 28 de septiembre, si su saldo anterior fue de $3,885.65 y registra los movimientos siguientes?

Fecha	Movimiento	Tipo del movimiento
3 de agosto	$2,500	Disposición en efectivo
16 de agosto	$1,850	Servicio mecánico
25 de agosto	$1,450	Compra en tienda departamental
30 de agosto	$1,350	Abono a tarjeta
17 de septiembre	$2,000	Abono a tarjeta

Suponga intereses del 5.13% simple mensual, para el periodo anterior y del 5.19% para el presente.

7. ¿Cuánto pagó por concepto de intereses un tarjetahabiente en el periodo comprendido del 10 de febrero al 9 de marzo de 2013, si le cargan un interés del 5.75% simple mensual y, además, se tiene la siguiente información?

Saldo anterior: $1,675.25

Fecha	Compras y disposiciones	Abono
12 de enero	$850.00	
17 de enero	$1,425.50	
1 de febrero		$1,500.00
8 de febrero	$2,000.00	
15 de febrero		$1,400
20 de febrero		$2,350
1 de marzo	$528.30	

8. ¿Con qué tasa de descuento se colocaron en el mercado de valores los CETES, cuyo valor nominal es de $10, a un plazo de 182 días y con valor comercial de $9.72?

9. ¿Cuál es el precio de los CETES en su emisión a plazo de 91 días, con valor nominal de $10 y 5.03% de descuento simple anual?

10. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual que gana un inversionista al adquirir CETES en las condiciones del problema 9?

***11.** ¿Cuánto recibirá la compañía Bicicletas del Centro, S. A., 25 días antes del vencimiento de 2 documentos, cuyo valor total es de $180,000. La empresa de factoraje le aplica el 11.4% de descuento simple anual, le carga el 0.45% de comisión y le da el 90% del valor total?

12. El 3 de diciembre el señor Ornelas acude a una empresa de factoraje para negociar un documento con valor nominal de $48,000, cuyo vencimiento es el 20 de febrero siguiente. ¿Cuánto recibe si le descuentan el 12.48% simple anual, aforo del 92.5% y comisiones del 0.5%?

***13.** Calcule los días que faltan para el vencimiento de un pagaré con valor nominal de $105,000, suponiendo que se negocia en $93,025 considerando el 90% de aforo, el 0.65% de comisión y el 13.2% de descuento simple anual.

14. Un pagaré con valor nominal de $19,350 se comercializa en $18,500 el 3 de diciembre. ¿Qué día vence si se descuenta el 6.6% de interés simple anual?

En los problemas 15 a 32 seleccione la opción correcta, justificando la respuesta.

15. ¿Cuánto paga un usuario de tarjeta de crédito por concepto de intereses en el periodo de corte del 29 de noviembre al 28 de diciembre, si el saldo anterior fue de $1,248.35 y registró los siguientes movimientos? Suponga intereses del 20.5% simple mensual y que el saldo promedio diario del mes anterior fue de $3,567.88.

Fecha	Movimiento	Detallemovimientos
Diciembre 2	$450.00	Disposición en efectivo
Diciembre 6	$3,294.00	Ferrematariales López
Diciembre 8	$1,275.00	Juguetirama
Diciembre 16	$619.50	Vinos La Playa
Diciembre 22	$2,000.00	Su abono
Diciembre 23	$725.40	Superama

a) $1,643.92 *b*) $1,758.74 *c*) $1,793.83 *d*) $1,908.80 *e*) Otra

16. ¿Con qué tasa de descuento simple anual se colocaron en el mercado de valores los CETES con plazo de 182 días y valor comercial de $9.75? Recuerde que el valor nominal de los CETES es de $10.00.

a) 5.15214% *b*) 6.00735% *c*) 4.94505% *d*) 5.52758% *e*) Otra

17. ¿Cuál es la tasa de interés simple con la que gana un inversionista al adquirir CETES, con las condiciones del problema 16?

a) 5.07185% *b*) 5.23432% *c*) 4.98603% *d*) 4.83091% *e*) Otra

***18.** ¿Cuánto recibe de ABBA-FACTOR el 2 de marzo el gerente de la Distribuidora de Llantas, por 2 documentos que vencen el 22 de julio y el 5 de septiembre siguientes, con valor nominal de $56,350 y $62,500, respectivamente? Considere el 0.5% de comisión, el 11.2% de descuento comercial y el 85% de aforo.

a) $97,629.23 *b*) $95,815.80 *c*) $95,310.69 *d*) $98,128.42 *e*) Otra

19. Un documento con valor nominal de $125,650 se transfiere con un descuento total de $11,150. ¿Cuál es la tasa de descuento comercial anual si la operación se efectúa 8 meses antes de su vencimiento?

a) 13.3108% *b*) 13.9205% *c*) 12.8709% *d*) 13.0041% *e*) Otra

20. ¿En cuánto se negocia el 25 de noviembre un pagaré con valor nominal de $9,603 y vencimiento al 3 de abril del año siguiente? Suponga el 7.2% de descuento simple anual.

a) $9,148.78 *b*) $8,993.06 *c*) $9,355.24 *d*) $9,080.04 *e*) Otra

***21.** ¿Aproximadamente cuántos días faltan para el vencimiento de un documento con valor nominal de $98,750, considerando que se negocia en $89,041, y un 92% de aforo, un 0.68% de comisión y 10.98% de descuento simple anual?

a) 51 *b*) 48 *c*) 43 *d*) 40 *e*) Otra

22. Un directivo de un famoso club de fútbol compra centenarios con una inversión de $110,500. ¿Con qué tasa de interés simple deberá invertir su dinero para lograr las mismas utilidades, si las monedas aumentan su valor 1.2% cada trimestre? Considere 15 meses de plazo.

a) 5.20931% *b*) 4.20255% *c*) 4.91659% *d*) 5.01235% *e*) Otra

23. ¿Cuál es el precio de un automóvil que se compra con un anticipo del 30% y 24 mensualidades de $6,575? Considere intereses del 1.2% global mensual.

a) $175,022.18 *b*) $173,921.35 *c*) $165,039.00 *d*) $180,421.45 *e*) Otra

***24.** El arquitecto Gutiérrez compra una revolvedora de concreto y la paga con 5 mensualidades de $9,800, efectuando la primera el día de la compra. ¿Cuál es el precio si le cargan intereses del 6.72% global total?

a) $45,928.93 *b*) $46,098.32 *c*) $46,943.03 *d*) $47,059.23 *e*) Otra

25. El primero de los 15 pagos semanales que amortizan un crédito con intereses del 18.20% anual sobre saldos insolutos es de $6,060. ¿Por qué cantidad fue tal crédito?

a) $86,365.80 *b*) $84,903.42 *c*) $90,235.00 *d*) $85,198.21 *e*) Otra

26. Tractocamiones de Occidente ofrece una de sus unidades con un crédito de $875,000, 4 abonos bimestrales e intereses del 10.3% simple anual sobre los saldos. ¿De cuánto es cada pago si son iguales?

a) $225,308.62 *b*) $230,489.05 *c*) $215,220.04 *d*) $228,138.02 *e*) Otra

27. En el problema 26, ¿de cuánto es el primer abono si decrecen?

a) $235,309.28 *b*) $233,770.83 *c*) $232,095.03 *d*) $238,921.43 *e*) Otra

28. ¿Cuánto se paga por intereses en el problema 26?

a) $37,552.08 *b*) $45,239.23 *c*) $40,925.41 *d*) $38,929.47 *e*) Otra

29. El último de los 10 abonos mensuales que amortizan una deuda es de $10,275. Considerando cargos del 19.2% de interés simple anual sobre saldos insolutos, determine el valor del crédito al inicio del plazo.

a) $103,008.38 *b*) $98,629.36 *c*) $101,131.89 *d*) $100,328.08 *e*) Otra

30. ¿De cuánto será cada renta en el problema 29, si fueran iguales?

a) $10,489.01 *b*) $11,629.08 *c*) $10,862.95 *d*) $11,003.15 *e*) Otra

31. En el problema 29, ¿de cuánto será la primera renta, si los cargos son del 15.06% global total?

a) $10,352.23 *b*) $10,098.23 *c*) $11,005.91 *d*) $10,896.23 *e*) Otra

***32.** ¿Cuál es el monto acumulado en pesos al 12 de febrero de 2011 si el 8 de octubre anterior se invirtieron $275,000 en UDIS, unidades de inversión? Suponga intereses del 2.95% simple anual que el 8 de octubre las UDIS se cotizaron en $4.45154 y el 12 de febrero en $4.563518.

a) $296,492.05 *b*) $285,221.12 *c*) $227,374.32 *d*) $232,129.32 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Obtener el monto, el capital, los intereses, el plazo y la tasa de interés en operaciones con interés simple, mediante la fórmula:

$$M = C(1 + in)$$

- Calcular el descuento, la tasa de descuento, el plazo y el valor descontado enoperaciones con descuento comercial, mediante la fórmula:

$$P = M(1 - nd)$$

- Relacionar el interés simple anual con el interés global mediante la fórmula:

$$g = (n + 1)(i/2)$$

- Obtener el saldo insoluto de una deuda, al final de cualquier periodo en operaciones a plazos con interés simple, mediante la fórmula:

$$S = (n - k)C/n$$

- Tomar la mejor decisión en operaciones financieras con interés simple.
- Conocer algunas formas de calcular intereses en tarjetas de crédito, compra de CETES, inversiones en UDIS, factoraje, etcétera.

Conceptos importantes

Amortización con interés simple
Capital, valor presente, valor actual o principal
Diagramas de tiempo
Interés
Interés simple e interés compuesto
Interés y descuento simple exacto y comercial
Monto, valor futuro, montante, valor acumulado o monto del capital
Plazo o tiempo en operaciones de carácter financiero
Saldo insoluto
Tasa de interés

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas 1 a 7, conteste verdadero o falso.

1. El interés simple es más productivo que el interés compuesto. __________
2. Tasa de interés e interés son sinónimos. __________
3. Un capital que se invierte al 14% simple anual crece 28% en 2 años. __________
4. Descuento y valor descontado son sinónimos. __________
5. Un crédito de $7,000 se amortiza con 10 abonos mensuales de $700 a un interés del 12% simple anual. __________
6. El valor descontado de un documento 60 días antes de su vencimiento, cuyo valor nominal es de $10,000 es $9,735, cuando la tasa de descuento es del 15.4% simple anual. __________
7. Cuando se invierte al 16% simple anual se generan intereses iguales a los de una inversión al 4% simple trimestral. __________

En los problemas 8 a 13 complete la frase.

8. Un capital se duplica en 4 años, si se invierte con un tipo de interés del __________ simple anual.
9. El dinero que se paga por el uso del dinero que no es propio se llama __________.
10. El monto que se acumula en 6 meses al 10% simple anual es $ __________, donde el valor presente es $23,250.
11. Para acumular $250,000 en 14 meses al 11.7% simple anual, se necesita una inversión de __________.
12. Cuando sólo el capital devenga interés, se denomina interés __________.
13. El valor comercial de un documento, con valor nominal de $35,000, 70 días antes de su vencimiento, con descuento del 14.65% simple anual es $ __________.

14. ¿Con qué tasa de interés simple anual se cancela un préstamo de $28,200, pagando $30,900 a los 9 meses?

15. ¿Cuánto debe invertirse el 5 de abril al 6.6% de interés simple anual, para disponer de $13,000 el 21 de agosto siguiente?

***16.** ¿Con cuánto se liquida un crédito de $25,000 el 10 de febrero, si el 3 de enero anterior se abonaron $15,000 y se carga un interés del 9.6%? Suponga que el crédito se consiguió el 15 de noviembre del año anterior.

***17.** Obtenga el tamaño de 3 pagos iguales a 1, 2 y 3 meses de que se consiguió, para amortizar el crédito del problema 16.

18. El 23 de octubre se negocia en $18,750 un documento con valor nominal de $20,800. ¿Cuál es la fecha de vencimiento, si se descontó al 9.3% simple anual?

***19.** ¿Qué tasa de interés simple anual se gana al invertir en CETES a 28 días, si se ofrece el 5.08% de descuento simple anual?

20. ¿Cuánto debe invertirse el 3 de febrero, al 5.18% de interés simple anual para disponer de $35,000 el 9 de mayo siguiente? Considere un interés simple comercial con tiempo aproximado.

21. Con un descuento simple comercial y tiempo real, encuentre el valor comercial de un documento con valor nominal de $27,500, el 10 de octubre, si vence el 5 de enero siguiente. Suponga que se descuenta el 12.72% simple anual.

22. El 12 de febrero de 2011, las UDIS se cotizaron en $4.563518. Ese día se invirtieron $750,000 en tales unidades en un banco que abona el 2.75% de interés simple anual. ¿Cuál será el monto acumulado al 12 de febrero de 2015, suponiendo que las UDIS aumentan su cotización a la par que la inflación y que ésta se considera del 0.37% mensual en promedio?

***23.** ¿Cuál es el saldo promedio diario y cuánto paga por concepto de intereses un tarjetahabiente en el periodo del 5 de junio al 4 de julio, si tuvo los siguientes movimientos y le cargan el 5.8 % simple mensual en su tarjeta de crédito?

Fecha	Compras y disposiciones	Abono
7 de mayo	$750.00	
12 de mayo	$1,275.00	
18 de mayo	$428.35	
24 de mayo	$1,724.00	
2 de junio		$2,000.00
8 de junio	$2,150.00	
14 de junio		$1,200.00
30 de junio		$500.00

Considere $275.50 de saldo anterior, como cargo al usuario.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

24. ¿Qué le conviene más a un inversionista, adquirir CETES a 182 días de plazo y un descuento simple anual del 5.08% o invertir su dinero en una cuenta bancaria que paga el 0.45% de interés simple mensual?

***25.** El 5 de junio el administrador de una compañía acude a una empresa de factoraje para negociar 2 documentos. Uno tiene un valor nominal de $72,000 y vence el 10 de septiembre, el otro vence el 23 de octubre y su monto nominal es de $93,000. ¿Cuánto recibe por los 2, si le cobran el 0.7% de comisión, el 13.2% de descuento simple anual y el valor aforado es el 92% de su valor nominal?

***26.** ¿De cuánto es cada pago mensual que amortiza un crédito de $126,000 en un año y medio con un interés del 12.3% simple anual sobre saldos insolutos? Suponga que los pagos decrecen con los intereses.

27. ¿Cuál es el precio de un automóvil seminuevo que se adquiere con un anticipo del 40% y 18 mensualidades de $6,300 cada una, y que incluyen intereses de 1.75% global mensual.

28. Se compra una motocicleta en $37,250 con un pago inicial del 30% y 10 abonos mensuales que decrecen con los intereses del 15% mensual sobre saldos insolutos. ¿De cuánto es cada pago?

***29.** ¿De cuánto es una deuda que se amortiza con 15 pagos quincenales que decrecen con los intereses del 13.2% simple anual sobre saldos insolutos? Suponga que el primer pago es de $4,250 y obtenga los siguientes dos.

30. Con cargos del 15.6% simple anual sobre saldos insolutos, el precio de un tractor se amortiza con 18 mensualidades de $18,000. Obtenga el total que se paga por concepto de intereses y el precio de contado.

***31.** ¿Cuál es el saldo insoluto luego de efectuar el pago 15 de un crédito que se amortiza con 20 mensualidades de $6,500 e intereses del 14.1% simple anual? ¿Cuál es la tasa global total?

¿A cuánto ascienden los intereses que se cargan?

En los problemas 32 a 41 elija la opción correcta justificando su elección.

32. ¿Cuánto se acumula en 7 meses si se invierten 60 mil pesos devengando intereses del 4.8% simple anual?

a) $62,096 *b*) $61,680 *c*) $60,760 *d*) $61,920 *e*) Otra

33. ¿En cuántos días un capital crece 15% si se invierte con el 6.03% simple anual?

a) 632 *b*) 787 *c*) 954 *d*) 895 *e*) Otra

34. Un crédito en abarrotes por 43,298 pesos se cancela con $ 44,845.36, 48 días después. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual?

a) 14.4382% *b*) 15.8207% *c*) 16.9113% *d*) 13.8319% *e*) Otra

35. El administrador de una empresa negocia el 3 de septiembre 2 documentos; el primero con valor nominal de $93,800 y vencimiento al 25 de enero, y el segundo con valor de 71,750 vence el 12 de abril. ¿Cuánto recibe por los 2 si le descontaron el 11.6% simple anual?

a) $158,841.82 *b*) $146,939.40 *c*) $156,088.28 *d*) $158,043.08 *e*) Otra

***36.** Resuelva el problema 35 considerando descuento simple exacto con tiempo aproximado.

a) $157,107.49 *b*) $ 156,323.12 *c*) $156,890.43 *d*) $158,997.08 *e*) Otra

37. ¿De cuánto es cada uno de los 15 abonos mensuales iguales que amortizan un crédito auto - motriz de $165,300 con intereses del 1.6 % global mensual?

a) $14,534.80 *b*) $13,893.40 *c*) $13,135.84 *d*) $12,008.30 *e*) Otra

***38.** ¿Cuántos abonos quincenales de $ 7,503.53 amortizan una deuda de $120,000 con intereses del 16.8% simple anual sobre saldos insolutos?

a) 14 *b*) 15 *c*) 17 *d*) No es entero *e*) Otra

39. Para instalar un ciber-café el señor Sánchez consigue un préstamo que amortiza con 14 pagos mensuales de $12,650 e intereses del 12.6% simple anual sobre saldos. ¿Por cuánto dinero fue el empréstito?

a) $176,705.74 *b*) $164,171.50 *c*) $180,408.21 *d*) $165,042.98 *e*) Otra

40. ¿Cuánto pagó por intereses el señor Sánchez del problema 39?

a) $11,624.35 *b*) $11,792.43 *c*) $12,394.26 *d*) 12,928.50 *e*) Otra

41. En el problema 39, ¿de cuánto sería el primer abono si los abonos son decrecientes?

a) $12,786.43 *b*) $13,289.32 *c*) $13,450.34 *d*) $14,169.64 *e*) Otra



Capítulo 4

Interés compuesto

Contenido de la unidad

Si, por ejemplo, en una inversión a plazo fijo no se retiran el capital ni los intereses que se generaron, entonces éstos pueden agregarse al capital, por lo que a partir del segundo periodo producirán sus propios intereses; y si esto continúa, el capital en la inversión, al comenzar un periodo cualquiera, será mayor que el que se tenía al iniciar el periodo anterior. Se trata de la característica esencial del *interés compuesto*, la cual lo hace diferente del *interés simple*, en cuyo caso sólo el capital original genera intereses, es decir, al comenzar cualquier periodo el capital es constante, es el mismo.

Si bien es cierto que el interés compuesto ha existido desde siempre, se puso de manifiesto, al menos en nuestro país, con el llamado *anatocismo*, cuando los deudores de la banca no pudieron liquidar sus deudas, ya que aun estando al corriente en sus pagos, el capital que debían, en vez de reducirse, crecía

cada vez más, por lo que se buscaron otras formas para liquidarlas. El interés compuesto no es más que una aplicación importante de las progresiones geométricas que se estudiaron en el segundo capítulo y, a manera de introducción y repaso, consideremos lo siguiente.

4.1 Introducción, el anatocismo

Suponga que la población del país aumenta un 3% cada año. ¿Cuánto crecerá en 3 años?

Si A es la población inicial, entonces, al terminar el primer año o iniciar el segundo, la población será:

$$A_2 = A_1 + 0.03A_1$$
$$A_2 = (1 + 0.03)A_1 \quad \text{o bien,} \quad A_2 = (1.03)A_1$$

Al comenzar el tercero, será:

$$A_3 = A_2 + 0.03A_2$$
$$A_3 = (1.03)A_2 \qquad \text{Se factoriza } A_2$$
$$A_3 = (1.03)[(1.03)A_1] \qquad \text{porque } A_2 = (1.03)A_1$$

o bien, $$A_3 = (1.03)^2A_1 \qquad \text{porque } a(a) = a^2$$

y en el cuarto será:

$$A_4 = A_3 + 0.03A_3$$
$$A_4 = (1.03)A_3$$
$$A_4 = (1.03)^3A_1 \qquad \text{¿por qué?}$$

Es decir, $A_4 = (1.092727)A_1$ o $A_4 = (1 + 0.092727)A_1$ y esto representa un incremento del 9.2727% con respecto a la población original. ¿ por qué? Este porcentaje es mayor que lo que resulta de multiplicar el incremento anual por 3, es decir, 9.2727 es mayor que 9, pues se trata de incrementos sobre incrementos.

Advertencia

Cuando la variación de los valores es uniforme y se expresa como un tanto por ciento, se dis - tinguen 2 tasas de crecimiento, o reducción, la que corresponde al porcentaje dado, el 3% d el incremento anual en la población del ejemplo, y la que resulta de dividir cualquier términ o, es decir, cualquier valor, entre el que le precede, 1.03 en el mismo ejemplo. Ésta, el 1.03, es la que se aplica en las fórmulas de las progresiones geométricas, denotándola como r, la razón común, y estará dada en general por $r = 1 + v$, donde v es el porcentaje del incremento en la sucesión de valores.

Variación constante

Ejemplo 1

Inflación anual dada la bimestral



Si la inflación bimestral promedio durante 6 bimestres ha sido del 0.8%, ¿de cuánto será la del año?

solución

Suponga que, el primer día del año, el precio de cualquier artículo de la canasta básica fue de C_1 pesos; entonces, al final del primer bimestre, es decir, al comenzar el segundo, el precio de dicho artículo es un 0.8% mayor:

$$C_2 = C_1 + 0.008C_1$$
$$C_2 = (1 + 0.008)C_1 \quad \text{o bien,} \quad C_2 = (1.008)C_1$$

Al final del segundo o inicio del tercero, el precio crece otro 0.8%:

$$C_3 = C_2 + 0.008C_2$$
$$C_3 = (1.008)C_2$$
$$C_3 = (1.008)[(1.008)C_1] \quad \text{sustituyendo} \quad C_2 \text{ por } (1.008)C_1$$
$$C_3 = (1.008)^2C_1 \quad a(a) = a^2$$

Al final del tercer bimestre, el precio será:

$$C_4 = (1.008)C_3$$
$$C_4 = (1.008)[(1.008)^2C_1] \quad \text{o bien,} \quad C_4 = (1.008)^3C_1$$

Notando que el exponente de 1.008 es igual al subíndice de C menos 1, se tiene que, al final del año, al iniciar el séptimo bimestre el precio del artículo será:

$$C_7 = (1.008)^6\,C_1 \quad C_7 = (1.048970302)C_1 \text{ que se expresa como}$$
$$C_7 = (1 + 0.048970302)C_1 \quad \text{o como} \quad C_7 = C_1 + 0.048970302C_1$$

lo cual representa un incremento aproximado del 4.89703% con respecto al precio original.

En consecuencia, la inflación en el año es del 4.89703%, que es mayor al 4.8% que es el resultado de multiplicar la mensual por 6.

Note que C_7 y cada uno de los anteriores corresponde a los primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = C_1$ y $r = 1 + 0.008$ o $r = 1.008$, la razón común, y por eso C_7 puede obtenerse con la fórmula del teorema 2.3

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

Es evidente que si la variación no es uniforme, es decir, que el incremento, o decremento, de un término a otro sea diferente, se procede evaluándolos uno por uno, lo cual resulta tedioso sobre todo cuando son muchos valores, aunque también puede evaluarse al menos de forma aproximada con un promedio ponderado de los incrementos. Se aprecia en el ejemplo 2.

Variación no constante

Ejemplo 2

Porcentaje de inflación cuatrimestral


¿En qué porcentaje se habrá perdido el poder adquisitivo de la moneda en el primer cuatrimestre del año si en los meses de enero a abril se perdió 0.5, 0.45, 0.53 y 0.48 respectivamente?

solución

Si al iniciar el mes de enero, o más precisamente al finalizar el mes de diciembre anterior, se compraban k_1 kilogramos de un artículo con mil pesos, digamos, al finalizar enero se compraba un 0.5% menos, es decir,

$$k_2 = k_1 - 0.005\ k_1$$

donde k_1 son los kilogramos que se compraban al iniciar el año.

Se factoriza k_1 y se efectúa la resta:

$$k_2 = k_1(1 - 0.005) \text{ o bien, } k_2 = k_1(0.995)$$

A finales de febrero se compra un 0.45% menos con los supuestos mil pesos, esto es:

$$k_3 = k_2 - 0.0045\ k_2 \text{ o bien, } k_3 = k_2(0.9955)$$

$$k_3 = [k_1(0.995)](0.9955) \text{ porque } k_2 = k_1(0.995)$$

Al concluir el mes de marzo esto se reduce a otro 0.53% y por eso:

$$k_4 = k_3(1 - 0.0053)$$

$$k_4 = k_3(0.9947)$$

donde al sustituir el valor de k_3 resulta:

$$k_4 = [k_1(0.995)(0.9955)](0.9947)$$

Finalmente, al término del cuatrimestre, a finales del mes de abril se pueden adquirir k_5 kilogramos del artículo, un 0.48% menos que el mes anterior.

$$k_5 = k_4(1 - 0.0048)$$

$$k_5 = k_4(0.9952)$$

$$k_5 = [k_1(0.995)(0.9955)(0.9947)](0.9952)$$

$$k_5 = k_1(0.995)(0.9955)(0.9947)(0.9952)$$

$$k_5 = k_1(0.980543422)$$

Note que esto se hizo para expresar a k_5 en términos de k_1.

Se resta la unidad dentro del paréntesis para darnos cuenta que se puede escribir como

$$k_5 = k_1(1 - 0.19456578 \quad \text{o como} \quad k_5 = k_1 - 0.019456578\ k_1$$

Quiere decir que al final del cuatrimestre se puede adquirir solamente un 98.054342% de lo que se compraba al comenzar el año. El poder de compra de la moneda se perdió por lo tanto en 1.9456578% en el cuatrimestre.

Note que este porcentaje es menor que el que resulta de sumar los 4 mensuales, 1.96%, ¿por qué?

Ejemplo 3

Incremento salarial para recuperar el poder de compra



¿De qué porcentaje deberá ser el incremento salarial al finalizar el año, si el poder de compra de un empleado se reduce 0.6, 0.58, 0.53, 0.49, 0.56 y 0.44% respectivamente cada bimestre?

solución

Con base a la solución del ejemplo 2 al final del año se podrá comprar

$$k_7 = k_1(1 - 0.006)(1 - 0.0058)(1 - 0.0053)(1 - 0.0049)(1 - 0.0056)(1 - 0.0044)$$

$$k_7 = k_1(0.9940)(0.9942)(0.9947)(0.9951)(0.9944)(0.0056)$$

$$k_7 = k_1(0.968422767)$$

Quiere decir que al final del año el empleado puede adquirir el 96.8422767% de lo que lograba al comenzar el mismo año.

Ahora bien, si v es el incremento que debe tener k_7 para recuperar el valor de k_1 el poder de compra original, debe cumplirse que:

$$k_7 + vk_7 = k_1$$

$$k_7\,(1 + v) = k_1$$

es decir, $$k_1(0.968422767)(1 + v) = k_1$$

porque $$k_7 = k_1(0.968422767)$$

para despejar v se divide entre k_1 y se elimina. El coeficiente de $1 + v$ se pasa dividiendo y finalmente el 1 pasa restando.

$$0.968422767\,(1 + v) = 1$$

$$1 + v = 1/0.968422767$$

$$v = 1.032606867 - 1,\ v = 0.032606867$$

Consecuentemente, el incremento que deberá tener el empleado al final del año en cuestión, es del 3.2606867%.

Note que no importa el valor de k_1, el salario al comenzar el año, porque se elimina en el desarrollo anterior.

Ejemplo 4

Porcentaje del incremento en ventas

a) ¿En qué porcentaje han crecido las ventas de una exportadora de artesanías en sus primeros 6 años, si del primero al segundo año crecieron 3%; del segundo al tercero, un 3.7%, y sucesivamente 5.2%, 7.1% y 10.5%?

b) ¿De cuánto serán sus ventas en el sexto año, si en el primero exportó $750,300 dólares?

solución

a) Suponga que las ventas en el primer año fueron V_1 dólares, en el segundo fueron un 3% mayores, por lo tanto:

$$V_2 = V_1 + 0.03V_1 \quad \text{o bien,} \quad V_2 = (1.03)V_1$$

En el tercero son un 3.7% mayores, por lo que:

$$V_3 = (1.037)V_2$$
$$V_3 = (1.037)(1.03V_1) \quad \text{porque} \quad V_2 = 1.03V_1$$

En el cuarto y los siguientes años, las ventas son:

$$V_4 = (1.052)(1.037)(1.03V_1)$$
$$V_5 = (1.071)(1.052)(1.037)(1.03V_1) \text{ y}$$
$$V_6 = (1.105)(1.071)(1.052)(1.037)(1.03V_1)$$
$$V_6 = (1.329791246)V_1 \quad \text{o bien,} \quad V_6 = (1 + 0.329791246)V_1$$

que representan un incremento total del 32.98% aproximadamente en los 6 años. Se trata de un incremento que es mayor al 29.5% que resulta de sumar los 5 porcentajes.

b) Las ventas en el sexto año, si en el primero fueron de US$750,300, con los incrementos dados, son:

$$V_6 = (1.329791246)(750,300)$$
$$V_6 = \text{US\$}997,742.37$$

Se recomienda repasar y resolver los problemas de aplicación que se vieron en la sección 2.4 considerando que la variación no es constante.

Ejemplo 5

¿En cuántos puntos porcentuales se reduce la deuda externa del país en un sexenio si se ha reducido en 1.06% cada semestre en promedio?

solución

Si D_1 es la deuda al iniciar el primer semestre, al inicio del segundo, es decir, al final del primero será:

$$D_2 = D_1 - 0.0106\ D_1$$
$$D_2 = D_1(1 - 0.0106) \text{ o bien, } D_2 = D_1(0.9894)$$

Al final del segundo semestre es:

$$D_3 = D_2(1 - 0.0106)$$
$$D_3 = D_2(0.9894)$$
$$D_3 = D_1(0.9894)(0.9894) \text{ o bien, } D_3 = D_1(0.9894)^2$$

porque $D_2 = D_1(0.9894)$

Continuando de igual manera y notando de nuevo que el exponente del paréntesis es uno menos que el subíndice de D, se ve que al final del sexenio la deuda externa será:

$$D_{13} = D_1(0.9894)^{12}$$
$$D_{13} = D_1(0.879959881)$$

que puede escribirse como $D_{13} = D_1(1 - 0.120010119)$ y esto representa una reducción total del 12.0040119% en el sexenio.

Ejercicios 4.1

1. ¿Cuánto crece la población nacional en un trienio si crece en promedio un 1.7% anual?
2. ¿De cuántos puntos porcentuales será el incremento anual del producto interno bruto, PIB, si es del 18.3% en un periodo de 7 años?
3. Las ventas del comercio informal crecen 3.7% en el primer año, 4.3% en el segundo, 2.9% en el tercero y 1.2% en el cuarto, pero se redujeron 0.9% y 1.6% en el quinto y sexto respectivamente. ¿Cuál fue la variación en el sexenio?
4. ¿Cuál será el valor estimado de las unidades de inversión, UDIS, al final de un periodo de 10 años si aumentan su valor en 0.0182% por día en promedio? Suponga que al inicio del decenio se cotizaron en $5.986321 cada una.
5. La compañía Teléfonos Celulares, S. A., aumentó el número de usuarios en 7.3% y 7.5% en los primeros 2 años, 7.65 y 8.2% en los siguientes 2, y 7.48, 8.25 y 9.15% respectivamente, en los últimos 3. ¿De qué porcentaje fue el incremento en el periodo de los 7 años?

6. En el problema 5, ¿cuál es la tasa del incremento anual si fuera uniforme durante los 7 años?

7. ¿Cuánto crece un capital en 2 años si crece 0.85% cada bimestre en promedio?

8. ¿De cuánto dinero dispondrá una persona al término de 2 años en las condiciones del problema 7, si al inicio invierte $75,000?

9. ¿En qué porcentaje se redujo el desempleo cada trimestre si en 2 años decreció un 7.5% considerándolo uniforme?

10. ¿Cuántos automóviles se producirán en el año 2020 si en 2014 se fabrican 370,000 y la producción crece 2.5% cada año?

***11.** ¿En qué año se llegarán a fabricar 510,050 automóviles en las condiciones del problema 10?

12. Si la deuda externa de un país se reduce 2.35% cada año, ¿en cuántos años se liquida totalmente?

En los problemas 13 a 20 conteste falso o verdadero justificando su respuesta.

13. Si un capital crece 0.63% cada bimestre, entonces en un año crecerá 3.78%. ________

14. El desempleo en 2011 fue del 11.3% de la población productiva, entonces en 2025 no habrá desempleados. ________

15. El PIB de un país crece a razón de 3.52% anual, entonces en un sexenio crecerá 23.0681239% si se mantiene el incremento geométrico uniforme. ________

16. La inflación mensual en promedio es del 0.5766681% si es del 1.74% trimestral. _______

17. La pérdida del poder adquisitivo del salario durante un año es del 4.7142891% si se pierde 1.2% cada trimestre. ________

***18.** El incremento salarial al final de un año con las condiciones del problema 17 deberá ser del 4.7142891%. ________

19. Suponiendo que el producto interno bruto (PIB), creció 3.72% en 2009, 4.05% en 2010, 3.28% en 2011, 2.91% en 2012 y 3.25% en el 2013 entonces en el quinquenio creció 18.4318355%. ________

***20.** Si el índice de precios y cotizaciones, IPC, de la Bolsa Mexicana de Valores el lunes creció 1.3%, el martes creció 0.73%, el miércoles cerró a la baja en 0.53%, el jueves se recuperó en 0.98% y el viernes aumentó otro 1.05%, entonces en los 5 días de la semana creció 3.5695482 puntos porcentuales. ________

Justificando su elección en los problemas 21 a 32 seleccione la opción correcta.

21. Si los centenarios aumentan su valor en 1.03% en promedio cada bimestre, ¿de qué porcentaje es el incremento bianual?

a) 13.0848% *b*) 12.9538% *c*) 13.15231% *d*) 13.2352% *e*) Otra

***22.** Las ventas de una tienda departamental crecen 3.5, 3.25, 2.83, 3.70, 3.95 y 1.95% cada cuatrimestre, ¿cuánto crecerán en 2 años?

a) 20.0843% *b*) 20.7649% *c*) 21.0932% *d*) 20.4321% *e*) Otra

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

23. Una compañía de teléfonos celulares aumentó en 20.7649% el número de usuarios en un trienio, ¿cuál fue el incremento semestral considerándolo uniforme?

a) 3.0252935% *b*) 3.2230931% *c*) 3.1945562% *d*) 2.9725380% *e*) Otra

24. ¿Cuántos habitantes habría en la ciudad en 1985 si el censo nacional de población de 2010 dio como resultado la existencia de 729,501 habitantes y se considera que las cantidades han crecido en un 0.42% anual en promedio?

a) 656,932 *b*) 596,963 *c*) 648,054 *d*) 606,638 *e*) Otra

25. Con la información del problema 24, ¿cuál será la población de la ciudad en el año 2018 suponiendo que se mantiene la tasa de crecimiento?

a) 754,376 *b*) 729,051 *c*) 703,495 *d*) 748,696 *e*) Otra

***26.** El promedio final que un estudiante de ingeniería obtuvo en el primer cuatrimestre fue 8.5. ¿Cuánto logró en el octavo si del primero al segundo mejoró en un 0.85%, del segundo al tercero lo subió un 2.03% y respectivamente incrementó sus calificaciones en 0.93%, 1.05%, 0.51%, 1.23% y en el último lo bajó en un 0.75% con respecto al anterior?

a) 9.182 *b*) 9.273 *c*) 8.965 *d*) 9.008 *e*) Otra

27. ¿En qué porcentaje mejoró sus calificaciones el estudiante del problema 26 en el lapso de los 8 cuatrimestres?

a) 5.976459% *b*) 5.653215% *c*) 4.983214% *d*) 5.032970% *e*) Otra

28. En el problema 26, ¿cuál fue en promedio y el incremento en el promedio por cuatrimestre?

a) 0.9205935% *b*) 0.7573721% *c*) 0.8326877% *d*) 0.8903215% *e*) Otra

29. La industria automotriz reportó utilidades de 4,350 millones de pesos en 2012. ¿De cuánto serán en 2018 si se mantiene el incremento promedio anual del 4.05% de los últimos años?

a) 4,965.06765 *b*) 4,798.63013 *c*) 5,453.36296 *d*) 5,520.03415 *e*) Otra

***30.** ¿En qué año se alcanzará la capacidad total en la universidad, 35,850 estudiantes, si ahora tiene 31,725 y el incremento de la población estudiantil es del 1,37% anual en promedio?

a) en el decimosegundo *c*) en el noveno *e*) Otra
b) en el décimo *d*) en el decimoprimero

***31.** ¿Qué resulta más productivo para un inversionista, comprar oro cuyo valor se incrementa en 1.14% cada trimestre o invertir en una cuenta que ofrece crecer la inversión en 0.38% cada mes?

a) comprar oro *b*) invertir en la cuenta *c*) es indiferente
d) invertir en otra cuenta que ofrece 2.295% de incremento semestral
e) comprar UDIS cuyo valor crece 0.0125% cada día

32. Las ventas de una tienda departamental variaron en los siguientes porcentajes cada bimestre –2.35%, –0.98%, 4.27%,1.52%, 3.27% y 10.35% respectivamente, ¿cuál fue la variación en el año?

a) 15.9532651% *b*) 16.0354131% *c*) 16.6413848% *d*) 16.3141583% *e*) Otra

4.2 Interés compuesto

puede ser que la tasa compuesta, es decir, la tasa de interés compuesto sea variable, diferente para cada periodo; o que sea constante, la misma para todos los periodos. Si es variable se procede como en la sección anterior, y si es constante o fija entonces el procedimiento es el siguiente.

Suponga que se depositaron \$50,000 en una cuenta bancaria que paga el 12% de interés anual compuesto por mes. ¿Cuál será el monto al final de año y medio?

Decir que el interés es compuesto por meses significa que cada mes los intereses que se generan se *capitalizan*, es decir, se suman al capital.

para los intereses del primer mes, el capital se multiplica por la tasa mensual 0.12/12= 0.01, como si fuera una tasa de interés simple, y luego se suman al capital. Así resulta un monto compuesto o, simplemente, monto M_1 al final del primer mes, es decir,

$$M_1 = 50{,}000 + 50{,}000(0.01) \qquad M = C + I$$
$$M_1 = 50{,}000(1 + 0.01)$$
$$M_1 = 50{,}000(1.01) \qquad \text{o bien,} \qquad M_1 = \$50{,}500$$

Al comenzar el segundo periodo mensual, el capital es \$50,500 y no 50,000 como en el primero. El monto al terminar este segundo mes es:

$$M_2 = 50{,}500 + 50{,}500(0.01)$$
$$M_2 = 50{,}500(1 + 0.01) \qquad \text{se factoriza } 50{,}500$$
$$M_2 = 50{,}500(1.01)$$
$$M_2 = 50{,}000(1.01)(1.01) \qquad \text{ya que } 50{,}500 = 50{,}000(1.01)$$

o bien, $$M_2 = 50{,}000(1.01)^2$$

Éste es el capital al iniciar el tercer mes y al final el monto es:

$$M_3 = M_2 + (0.01)M_2 \qquad M = C + I \qquad C = M_2$$
$$M_3 = M_2(1 + 0.01) \qquad \text{o bien,} \qquad M_3 = M_2(1.01)$$
$$M_3 = [50{,}000(1.01)^2](1.01) \qquad \text{porque} \qquad M_2 = 50{,}000(1.01)^2$$
$$M_3 = 50{,}000(1.01)^3 \qquad a^2(a) = a^3$$

Es evidente que cada uno de estos 3 montos se puede expresar como el producto de los \$50,000 originales y una potencia, *n*, de 1.01 que es igual al mes que concluye. Consecuentemente, al final de año y medio, es decir, de 18 periodos mensuales, el monto es:

$$M_{18} = 50{,}000(1.01)^{18} \qquad \text{o bien,} \qquad M_{18} = C_1(1.01)^{18}$$
$$M_{18} = 50{,}000(1.196147476) \qquad \text{o bien,} \qquad M_{18} = \$59{,}807.37$$

También es cierto que si los intereses se capitalizan cada quincena, entonces el monto acumulado se incrementa, ya que en este caso el plazo es de 36 quincenas y el monto será:

$$M_{36} = 50{,}000(1 + 0.005)^{36} \qquad \text{ya que } 0.12/24 = 0.005$$
$$M_{36} = 50{,}000(1.196680525) \qquad \text{(A)}$$

o bien, $$M_{36} = \$59{,}834.03$$

Esto corrobora que si se reduce el tiempo en que los intereses se capitalizan, el monto crece, es decir, resulta ligeramente más productivo, pues los intereses generan intereses más pronto y con mayor frecuencia. Sólo para efectos de comparación, note usted que si la inversión se hace con interés simple, el monto al final es menor:

$$M = 50{,}000\,[1 + 36(0.005)] \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 50{,}000(1.18) \qquad \text{o bien,} \qquad M = \$59{,}000$$

Definición 4.1

El tiempo entre 2 fechas sucesivas en las que los intereses se agregan al capital se llama ***periodo de capitalización***, y el número de veces por año en que los intereses se capitalizan se llama ***frecuencia de conversión*** y se denota con p.

A la frecuencia de conversión se le conoce también como *frecuencia de capitalización* de intereses.

Es cierto también que si el periodo de capitalización es mensual, entonces las siguientes expresiones son equivalentes: "el interés es compuesto por meses", "capitalizable por meses", "convertible mensualmente" o "interés nominal mensual". En estas condiciones, el valor de p es 12.

Los valores más usuales para la frecuencia de conversión p, son:

$p = 1$ para periodos anuales, los intereses se capitalizan cada año

$p = 2$ si los intereses se capitalizan en periodos semestrales

$p = 3$ para periodos cuatrimestrales

$p = 4$ para periodos trimestrales, los intereses se agregan al capital cada trimestre

$p = 6$ cuando son periodos bimestrales

$p = 12$ para periodos de un mes, los intereses se capitalizan cada mes

$p = 13$ si los periodos son de 28 días y

$p = 24$, 52 y 360 o 365 para periodos quincenales, semanales y diarios, respectivamente.

Como se dijo antes, los periodos de capitalización pueden ser tan pequeños como se quiera, llegando a tasas con capitalización instantánea, en cuyo caso puede probarse que el monto estará dado por:

$$M = Ce^{in}$$

donde $e = 2.71828...$, es la base de los logaritmos naturales i es la tasa convertible instantáneamente y n es el tiempo en años.

La ecuación (A) del desarrollo anterior, puede desglosarse procediendo de manera inversa al propio desarrollo, es decir,

$$M_{36} = 50{,}000(1.196680525)$$
$$M_{36} = 50{,}000(1.005)^{36}$$
$$M_{36} = 50{,}000(1 + 0.12/24)^{36}$$
$$M_{36} = 50{,}000(1 + 0.12/24)^{1.5(24)}$$

donde 50,000 es el capital C, 0.12 es la tasa de interés i anual capitalizable por quincenas, 24 es la frecuencia de conversión p, y 1.5 es n, el plazo en años. Esto se formula en el siguiente teorema.

Teorema 4.1

El monto acumulado M de un capital C al final de np periodos es:

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

donde:

n es el plazo en años
np es el número de periodos e
i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

Esta ecuación se conoce como ***fórmula del interés compuesto***. Como en otras fórmulas, es posible que, a excepción de p, la incógnita sea cualquiera de las literales que en ella aparecen. Sin embargo, en todo caso, se despejaría antes o después de reemplazar los valores que se conocen. Tenga presente que con ciertas habilidades algebraicas es más fácil hacer el despeje después de la sustitución.

Ejemplo 1

Inversión de un capital para monto preestablecido




a) ¿Qué capital debe invertirse ahora al 12.69% anual capitalizable por bimestres para tener $40,000 en 10 meses?

b) ¿A cuánto ascienden los intereses?

solución

a) El plazo n debe estar en años, por lo que para expresar 10 meses en estas unidades se dividen entre 12, es decir, el número de meses que tiene un año. En consecuencia, el plazo en años es $n = 10/12$. La frecuencia de conversión o capitalización de intereses es $p = 6$, porque 6 son los bimestres que tiene un año. Entonces,

$$np = (10/12)6 = 5 \text{ bimestres}$$

o más fácilmente $np = 10/2$

El monto es $M = 40{,}000$, la tasa de interés es $i = 0.1269$ o 12.69% anual, capitalizable por bimestres, y la incógnita es C, la cual se despeja de la igualdad que resultó de sustituir estos valores en la ecuación del teorema 4.1:

* En la página web www.pearsoneducacion.net/villalobos se incluyen las instrucciones para calculadora financiera Hp 12C de los problemas señalados con este icono (símbolo).

$$40{,}000 = C(1 + 0.1269/6)^5 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$40{,}000 = C(1.02115)^5$$
$$40{,}000 = C(1.110318838)$$

de donde: $C = 40{,}000/1.110318838$ o bien, $C = \$36{,}025.68797$

b) Los intereses son la diferencia entre el monto y el capital

$$I = M - C$$
$$I = 40{,}000 - 36{,}025.69 \quad \text{o bien,} \quad I = \$3{,}974.31$$

Ejemplo 2

Monto con el que liquida un préstamo

¿Con cuánto se cancela un préstamo de \$65,000 3 años después si se cargan intereses del 21.36% compuesto por semestre?

solución

El capital es $C = \$65{,}000$, la tasa anual es $i = 0.2136$, la frecuencia de conversión es $p = 2$ porque el año tiene 2 semestres, $n = 3$ porque el plazo es de 3 años, el número de periodos en el plazo es $np = 6$; entonces el monto según el teorema 4.1 es:

$$M = 65{,}000(1 + 0.2136/2)^6, \qquad \text{ya que } M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M = 65{,}000(1.1068)^6$$
$$M = 65{,}000(1.838293717) \quad \text{o bien,} \quad M = \$119{,}489.04$$

Note que la tasa global total con la que gana el prestamista es del 83.8293717% ¿porqué?

Ejemplo 3

Tasa de interés para duplicar un capital



¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestres se duplica un capital en 3 años?

solución

Si el capital C se duplica en 3 años, entonces el monto es $M = 2C$, el plazo es $n = 3$, la frecuencia de conversión es $p = 6$, el número de bimestres por año y el número de periodos bimestrales en el plazo es $np = 3(6) = 18$.

$$2C = C(1 + i/6)^{18} \qquad M = C\,(1 + i/p)^{np}$$

$$2 = (1 + i/6)^{18} \qquad \text{se cancela } C \text{ y luego se suma la raíz } 18\,a$$

$$\sqrt[18]{2} = 1 + i/6 \qquad \text{ya que } \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$1.039259226 = 1 + i/6$$

Se resta 1 a ambos lados de la ecuación y después se multiplica por 6.

$$(0.039259226)6 = i$$

o bien, $i = 0.235555356$

Esto indica que para duplicar un capital en 3 años debe invertirse aproximadamente al 23.56% anual capitalizable por bimestres.

Ejemplo 4

Plazo en inversión de un capital

Ⓕ 

¿Qué día deberá invertir $10,000 el matemático Gutiérrez para disponer de $10,512.00 el 11 de mayo? Suponga que la inversión genera intereses del 13% compuesto por semanas.

solución

La incógnita es $x = np$, el plazo en semanas, la frecuencia de conversión es $p = 52$, el año tiene 52 semanas, el capital es $C = 10{,}000$ y el monto del capital es $M = 10{,}512$. Se sustituyen en la ecuación del teorema 4.1.

$$10{,}512 = 10{,}000(1 + 0.13/52)^x \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$10{,}512/10{,}000 = (1.0025)^x$$

$$(1.0025)^x = 1.0512$$

Esta ecuación se resuelve por tanteos con la tecla y^x de la calculadora electrónica, con tablas financieras, la tabla 2 de las Tablas financieras en http://www.pearsoneducacion.net/villalobos, o con logaritmos comunes o naturales, como se hizo en la sección 1.5. Se toma logaritmo natural a los 2 lados, ya que si 2 números positivos son iguales, entonces sus logaritmos son iguales.

$$\ln(1.0025)^x = \ln(1.0512)$$

de donde $(x)\ln(1.0025)^x = \ln(1.0512) \qquad \ln(A^n) = (n)\ln(A)$

$$x = \ln(1.0512)/\ln(1.0025)$$

$$x = 0.049932369/0.00249688 \qquad \text{o bien,} \qquad x = 19.99790329$$

Resultado que puede redondearse a 20 semanas, y así el monto será poco mayor de los $10,5012. pero se convierte a días multiplicándolo por 7.

$$19.99790329(7) = 139.985323$$

Es decir, 140 días que con ayuda de la tabla del apéndice B s e ve que la inversión deberá hacerse el 22 de diciembre del año anterior.

Note que:

Es importante señalar que en la práctica el exponente *np*, de la fórmula del interés compuesto, es decir, el número de periodos, semanas en este caso, deberá ser un entero para hacer efectivos los intereses del periodo.

Ejemplo 5

Valor presente de un crédito e intereses

El 25% del precio de un mueble de sala se paga con un documento con valor nominal de $4,000 y vencimiento a 30 días. Un 30% se liquida mediante un pago a 60 días de plazo, otro 30% con un documento a 90 días de la compra y el 15% restante se deja como anticipo. Obtenga:

a) El precio del mueble.

b) El anticipo y los otros 2 pagos.

c) El cargo total por intereses.

Suponga que la mueblería carga el 22.20% anual compuesto por meses en sus ventas a crédito.

solución

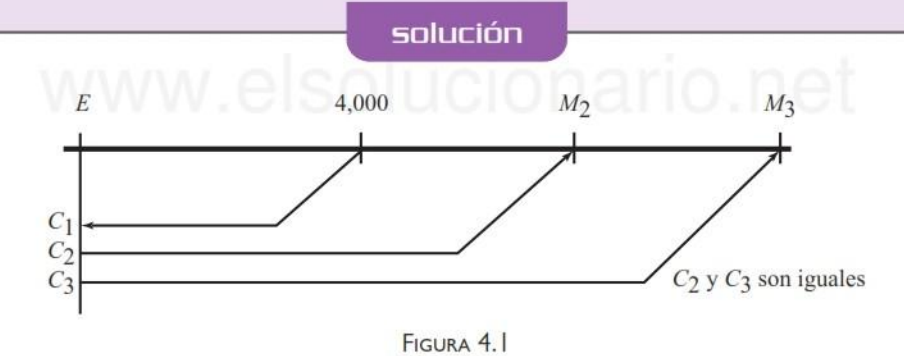


FIGURA 4.1

a) Con la ayuda del diagrama de tiempo de la figura 4.1 y la fórmula del interés compuesto se obtiene el valor presente C_1 del primer documento, el cual deberá ser igual al 25% del precio del mueble:

$$4{,}000 = C_1(1 + 0.222/12), \quad \text{el plazo es 1 mes}$$
$$4{,}000 = C_1(1.0185)$$

de donde:

$$C_1 = 4{,}000/1.0185 \ \text{ o bien, } \ C_1 = 3{,}927.344134$$

entonces,

$$(0.25)\text{precio} = 3{,}927.344134$$

de donde: $\text{precio} = 3{,}927.344134/0.25 \quad \text{o bien,} \quad \$15{,}709.38$

b) El anticipo es el 15% de este precio:

$$0.15(15{,}709.38) = 2{,}356.41$$

El 30% del precio es el valor presente del abono que se hará a los 2 meses, 60 días después de la compra:

$$C_2 = 0.30(15{,}709.38)$$
$$C_2 = 4{,}712.81$$

Entonces, el segundo pago es el valor futuro de este capital, es decir,

$$M_2 = 4{,}712.81(1 + 0.222/12)^2$$
$$M_2 = 4{,}712.81(1.03734225) \quad \text{o bien,} \quad M_2 = \$4{,}888.80$$

El valor presente del último pago es igual al del anterior y, por lo tanto, este pago es:

$$M_3 = 4{,}712.81(1.0185)^3 \quad \text{o bien,} \quad M_3 = \$4{,}979.24$$

c) Finalmente, los intereses son la diferencia entre el total pagado y el precio del mueble:

$$I = (2{,}356.41 + 4{,}000 + 4{,}888.80 + 4{,}979.24) - 15{,}709.38 \qquad I = M - C$$

o bien, $I = \$515.07$

Note que la tasa de interés global total es:

$$g = 515.07/15{,}709.38$$
$$g = 0.032787417 \quad \text{o bien,} \quad 3.2787\% \text{ aproximadamente.}$$

Ejercicios 4.2

1. Explique los conceptos de *interés compuesto, periodo de capitalización* y *frecuencia de conversión* de intereses.
2. Señale qué es más productivo, ¿invertir con interés simple o con interés compuesto? ¿ por qué?
3. ¿por qué es más redituable el 20% anual compuesto por meses, que el 20% capitalizable por trimestres?
4. ¿Qué será más productivo: 14.3% compuesto por semestres o 13.9% compuesto por semanas? ¿por qué?
5. ¿Cuánto dinero se genera por concepto de intereses en un plazo de 9 meses si al final se tienen $23,256, considerando 6.25% de intereses anual capitalizable por semanas?

*6. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de un documento que se endosó el 13 de junio, su valor nominal es de $34,365 incluyendo los intereses del 25.74% anual capitalizable por días y ampara un préstamo por $31,360.57?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

7. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por días si un refrigerador de $8,650 se paga con un enganche y $6,245 los 6 meses de la compra? Suponga que el enganche fue del 35 por ciento.

8. ¿Cuál es el monto de un pago único por el refrigerador del problema 7, a 3 meses de la compra?

9. ¿Cuál fue el costo para el comprador del problema 7 por no pagar de contado?

***10.** Se compran 12 computadoras y equipos periféricos con un anticipo del 40%, un pago a los 7 meses de $75,000 que corresponden al 35% del precio de contado, y otro a 5 meses después del anterior. ¿por qué cantidad es este pago si se cargan intereses del 18.9% capitalizable por meses?

***11.** En el problema 10, ¿de cuánto será cada uno de los 2 pagos posteriores a la compra si el primero es un 20% menor que el último?

12. Obtenga los intereses, es decir, el costo por no pagar de contado en el problema 11.

***13.** ¿Cuál de las siguientes alternativas es más productiva para un empresario?

a) Invertir en una cuenta que le ofrece el 4.2% capitalizable por meses con el atractivo de pagarle 7 meses de rendimiento contratando 5.

b) Llevar su dinero a una institución financiera que le ofrece 5.77% de interés anual capitalizable por semanas.

c) Comprar centenarios cuya cotización crece a razón del 0.0159% cada día.

En los problemas 14 a 20 conteste verdadero o falso justificando su elección.

14. En un periodo anual se gana más con intereses del 6.3% anual capitalizable por meses que con el 6.4% de interés simple anual. __________

15. Un capital de $60,350 que se presta con el 15.9% anual capitalizable por días genera intereses de $7,641.64 en 9 meses. __________

16. Invertir un capital de 13.26% anual capitalizable por semanas es más productivo que invertirlo al 0.255% semanal capitalizable por semanas. __________

17. Si un documento con valor nominal de $74,737.10 ampara un préstamo por $68,750 logrado 7 meses antes, entonces incluye intereses del 14.4% anual capitalizable por meses, aproximadamente. __________

18. Si una camioneta se vende con un financiamiento del 60% y un documento con valor nominal de $165,000 y vencimiento a los 6 meses e intereses del 12.6% anual capitalizable por meses, entonces el precio de contado fue de $258,294.28.__________

19. Un capital que se invierte con el 5.4% de intereses anual capitalizable por semanas crece aproximadamente un 4.13% en 9 meses. __________

20. prestar un capital con el 19.2% anual capitalizable por meses es más redituable que hacerlo con el 19.1% compuesto por días. __________

En los problemas 21 a 33 seleccione la opción correcta justificando su respuesta.

***21.** ¿Cuál es la fecha de vencimiento de un pagaré que por un préstamo de $65,000 se firmó el 2 de abril con cargos del 24.84% compuesto por días? Suponga que su valor nominal es de $76,175.

a) Diciembre 1º *b*) Octubre 10 *c*) Noviembre 18 *d*) Octubre 23 *e*) Otra

22. Encuentre el valor nominal del pagaré que por un préstamo de $37,000 se endosó 8 meses antes con intereses del 17.4% anual capitalizable por meses.

a) $41,516.25 *b*) $40,937.08 *c*) $40,603.00 *d*) $41,275.23 *e*) Otra

23. ¿De cuánto fue un préstamo que se liquidó con 2 pagos de $15,200 cada uno a 4 y 7 meses de plazo con intereses del 11.4% mensual capitalizable por meses?

a) $28,421.65 *b*) $29,723.41 *c*) $28,862.40 *d*) $27,975.32 *e*) Otra

24. para ampliar su consultorio el doctor Ildefonso consigue un préstamo con intereses del 13.2% anual compuesto por quincenas. ¿Cuánto dinero paga por interés si lo liquida con 2 abonos de $21,500 a 3 meses y 36,250 a 8 meses?

a) $4,629.36 *b*) $4,721.43 *c*) $3,741.70 *d*) $3,921.03 *e*) Otra

***25.** ¿De cuánto será cada pago en el problema 24 si son iguales?

a) $27,965.65 *b*) $28,503.09 *c*) $28,672.76 *d*) $28,129.03 *e*) Otra

26. ¿Qué día vence un documento con valor nominal de $21,205 que el 23 de abril se endosó por un préstamo de $19,450.00 con intereses del 18.3% anual capitalizable por días?

a) Octubre 22 *b*) Noviembre 5 *c*) Octubre 10 *d*) Noviembre 15 *e*) Otra

27. ¿En cuántos días un capital que se invierte con el 5.5% anual compuesto por días crece un 25%?

a) 1,461 *b*) 1,395 *c*) 1,503 *d*) 1,409 *e*) Otra

28. ¿Qué tasa de interés anual compuesta por semanas produce los mismos intereses que el 13.8% anual capitalizable por semestres?

a) 13.3618628% *b*) 13.4216908% *c*) 13.8543217% *d*) 13.5621082% *e*) Otra

***29.** Determine qué conviene más al comprador de una camioneta considerando intereses del 21.6% anual capitalizable por meses.

a) Comprarla con un enganche del 35% y 2 abonos de 65,000.00 cada uno a 3 y 5 meses de la compra.

b) pagarla sin enganche y 3 abonos mensuales de $64,350 cada uno.

c) Con un enganche de $70,000 y un pago a los 4 meses por $125,000.

d) Comprarla con $187,000 de contado.

30. El contador González compra una pantalla de plasma con un anticipo de $4,200 y un pago a los 3 meses por el 65% restante, ¿por qué cantidad es este pago si se cargan intereses del 1.67% mensual capitalizable por meses?

a) $8,821.03 *b*) $8,629.43 *c*) $8,197.34 *d*) $9,205.75 *e*) Otra

31. Un crédito automotriz de $165,000 se logra con interés global total del 16.8%, ¿cuál es la tasa de interés anual compuesta por quincenas si el plazo es de 9 meses?

a) 19.9863935% *b*) 21.0345861% *c*) 19.6893705% *d*) 20.7952944% *e*) Otra

32. patricia deposita $9,700 en una cuenta el 5 de marzo y el 19 de octubre siguiente le regresan $10,153, ¿cuál es la tasa de interés anual capitalizable por días?

a) 7.43503% *b*) 7.20756% *c*) 8.40217% *d*) 8.07232% *e*) Otra

***33.** En su retiro laboral un empleado invierte el 50% de su indemnización, a los 4 años retira $42,750 y otros $75,250, 3 años después, ¿con cuánto lo indemnizaron? Suponga intereses del 7.24% anual compuesto por bimestres.

a) $155,052.84 *b*) $170,095.00 *c*) $156,329.35 *d*) $158,935.75 *e*) Otra

4.3 Tasas equivalentes, efectiva y nominal

Las *tasas efectivas* son indicadores que ayudan a los inversionistas y a los asesores financieros a tomar la mejor decisión para invertir sus capitales.

Es evidente que resulta más rentable invertir un capital con una tasa anual capitalizable por meses, que con la misma tasa capitalizable por semestres. pero, ¿cuánto es más rentable? o, más precisamente, ¿qué tasa compuesta por meses es igual de productiva que otra que se capitaliza cada semestre?

A continuación se verá cómo contestar a éstas y otras cuestiones semejantes.

Definición 4.2

Se dice que 2 tasas de interés son ***equivalentes*** si con diferentes periodos de capitalización producen iguales intereses en el mismo plazo.

Ejemplo 1

Tasas equivalentes

¿Cuál es la tasa anual capitalizable por semestres equivalente al 12.96% anual compuesto por meses?

solución

El problema es encontrar la tasa anual i compuesta por semestres, $p = 2$, que genere los mismos intereses en igual plazo que la del 12.96% compuesto por meses, $p = 12$. El procedimiento consiste en encontrar el monto en cada caso, igualarlos y luego despejar i. El monto para un capital arbitrario C en el primer caso es:

$$M_1 = C(1 + i/2)^2 \quad M = C(1 + i/p)^{np} \quad n = 1, \quad p = 2$$

para el segundo, considerando también el plazo de un año, es:

$$M_2 = C(1 + 0.1296/12)^{12} \quad p = 12 \quad n = 1$$

Al igualar los 2 montos se obtiene la ecuación siguiente, que se divide entre C para eliminarla:

$$C(1 + i/2)^2 = C(1 + 0.1296/12)^{12} \qquad M_1 = M_2$$

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.0108)^{12}$$

para despejar la incógnita i, se saca raíz cuadrada, se resta la unidad y se multiplica por 2 a los 2 miembros de la ecuación. Antes, se eleva a la potencia 12 el lado derecho de la igualdad.

$$(1 + i/2)^2 = 1.137582229$$

$$1 + i/2 = \sqrt{1.137582229}$$

$$i/2 = 1.066574999 - 1$$

$$i = (0.\ 66574999)2 \qquad \text{o bien,} \qquad i = 0.133149998$$

Esto significa que invertir al 13.3149998% anual compuesto por semestres es igual de productivo que al 12.96% compuesto por meses.

Note que el capital que se invierte es irrelevante y que las tasas son equivalentes con el plazo de un año o cualquier otro.

Ejemplo 2

Tasa más productiva para una institución bancaria

¿Qué conviene más a los propósitos de una institución bancaria: prestar su dinero con intereses del 20.28% anual compuesto por semanas, o prestarlo con el 21.29% capitalizable por semestres?

solución

para comparar las opciones, se obtiene la tasa i compuesta por semestres, equivalente al 20.28% capitalizable por semanas de la primera opción, y se igualan los montos considerando $C = 1$, el capital.

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.2028/52)^{52}$$

$$(1 + i/2)^2 = (1.0039)^{52}$$

$$(1 + i/2)^2 = 1.224344459$$

$$1 + i/2 = \sqrt{1.224344459}$$

$$1 + i/2 = 1.106500998$$

de donde:

$$i = (1.106500998 - 1)2$$

$$i = 0.213001996 \quad \text{o bien,} \quad 21.3001996\%$$

que es mayor al 21.29% de la segunda opción y por eso es más conveniente para el banco.

Ejemplo 3

Toma de decisiones al invertir un capital

para invertir un capital, el arquitecto Gómez tiene las siguientes opciones:

a) Inversión a plazo fijo con interés del 5.81% capitalizable por semestres.

b) Certificados que abonan el 5.62% capitalizable cada semana.

c) Bonos que le dan a ganar el 5.75% compuesto por meses.

Suponiendo que todas ofrecen la misma liquidez, es decir, que tienen iguales posibilidades de recuperar la inversión, ¿por cuál deberá decidirse?

solución

En virtud de que no importa el capital a invertir para determinar la mejor alternativa, bastará con encontrar la tasa anual en las primeras 2 opciones que se capitalice con la frecuencia de la tercera, y que sea equivalente.

Así, la tasa i anual capitalizable por meses, equivalente al 5.81% compuesto por semestres, se obtiene igualando los montos.

$$C(1 + i/12)^{12} = C(1 + 0.0581/2)^2$$

para despejar, se cancela C, se saca raíz doceava a los 2 lados, se resta la unidad y se multiplica por 12, es decir,

$$(1 + i/12)^{12} = (1.02905)^2$$

$$(1 + i/12)^{12} = 1.058943902$$

$$i/12 = \sqrt[12]{1.058943902} - 1$$

$$i/12 = 1.004784082 - 1$$

$$i = 0.004784082(12)$$

$$i = 0.057408984 \quad \text{o bien,} \quad 5.7408984\%$$

En la segunda opción, $p = 52$ porque los intereses se capitalizan cada semana y la tasa equivalente compuesta por meses es i tal que:

$$C(1 + i/12)^{12} = C(1 + 0.0562/52)^{52}$$

$$(1 + i/12)^{12} = (1.001080769)^{52}$$

$$(1 + i/12)^{12} = 1.05777711$$

$$i/12 = \sqrt[12]{1.05777711} - 1$$

$$i/12 = 1.004691775 - 1$$

$$i = (0.004691775)(12)$$

$$i = 0.0563013 \quad \text{o bien,} \quad 5.63013\%$$

En consecuencia, la opción que más le conviene al inversionista es la última, porque el 5.75% es mayor que el 5.7408984% de la primera y que el 5.63013% de la segunda.

En este caso, se encontraron las 3 tasas anuales compuestas por mes para hacer la comparación, pero podrían haberse encontrado con cualquier otra frecuencia, ya sea semestral, semanal o con capitalización anual. En este caso, cuando los intereses se capitalizan cada año, la tasa se denomina *efectiva* y se define como:

Definición 4.3

La tasa anual e compuesta o convertible una vez en el año, $p = 1$, equivalente a la ***tasa nominal*** i capitalizable en p periodos por año, se denomina ***tasa efectiva***.

Es posible obtener una fórmula que relacione tasas efectivas con tasas nominales, procediendo como en los ejemplos anteriores, es decir, con tasa efectiva, al término de un año el monto es:

$$M_1 = C(1 + e)^1 \qquad p = 1, \; n = 1$$

Con tasa i anual capitalizable y p periodos por año, el monto acumulado en el año es:

$$M_2 = C(1 + i/p)^p$$

Se igualan los montos, se divide entre el capital C y se resta la unidad a los 2 miembros de la ecuación:

$$C(1 + e) = C(1 + i/p)^p$$
$$1 + e = (1 + i/p)^p$$
$$e = (1 + i/p)^p - 1$$

que se formula en el siguiente:

Teorema 4.2

La tasa ***efectiva e***, equivalente a una **tasa *nominal i***, capitalizable en p periodos por año, está dada por:

$$e = (1 + i/p)^p - 1$$

Ejemplo 4

Tasa efectiva equivalente a tasa nominal



¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al 11.8% anual compuesto por trimestres?

solución

En el teorema 4.2 se reemplazan:

i por 0.118, la tasa capitalizable por trimestres y p por 4, el número de trimestres por año

$$e = (1 + 0.118/4)^4 - 1$$

$$e = 1.123324947 - 1 \quad \text{o bien,} \quad e = 0.123324947$$

Quiere decir que una inversión al 11.8% anual compuesto por trimestres es tan productiva como el 12.3324947% capitalizable por años.

Ejemplo 5

Monto en inversión con tasa efectiva

Obtenga el monto acumulado al 5 de agosto, si el 19 de marzo anterior se invierten U S$25,350 a una tasa de interés del 6.3% efectivo.

solución

En virtud de que el plazo está en días (139), es conveniente encontrar la tasa de interés capitalizable por días equivalente al 6.3% efectivo. para esto se utiliza la ecuación 4.2

$$0.063 = (1 + i/360)^{360} - 1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

$$1.063 = (1 + i/360)^{360} \qquad \text{e/ } -1 \text{ pasa sumando}$$

$$\sqrt[360]{1.063} = 1 + i/360 \qquad \text{raíz } 360^a \text{ a los 2 lados}$$

$$1.000169723 = 1 + i/360$$

$$(1.000169723 - 1)360 = i \qquad \text{se resta el 1 y se multiplica por 360}$$

$$0.06110028 = i \quad \text{o bien,} \quad 6.110028\% \text{ anual capitalizable por días.}$$

El monto acumulado es, por lo tanto,

$$M = 25{,}350(1.000169723)^{139} \qquad 1 + i/p = 1.000169723$$

$$M = 25{,}350(1.\ 023869928)$$

$$M = \text{US\$}25{,}955.10$$



Solución alterna

Si una tasa de interés es capitalizable cada mes, como en el caso supuesto de inversiones a plazo fijo al comienzo de este capítulo, entonces habrá que esperar a que transcurran meses completos para hacer efectivos los intereses. También es cierto que la fórmula del interés compuesto se dedujo considerando periodos completos de capitalización de intereses; pero, esto no obsta para emplearse cuando los periodos no son completos y sólo interesa el resultado numérico.

por ejemplo, en este ejercicio el plazo en años es 139/360 = 0.386111111 y con la tasa del 6.3% efectiva, compuesta por años, el monto será:

$$M = 25{,}350(1.063)^{139/360}$$

$$M = 25{,}350(1.02386993) \quad \text{o bien,} \quad M = \text{US\$}25{,}955.10\text{, que es igual al anterior.}$$

Ejercicios 4.3

1. Explique los conceptos de *tasas equivalentes, tasa efectiva* y *tasa nominal.*

2. ¿Cuál es la tasa nominal mensual equivalente al 15% compuesto por trimestres?

3. ¿Qué es más productivo: una inversión al 17% de interés capitalizable por quincenas o al 17.4% compuesto por cuatrimestres?

4. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva que corresponde a un 14.56% nominal semanal?

5. Luis invierte su dinero al 8% de interés compuesto por días, y su hermana invierte el suyo al 8.07% compuesto por años. ¿Quién obtiene mayores ganancias?

6. Adriana consigue un préstamo con un interés del 20.4% nominal mensual. En otra institu - ción se lo ofrecen con el 21.5% de interés nominal semestral y el banco se lo concede al 22.3% de interés efectivo. ¿Cuál opción le conviene más?

7. para sus gastos de graduación dentro de 9 meses, un estudiante cuenta ahora con $35,000 que puede invertir al 6.5% nominal trimestral o al 6.32% capitalizable por meses. ¿Qué le conviene más?

*8. Obtenga el valor del enganche y 3 abonos mensuales iguales al enganche que amortizan un crédito automotriz. Suponga que el precio del automóvil es $275,000 y los intereses son:

   a) El 21.4% de interés anual compuesto por meses.

   b) El 25.6% de interés efectivo.

9. Se compra un equipo de cómputo con un anticipo y 2 abonos a 30 y 60 días, con un interés del 18.3% nominal semestral. ¿De cuánto es cada pago? Suponga que el precio del equipo es de $27,000 y que:

   a) Los 3 pagos son iguales.

   b) El enganche es un 20% mayor que cada pago mensual y los 2 son iguales.

   c) Cada pago es 25% mayor que el anterior.

*10. ¿Cuál es el valor de un crédito 5 meses antes de la fecha de vencimiento, si el documento correspondiente es de $73,250 incluidos los intereses y el tipo de interés es del

   a) 18% efectivo.

   b) 14.8% nominal semanal.

   c) 15.6% nominal mensual.

---

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***11.** ¿De cuánto fue el anticipo suponiendo que fue del 35% del precio de una camioneta, y que el resto se paga con 2 abonos adicionales de $75,000 cada uno a 30 y 60 días, con un interés del 19.6% efectivo?

12. El 5 de abril se compró una flotilla de motocicletas con un anticipo del 40% y 3 abonos, a 30, 60 y 90 días, de $43,500 cada uno.

a) ¿Cuánto se pagó por concepto de intereses?

b) ¿Cuál es el precio de las motocicletas? Suponga que el interés es del 18.3% nominal bimestral.

13. ¿Cuánto deberá invertirse ahora para tener $30,000 en 16 meses, ganando intereses del

a) 6.4% nominal mensual.

b) 7.2% efectivo.

c) 6.7% nominal semestral.

***14.** El actuario Sánchez abre una cuenta de ahorros con $7,500 y luego hace 3 depósitos de $5,000, $8,000 y $10,000, respectivamente a 1, 2 y 5 meses de la apertura. ¿Cuánto tendrá en su cuenta 7 meses después del último depósito, si devenga intereses del

a) 6.9% efectivo.

b) 5.2% nominal quincenal.

15. ¿En cuántos días un capital que se presta al 15.9% de interés efectivo crece un 18%?

16. Suponiendo que ambas opciones tienen la misma liquidez, ¿por cuál se decidiría usted?

a) Invertir con el 6.42% de interés compuesto cada 28 días; esto es con $p = 13$.

b) Invertir en una cuenta bancaria con el 6.61% de interés efectivo.

c) prestar el dinero con el 5.83% de interés anual capitalizable por días.

17. El gerente de una compañía sabe que el 15 de julio necesitará $75,000. ¿Cuánto debe depositar en un banco que paga el 14% de interés efectivo el 10 de abril anterior, si el 23 de enero abrió la cuenta con $30,000?

18. Si el precio de contado de un mueble comedor es de $25,200 y se paga con un anticipo del 30% y $18,500 a los 4 meses de la compra, ¿cuál es la tasa de interés efectiva? ¿Cuál es la tasa nominal semanal? ¿De cuánto es el cargo por intereses?

En los problemas 19 a 24 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

19. Invertir un capital con el 8.42% nominal mensual es más productivo que prestarlo al 8.74% efectivo. __________

20. La tasa de interés anual capitalizable por días siempre es menor que la que se capitaliza cada bimestre. __________

21. Las tasas son equivalentes si con menos plazo en la primera se generan las mismas utilidades. __________

22. Un préstamo de $17,650 se cancela a los 7 meses con $19,962.60 si la tasa de interés es del 23.5% efectivo. __________

***23.** Al invertir $29,725 con el 5.4% de interés nominal mensual se generan $788.82 por intereses en un plazo de 175 días. __________

24. Una camioneta se paga con un enganche y un financiamiento de $95,000 firmando un pagaré por $107,574.46 y vencimiento a los 7 meses si los intereses son del 21.5% capitalizable por semestres. __________

En los problemas 25 a 38 seleccione la opción correcta justificando su elección.

25. Es el monto que se paga 13 meses después por un préstamo de $125,000 con interés del 18.63% nominal trimestral.

a) $149,723.82 *b*) $152,258.50 *c*) $148,621.08 *d*) $150,302.97 *e*) Otra

26. La tasa nominal diaria que es equivalente al 13.2% capitalizable por semestre es:

a) 12.633645% *b*) 11.973067% *c*) 12.062708% *d*) 12.784932% *e*) Otra

27. Es el número de días para que un capital que se presta con el 21.4% efectivo se incremente un 12 por ciento.

a) 193 *b*) 203 *c*) 221 *d*) 210 *e*) Otra

28. ¿Cuánto se recibió en un préstamo que con interés del 17.4% nominal diario se liquida con $24,312.18, 8 meses después?

a) $21,650.00 *b*) $22,096.54 *c*) $21,090.31 *d*) $21,236.43 *e*) Otra

***29.** ¿De cuánto fue el anticipo que se dio al comprar un tractor si el resto correspondiente al 63% del precio, se paga con $58,693 a los 3 meses y $98,325, 2 meses después? Suponga interés del 24.8% efectivo.

a) $83,958.29 *b*) $85,267.76 *c*) $80,921.08 *d*) $84,092.09 *e*) Otra

30. ¿Cuánto se generó por interés en el problema 29?

a) $11,832.36 *b*) $11,069.71 *c*) $12,121.30 *d*) $10,986.68 *e*) Otra

31. Si el enganche y los 2 pagos fueran iguales, ¿de cuánto será cada uno en el problema 29?

a) $82,418.92 *b*) $82,529.50 *c*) $79,098.35 *d*) $80,636.10 *e*) Otra

***32.** Utilizando tasas de interés efectivas determine cuál opción conviene más al comprador de un automóvil.

a) pagar intereses del 21.3% nominal trimestral.

b) Comprarla con el 20.8% de interés nominal semanal.

c) Con intereses del 22.98 efectivo.

d) Con cargos del 20.7% nominal diario.

33. ¿Cuál es la tasa nominal mensual si un camión para transporte escolar con precio de $650,000 se paga con $745,360 el 23 de diciembre? Suponga que se compró el 5 de abril anterior.

a) 18.814896% *b*) 18.9581772% *c*) 18.6973841% *d*) 19.061432% *e*) Otra

34. ¿A cuánto ascienden los intereses del problema 33?

a) $95,197.33 *b*) $97,093.65 *c*) $96,595.08 *d*) $95,360.00 *e*) Otra

35. ¿Cuál es el precio de contado de un juego de sala, recámara y comedor si se paga con un anticipo del 40% y 2 abonos a 3 y 5 meses de la compra por $10,500 y $13,750 respectiva - mente? Considere intereses del 20.75% efectivo.

a) $37,195.09 *b*) $37,879.39 *c*) $36, 923.45 *d*) $35,098.09 *e*) Otra

36. En el problema 35, ¿cuál es el costo, es decir los intereses, para el comprador por no pagar de contado?

a) $1,772.37 *b*) $2,098.03 *c*) $1,929.92 *d*) $2,135.50 *e*) Otra

***37.** para crecer su taller automotriz el señor pérez compró nuevo equipo que liquidó con un enganche del 33%, un abono a los 5 meses por $23,250.00 y otro por 37% restante 4 meses después del primero, ¿cuánto dinero se pagó por concepto de intereses, suponiéndolos del 22.1% nominal cuatrimestral?

a) $7.085.42 *b*) $7,258.90 *c*) $6,129.13 *d*) $6,526.88 *e*) Otra

38. ¿De qué tamaño fue el último abono en el problema 37?

a) $30,787.39 *b*) $29,123.35 *c*) $31,265.30 *d*) $27,928.15 *e*) Otra

4.4 Regla comercial y descuento compuesto

Consideremos el siguiente cuestionamiento. ¿En cuánto tiempo se acumulan $120,000, si ahora se invierten $107,750 al 15% nominal mensual? Con la fórmula del interés compuesto se obtiene el plazo:

$$120{,}000 = 107{,}750(1 + 0.15/12)^x \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$120{,}000/107{,}750 = (1.0125)^x \quad \text{o bien,} \quad (1.0125)^x = 1.113689095$$

de donde $x = \ln(1.113689095)/\ln(1.0125)$ o bien, $x = 8.667968633$

La parte decimal se multiplica por 30 para saber el número de días

$$0.66796863(30) = 20.03905899$$

Entonces el plazo será de 8 meses y 20 días pero en la práctica, en la vida real, generalmente no se pagan los intereses de los periodos incompletos y en el mejor de los casos pudiera ser que se pague o se reciba la parte proporcional del periodo.

Una forma de evaluar los intereses de esta parte proporcional es la que llaman *regla comercial* que consiste en calcular el monto acumulado durante los periodos de capitalización com - pletos con la fórmula del interés compuesto, para luego sumarlo con lo del periodo incompleto, los 20 días del caso supuesto, considerando para este, interés simple.

Note que el monto que se logra en los 8 meses, los periodos completos es:

$$M = 107{,}750(1.0125)^8$$

$$M = 107{,}750(1.104486101) \text{ o bien, } M = 119{,}008.38 \text{ redondeando}$$

y la diferencia con los pretendidos 120 mil, 991.62 es lo que ganaría con interés simple.

Cabe señalar, antes de ver los ejemplos, que se procede de semejante manera cuando se trata de conocer el capital al inicio del plazo.

Ejemplo 1



Utilizando la regla comercial, determinar cuánto se acumula al 23 de octubre, si el 10 de marzo del año anterior se depositan $85,000 en una cuenta que bonifica el 7.8% de interés anual capitalizable por cuatrimestres.

solución

Del 10 de marzo al 10 de julio del año siguiente se comprenden 4 cuatrimestres, y de esta fecha al 23 de octubre se tienen 105 días naturales.

El monto acumulado durante el primer lapso, puesto que,

$C = 85{,}000$, el capital inicial

$i = 0.078$, la tasa capitalizable por cuatrimestres

$p = 3$, los cuatrimestres que tiene el año

$np = 4$, el número de cuatrimestres completos, es:

$$M_1 = 85{,}000(1 + 0.078/3)^4 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M_1 = 85{,}000(1.108126761) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = \$94{,}190.77$$

El valor futuro de este monto 105 días después, es decir, el 23 de octubre, considerando interés simple es:

$$M = 94{,}190.77[1 + 105(0.078/360)] \qquad M = C(1 + ni)$$

$$M = 94{,}190.77(1.02275)$$

o bien, $M = \$96{,}333.61$

Solo para efectos de comparación, note usted que el monto que se acumula con interés compuesto desde el 10 de marzo, fecha de la inversión, hasta el 23 de octubre del año siguiente, con un plazo fraccionario y considerando que un cuatrimestre tiene 121 días, es:

$$np = 4 + 105/121 \quad \text{o bien,} \quad np = 4.867768595 \text{ cuatrimestres es:}$$

$$M = 85{,}000(1 + 0.078/360)^{4.867768595}$$

$$M = 85{,}000(1.133085737) \quad \text{o bien,} \quad M = \$96{,}312.88$$

Ejemplo 2

¿por qué cantidad se concedió un crédito en mercancía si se ampara con un documento con valor nominal de \$50,200, que incluye intereses del 16.8% nominal trimestral y vence en 35 semanas? Utilizar la regla comercial.

solución

En 35 semanas quedan comprendidos 2 trimestres de 13 semanas cada uno y 9 semanas adicionales para un periodo incompleto.

El valor presente de los \$50,200, 2 trimestres antes es:

$$C = 50{,}200(1 + 0.168/4)^{-2} \qquad C = M(1 + i/p)^{-2}$$

$$C_1 = 50{,}200(0.921010459) \quad \text{o bien,} \quad C_1 = \$46{,}234.72504$$

y 9 semanas antes, con interés simple, esto nos da:

$$C = 46{,}234.72504[1 + (9/52)(0.168)]^{-1} \qquad C = M(1 + ni)^{-1}$$

$$C = 46{,}234.72504(0.971744656)$$

$$C = 44{,}928.34696 \quad \text{o bien,} \quad C = \$44{,}928.35 \text{ redondeando.}$$

Ejemplo 3

¿Cuánto dinero puede retirar Laura el 23 de diciembre, si el 8 de enero anterior depositó \$75,300 en un banco que bonifica el 5.6% anual capitalizable por bimestres? Utilizar la reg la comercial y comparar resultados considerando interés compuesto para el plazo completo.

solución

a) Con la ayuda de un diagrama de tiempo, se aprecia que desde el 8 de enero al 8 de noviembre se cumplen 5 bimestres, y desde esta fecha hasta el 23 de diciembre se tienen 45 días. Los valores que se tienen para reemplazar en la fórmula del interés compuesto son:

$C = 75{,}300$, el capital que se invierte

$p = 6$, la frecuencia de conversión, 6 bimestres cada año

$np = 5$, el plazo en bimestres, los que son completos

$i = 0.056$, la tasa de interés nominal bimestral

entonces:

$$M = 75{,}300(1 + 0.056/6)^5 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M = 75{,}300(1.047545944) \quad \text{o bien,} \quad M = \$78{,}880.20958$$

y para el periodo incompleto se tiene:

$C = 78{,}880.20958$, el capital

$n = 45$, el plazo en días

$i = 0.056/360$ o bien, $i = 0.000155556$, la tasa de interés simple por día.

El monto al 23 de diciembre es, entonces,

$$M = 78{,}880.20958[1 + 45(0.000155556)] \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 78{,}880.20958(1.007) \quad \text{o bien,} \quad M = \$79{,}432.37$$

b) Considerando que en un bimestre caben 60 días, el plazo para el monto compuesto en bimestres es:

$$5 + 45/60 = 5.75$$

y el monto es, en este caso,

$$M = 75{,}300(1 + 0.056/6)^{5.75}$$
$$M = 75{,}300(1.054870244) \quad \text{o bien,} \quad M = \$79{,}431.73$$

Esto significa que lo más que Laura podría retirar el 23 de diciembre es este monto.

Ejemplo 4

Se compra maquinaria agrícola con un anticipo del 40% y 2 abonos a 9 meses el primero, y 20 meses con 8 días el segundo, con cargos o intereses del 5.06% trimestral capitalizable por trimestres. Considerando que el último pago fue la cantidad de 1.15 millones de pesos, que corresponden al 35% del precio, usando la regla comercial, determinar:

a) El precio de contado de la maquinaria.

b) El anticipo y el primer abono.

c) Los intereses de la operación crediticia.

solución

a) En el plazo de 20 meses y 8 días del segundo abono, quedan comprendidos 6 trimestres y 68 días, el valor presente de los 1.15 millones de pesos, 6 trimestres antes de que se realice, es:

$$C_1 = 1.15(1 + 0.0506)^{-6} \qquad M = C(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 1.15(0.743662053) \quad \text{o bien,} \quad C_1 = 0.855211361 \text{ millones de pesos}$$

y 68 días antes, considerando interés simple diario del 0.000562222% porque 0.0506/90= 0.000562222, este capital se convierte en:

$$C = 0.855211361[1 + 68(0.000562222)]^{-1} \qquad C = M(1 + ni)^{-1}$$
$$C = 0.855211361(0.963176685) \quad \text{o bien,} \quad C = 0.823719644$$

puesto que el último pago corresponde al 35% de la maquinaria, se cumple que:

$$(0.35)\text{precio} = 0.823719644$$

de donde $\text{precio} = 0.823719644/0.35$

$= 2.353484697$ millones o bien, \$2'353,484.70

b) El anticipo es del 40% de este precio:

$$A = 0.40(2'353{,}484.70)$$
$$A = \$941{,}393.88$$

y el valor presente del primer abono es igual al 25% restante del precio, es decir,

$$C_2 = 0.25(2'353{,}484.70)$$

o bien, $C_2 = \$588{,}371.17$

El plazo de este primer abono es de 9 meses, es decir, 3 trimestres y el valor futuro de C_2 es:

$$M_1 = 588{,}371.17(1 + 0.0506)^3 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = (588{,}371.17)(1.159610634)$$

o bien, $M_1 = \$682{,}281.47$ redondeando.

c) El cargo total por concepto de intereses en dinero es el siguiente, el cual se obtiene restando del total pagado, el precio de la maquinaria, $I = M - C$, es decir,

$$I = (941{,}393.88 + 682{,}281.47 + 1'150{,}000) - 2'353{,}484.70$$

o bien, $I = \$2'773{,}675.35 - 2'353{,}484.70$ o bien, $I = \$420{,}190.65$

Descuento compuesto

En la sección 4 del capítulo 3 se estudiaron 2 maneras de descontar un documento antes de su vencimiento, con descuento real y con descuento comercial. Ahora veremos otra forma de descontar documentos con descuento compuesto en que, se aplica la fórmula del interés compuesto $M = C(1 + i/p)^{np}$ de donde $C = M(1 + i/p)^{-np}$ donde C es el valor descontado del documento, lo que se recibe al negociarlo, M es su valor nominal e i es la tasa de descuento. Buscando congruencia con la nomenclatura anterior, esta fórmula quedaría como:

$$P = M(1 + d/p)^{-np}$$

Ejemplo 5

¿En cuánto se descuenta un documento con valor nominal de \$20,250 el 10 de abril, si vence el 10 de octubre y se descuenta el 13.5% nominal mensual?

solución

Los valores a sustituir en la fórmula correspondiente son:

$M = 20{,}250$, el valor del documento al vencer

$d = 0.135$, la tasa de descuento nominal mensual

$p = 12$, la frecuencia del descuento compuesto

$n = 6/12$ o bien, $n = 0.5$, el plazo en años

$np = 6$, el número de periodos mensuales

Entonces, el valor descontado es:

$$P = 20{,}250(1 + 0.135/12)^{-6} \qquad P = M(1 + d/p)^{-np}$$

$$P = 20{,}250(0.935080052)$$

$$P = 18{,}935.37105 \quad \text{o bien,} \quad \$18{,}935.37$$

Sólo para comparar, note que con descuento comercial el valor descontado es:

$$P = 20{,}250[1 - 0.5(0.135)] \qquad P = M(1 - nd)$$

$$P = 20{,}250(0.9325) \quad \text{o bien,} \quad P = \$18{,}883.12$$

Ejemplo 6

El 21 de junio se transfiere, es decir, se comercializa, un pagaré en $55,770.00 con descuento compuesto del 18.36% nominal diario. ¿por qué cantidad fue el crédito que originó el documento, si se cargan intereses del 17.28% simple anual? Suponga que la firma se realizó el 5 de marzo con plazo hasta el 10 de diciembre.

solución

El diagrama de tiempo de la figura 4.2 nos puede ayudar.

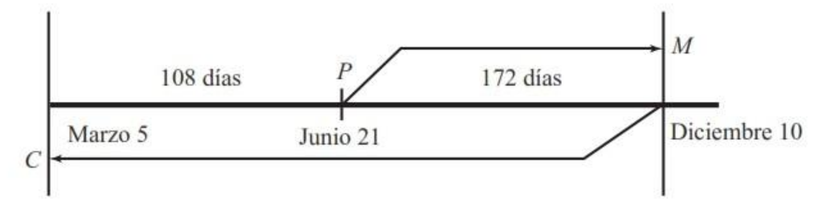


FIGURA 4.2

Del 21 de junio al 10 de diciembre se comprenden 172 días y, entonces, el valor nominal del documento es M de la igualdad:

$$55{,}770 = M(1 + 0.1836/360)^{-172} \qquad P = M(1 + d/p)^{-np}$$
$$55{,}770 = M(0.916037809) \qquad M(1 + 0.00051)^{-172}$$

de donde: $M = 55{,}770/0.916037809$ o bien, $M = \$60{,}881.77$

Éste es el valor futuro del crédito C y puesto que el plazo entre el 5 de marzo y el 10 de diciembre es de 280 días, se tiene:

$$60{,}881.77 = C[1 + 280(0.1728/360)] \quad M = C(1 + ni)$$
$$60{,}881.77 = C(1.1344)$$

de donde $C = 60{,}881.77/1.1344$

$C = 53{,}668.69711$ o bien, $C = \$53{,}668.70$ redondeando,

en el tamaño del crédito otorgado.

Ejemplo 7

Con la información del ejemplo 6, determine las utilidades que obtuvo quien otorgó el cré - dito, las que obtuvo el que compró el documento antes de su vencimiento y lo que tuvo que desembolsar por concepto de intereses el deudor.

solución

Las utilidades que logra el acreedor, la persona que otorgó el crédito son la diferencia entre lo que prestó y lo que recibió por el tercero que le compró el documento

$$U_1 = 55{,}770.00 - 53{,}668.70 \text{ o bien, } U_1 = 2{,}101.30$$

El que compró el documento ganó:

$$U_2 = 60{,}881.77 - 55{,}770.00 \qquad U_2 = 5{,}111.77$$

esto es la diferencia entre lo que pagó por el documento y lo que recibirá en su vencimiento, el valor nominal del pagaré, y el costo para el deudor es la diferencia de lo que le prestaron y de lo que pagará el 10 de diciembre, esto es:

$$P = 60{,}881.77 - 53{,}668.70 \text{ o bien, } P = 7{,}213.07$$

que es igual a la suma de las utilidades para los 2 primeros.

Ejercicios 4.4

1. ¿Cuál es la característica esencial de la *regla comercial* para el interés compuesto?

2. ¿Cuál es la diferencia básica entre *descuento real, descuento compuesto* y *descuento comercial*?

3. ¿El valor comercial de un documento con descuento compuesto es menor que con descuento comercial, cuando las tasas, el valor nominal y el plazo, son iguales?

4. ¿Cómo se evalúa el monto acumulado con la regla comercial al invertir o prestar un capital?

5. ¿Cómo se obtiene el valor presente de un monto, un crédito, por ejemplo, con la regla comercial en el interés compuesto?

***6.** ¿Será posible que el acreedor no tenga utilidades al negociar el documento por un préstamo antes de su vencimiento? ¿En qué caso?

En los problemas 7 a 13 utilice la regla comercial. En todos ayúdese con un diagrama de tiempo.

7. ¿Cuál es el valor nominal de un documento que ampara un préstamo por $17,350, concedido 7 meses antes con intereses del 18.24% anual compuesto por bimestres?

8. ¿En cuánto se negocia el documento del problema 7, 4 meses antes de su vencimiento con descuento del 17% nominal mensual?

9. ¿Cuánto se acumula el 17 de noviembre si el 5 de junio anterior se depositaron $7,600 en una cuenta que bonifica 10.69% de interés anual capitalizable por meses?

10. ¿Cuánto se genera por intereses en 14 meses si al inicio se prestan $15,700 con cargos del 21.75% nominal trimestral?

11. Se compra una Minivan con el 35% de anticipo y un pago de $270,000 a los 9 meses con intereses del 18.72% capitalizable por cuatrimestres ¿cuál es el precio de contado?

***12.** ¿Qué día vence un documento con valor nominal de $14,800 que el 10 de marzo se firmó por un préstamo de $13,125 con intereses del 19.2% nominal mensual?

13. ¿Cuál es el valor nominal de un pagaré que el 19 de marzo se comercializa en $27,250 considerando el 8.24% de descuento compuesto por meses? Suponga que vence el 7 de agosto siguiente.

En los problemas 14 a 19 conteste falso o verdadero justificando su elección.

14. Si un pagaré con valor nominal de $27,300 y vencimiento al 15 de agosto se negocia el 3 de marzo anterior con una tasa de descuento compuesto por días del 18.9% anual, entonces el descuento total es de $2,264.76. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

15. El 30 de enero vence un documento con valor nominal de $33,200 y se negocia en $31,163.21 el 3 de septiembre anterior cuando se descuenta con el 15.3% nominal diario. __________

16. $40,257.32 es el valor comercial el 8 de abril de un documento que vence el 23 de agosto, su valor nominal es de $42,728 y se descuenta el 13.2% compuesto por bimestres. __________

***17.** La tasa de descuento nominal semanal de un documento que con valor de $165,000 se negocia 9 meses antes en $149,400 es aproximadamente del 13.26%. __________

18. Seis meses antes de vencer se negocia en $61,223.61 un documento con valor nominal de $63,300 y descuento del 6.39% compuesto por bimestres. __________

19. La utilidad que logró el contador Martínez por comprar el 3 de diciembre un documento con valor de $58,725 y vencimiento al 17 de julio siguiente con descuento del 13.8% compuesto por días fue de $4,789.88. __________

En los problemas 20 a 26 seleccione la opción correcta justificando su elección.

***20.** Es el descuento con el que se compra un documento 8 meses antes de vencer con el 12.4% compuesto por meses y valor nominal de $47,500.

a) $3,508.91 *b*) $3,629.53 *c*) $3,750.19 *d*) $3,128.43 *e*) Otra

21. Utilizando la regla comercial encuentre el valor nominal del documento que avala un préstamo de $15,600 con intereses del 24.3% nominal mensual, considerando el plazo desde el 10 de agosto hasta el 28 de enero siguiente.

a) $17,454.30 *b*) $18,629.21 *c*) $17,924.08 *d*) $18,093.39 *e*) Otra

22. ¿En cuánto se comercializa el 5 de diciembre el pagaré del problema 21 con descuento del 11.49% nominal diario?

a) $17,205.17 *b*) $17,065.56 *c*) $17,156.10 *d*) $16,989.93 *e*) Otra

***23.** ¿A cuánto ascienden las utilidades para el que compra 9 meses antes el documento con valor nominal de $35,629.00 si se descuenta el 5.4% compuesto por meses?

a) $1,476.20 *b*) $1,411.04 c) $1,523.91 *d*) $1,398.40 *e*) Otra

***24.** ¿Cuánto se otorgó en préstamo con intereses del 6.3% nominal trimestral por el documento del problema 23, 5 meses antes de negociarse? Utilice la regla comercial.

a) $33,122.30 *b*) $33,285.00 *c*) $32,823.55 *d*) $33,803.65 *e*) Otra

25. ¿Cuántos días faltan para que venza el documento con valor nominal de $16,529 si se negocia en $15,252.35 con el 14.4% de descuento nominal diario?

a) 212 *b*) 215 *c*) 196 *d*) 201 *e*) Otra

26. ¿De qué tamaño fue el crédito avalado por el pagaré del problema 25, logrado con plazo de 283 días e intereses del 16.8% anual capitalizable por quincenas? Use la regla comercial.

a) $16,296.85 *b*) $15,921.73 *c*) $14,490.70 *d*) $15,008.93 *e*) Otra

4.5 Diagramas de tiempo, fecha focal y ecuaciones de valor

En la sección 2.2 se estudiaron los diagramas de tiempo que constituyen herramientas útiles para plantear y resolver problemas financieros, ya que facilitan los desplazamientos simbólicos de capitales en el tiempo. Estos desplazamientos permiten llevar todas las cantidades de dinero que intervienen en un problema hasta una fecha común, que se conoce como *fecha focal* o *fecha de referencia.*

Con todos los valores en esa fecha focal y separando aquellos que corresponden a las deudas de los que corresponden a los pagos, es decir, agrupando por un lado los del "debe" y por otro los del "haber", se establece una igualdad que se conoce como *ecuación de valores equivalentes* o simplemente *ecuación de valor*. Después, esta ecuación se resuelve despejando la incógnita o las incógnitas que en ella aparezcan para lograr así la solución del problema.

Esta solución varía un poco de acuerdo con la localización de la fecha focal tratándose de interés simple; pero cuando el interés es compuesto, la solución es la misma para cualquier ubicación de la fecha focal.

Cabe señalar también que las cantidades de dinero pueden estar antes o después de la fecha de referencia. Si la cantidad de dinero *A*, está antes de esa fecha, se suman los intereses hallando su valor futuro equivalente en la fecha focal; pero si está después, entonces se restarán los intereses obteniendo su valor presente equivalente en la misma fecha focal.

En la figura 4.3 se ilustran las 2 posibilidades, donde M_A es el monto de A y C_B es el valor presente de *B*.

En ambos casos, el traslado se realiza con la fórmula del interés compuesto, o del interés simple si así lo estipula el problema.

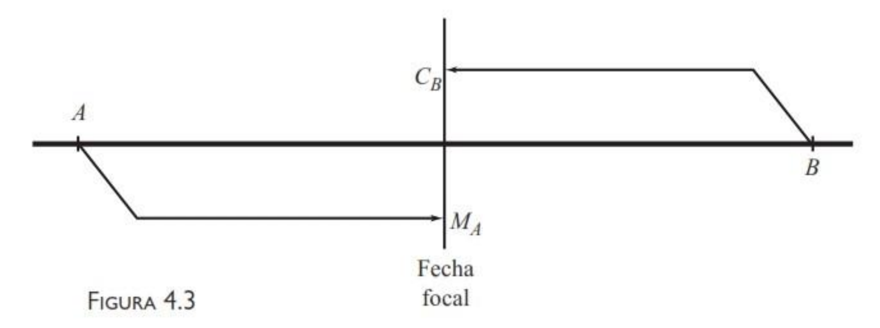


FIGURA 4.3

Ejemplo 1

Liquidación de créditos con pagos diferidos

El día de hoy se cumplen 5 meses de que un comerciante en alimentos consiguió un crédito de $30,000 firmando un documento a 7 meses de plazo. Hace 3 meses le concedieron otro y firmó un documento con valor nominal de $54,000, valor que incluye los intereses de los 6 meses del plazo. Hoy abona $60,000 a sus deudas, y acuerda con su acreedor liquidar el resto a los 4 meses, contados a partir de ahora. ¿ por qué cantidad es este pago, si se tienen cargos o intereses del 11.76% nominal mensual?

solución

El diagrama de la figura 4.4 ilustra la situación, donde cada subdivisión de la recta representa un periodo mensual.

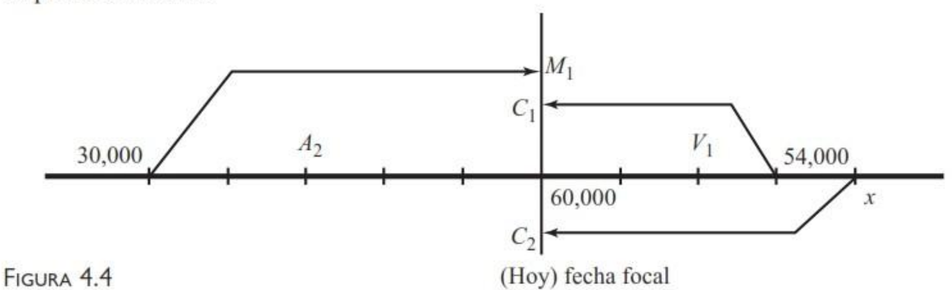


FIGURA 4.4 (Hoy) fecha focal

Como se aprecia en la figura habrá que trasladar las 3 cantidades hasta la fecha focal, la cual se fijó arbitrariamente en el día de hoy.

Los primeros \$30,000 se ubican 5 meses antes del día de hoy, cuando se hizo el primer préstamo. para llevarlos hasta la fecha focal habrá que sumar los intereses de 5 meses y obtener así el equivalente en esa fecha. puesto que los \$54,000 ya incluyen intereses y son el valor nominal del pagaré correspondiente, se ponen en la fecha de su vencimiento, es decir, 3 meses después del día de hoy. para trasladarlos hasta la fecha focal, se les restan los intereses de los mismos 3 meses. Los 2 valores constituyen el "debe" y se anotan en la parte superior de la gráfica. El "haber" está formando por los 2 pagos, los primeros \$60,000 que no se desplazan porque están en la fecha focal y el pago x que se hace 4 meses después, por eso se le restan los intereses de 4 meses.

Es evidente que los 2 totales, las deudas D y los pagos P, son iguales porque ambos están en la misma fecha. Con esto se obtiene la ecuación de valores equivalentes $P = D$.

El valor futuro de los \$30,000 con intereses de 5 meses es:

$$M_1 = 30{,}000(1 + 0.1176/12)^5 \quad \text{ya que} \quad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = 30{,}000(1.0098)^5$$
$$M_1 = 30{,}000(1.049969858) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = \$31{,}499.09574$$

para el valor presente de los \$54,000, se restarán los intereses de 3 meses también con la fórmula del interés compuesto:

$$54{,}000 = C_1(1.0098)^3$$
$$54{,}000 = C_1(1.029689061)$$

de donde: $$C_1 = 54{,}000/1.029689061 \quad \text{o bien,} \quad C_1 = \$52{,}443.01611$$

El equivalente a los 2 préstamos en la fecha local, redondeando, es entonces:

$$D = M_1 + C_1$$
$$D = 31{,}499.10 + 52{,}443.02 \quad \text{o bien,} \quad D = \$83{,}942.12$$

Observe que una interpretación real de este resultado es que con esto se liquidarían las deudas el día de hoy.

También se necesita quitar intereses de 4 meses a lo que será el segundo abono x, al hacerlo quedará C_2 de la siguiente igualdad:

$$x = C_2(1.0098)^4 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

de donde: $C_2 = x/1.039780014$

o bien, $C_2 = (0.961741894)x$ porque $a/b = a(1/b)$

Consecuentemente la suma de este resultado y el pago que se efectúa el día de hoy es igual al equivalente de los 2 pagos en la fecha focal; esto es,

$$P = 60{,}000 + C_2$$
$$P = 60{,}000 + (0.961741894)x$$

Note usted que el coeficiente de x, 0.961741894, en esta ecuación, significa que al adelantar 4 meses el pago, éste se reduce cerca del 4%, es decir, que si hoy se realizara dicho abo no, se pagará sólo el 96.17% aproximadamente, de lo que se paga 4 meses después.

La ecuación de valores equivalentes es, entonces,

$$60{,}000 + (0.961741894)x = 83{,}942.12 \qquad \text{puesto que } P = D$$

de donde, para despejar la incógnita, 60,000 pasa restando y 0.961741894 pasa dividiendo al lado derecho, es decir,

$$x = (83{,}942.12 - 60{,}000)/0.961741894$$
$$x = 24{,}894.52939 \quad \text{o bien,} \quad \$24{,}894.53$$

Solución alterna

Cuando el número de capitales y montos no es tan grande, como en este ejemplo, puede resolverse de manera más breve, encontrando el saldo al día de hoy, luego de hacer el pago de \$60,000 para llevarlo hasta 4 meses después. Dicho saldo es $M_1 + C_1 - 60{,}000$, es decir,

$$83{,}942.12 - 60{,}000 = 23{,}942.11185$$

y su valor futuro 4 meses después es $M = x$:

$$M = 23{,}942.11(1 + 0.1176/12)^4$$
$$M = 23{,}942.11(1.039780014) \quad \text{o bien,} \quad M = \$24{,}894.53$$

Se deja como un buen ejercicio para el estudiante, corroborar este resultado localizando la fecha local en otro punto, por ejemplo, el día en que se hace el pago x.

Sugerencia

Si bien es cierto que los resultados no dependen de la ubicación de la fecha focal, tratándo se del interés compuesto, es recomendable fijarla el día en que se realiza un préstamo o un pago y más aún en la última de las fechas, la cual está a la derecha en el diagrama, para eludir exponentes negativos, ya que de todas las cantidades de dinero se hallaría su valor futuro.

Ejemplo 2

Intereses en crédito con abonos diferidos

Hallar los intereses que se cargan en el ejemplo 1.

solución

En la misma figura 4.4 se anotaron A_2 y V_1 que, respectivamente, están en la fecha en que se consiguió el segundo crédito y en que vence el primero.

Los intereses son la diferencia entre el total que se paga M y el valor presente C de los préstamos, para esto es necesario hallar el capital A_2 del préstamo, cuyo valor futuro 6 meses después es $54,000.

$$54{,}000 = A_2(1 + 0.1176/12)^6 \quad \text{son 6 meses de plazo}$$

$$54{,}000 = A_2(1.060259563)$$

de donde: $A_2 = 54{,}000/1.060259563$ o bien, $A_2 = \$50{,}930.92474$

En consecuencia, el total recibido en préstamo es:

$$C = 50{,}930.92 + 30{,}000$$

o bien, $C = 80{,}930.92$

y el total que se paga es:

$$M = 60{,}000 + 24{,}894.53$$

o bien, $M = 84{,}894.53$ y los intereses son entonces

$$I = 84{,}894.53 - 80{,}930.92 \quad \text{o} \quad I = \$3{,}963.61$$

Importante

El segundo pago, x, se realiza después de que vencen los 2 documentos. En el desarrollo anterior se supuso que la tasa de interés dada 11.76% se mantenía fija, aun después del vencimiento. Sin embargo, en la práctica es posible que esto no se cumpla, es decir, que la tasa cambie, por intereses *moratorios,* por ejemplo, lo que obligará a plantear y resolver el ejercicio de forma diferente. Lo mismo se hace cuando los pagos se anticipan.

También es cierto que un grave error entre los estudiantes es la tendencia que tienen a sumar las cantidades que corresponden a los préstamos

$$30{,}000 + 54{,}000 = 84{,}000, \text{ en el ejemplo.}$$

Luego suman los abonos

$$60{,}000 + x$$

e igualan los 2 resultados para finalmente despejar el valor o valores de las incógnitas.
por supuesto que esto no se vale, porque se están ignorando las fechas de ubicación de cada cantidad de dinero y con eso los intereses que se generan en la operación financiera o comercial.

Ejemplo 3

Compras a crédito, pagos equivalentes e intereses

Con intereses del 16.56% nominal diario, es decir, una tasa del 16.56% anual capitalizable por días, el 21 de abril se otorga un crédito en mercancía por $63,000, para pagarse el 1 de octubre. El 30 de junio se concede otro por $46,000, que vence el 15 de diciembre y otro el día 25 de julio por $76,000, incluidos los intereses, con vencimiento al 3 de septiembre. En un arreglo se acuerda liquidar los compromisos con 2 pagos, uno el 10 de agosto y el otro el 10 de noviembre, de tal manera que el segundo duplica al primero. Determine:

a) ¿por qué cantidad es cada uno de los 2 pagos?

b) ¿Cuánto se paga por intereses?

solución

En la gráfica de la figura 4.5 se anotan las fechas, los plazos y las cantidades: $63,000 en el 21 de abril, $46,000 el 30 de junio, y $76,000 el 3 de septiembre, la fecha de vencimiento, ya que se incluyen intereses. Los 2 pagos, denotados por x_1 y x_2, se anotan, respectivamente, el 10 de agosto y 10 de noviembre. La fecha focal se localiza el 15 de diciembre.

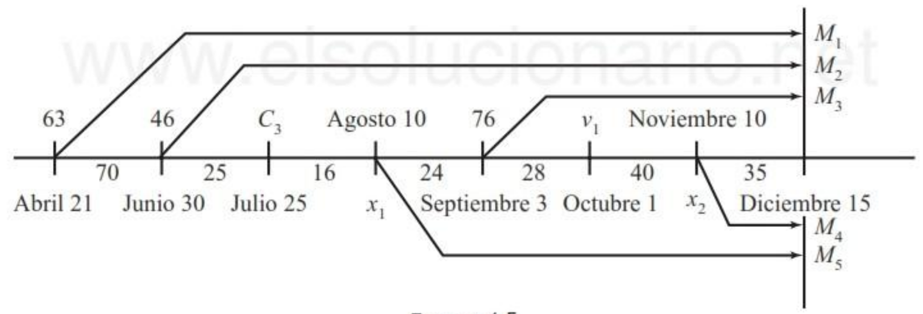


FIGURA 4.5

a) En este diagrama las cantidades de dinero están en miles de pesos y los plazos, es decir, el número de días entre 2 fechas sucesivas, se obtienen con un calendario a la vista o con el auxilio de la tabla 1 del apéndice, por ejemplo.

Con las flechas en el diagrama se pretende ilustrar que todas las cantidades, 3 de los créditos y 2 de los pagos se llevan hasta la fecha focal evaluando el monto de cada una con la fórmula del interés compuesto $M = C(1 + i/p)^{np}$, es decir,

$$M_1 = 63{,}000(1 + 0.1656/360)^{238} = 63{,}000(1.115669672)$$

o bien, $M_1 = 70{,}287.18934$

$$M_2 = 46{,}000(1.00046)^{168} = 46{,}000(1.080325334)$$

o bien, $M_2 = 49{,}694.96536$

$$M_3 = 76{,}000(1.00046)^{103} = 76{,}000(1.048508949)$$

o bien, $M_3 = 79{,}686.68012$

$$M_4 = x_1(1.00046)^{127} = 1.060145929(x_1)$$

$$M_5 = x_2(1.00046)^{35} = 1.016226541(x_2)$$

Un lado de la ecuación de valor, el que corresponde a los créditos es:

$$D = M_1 + M_2 + M_3 = 199{,}668.8348 \qquad \textbf{(A)}$$

y el otro, el de los abonos es:

$$H = M_4 + M_5 = 1.060145929(x_1) + 1.016226541(x_2),$$

por lo tanto:

si $H = D$ entonces $1.060145929(x_1) + 1.016226541(x_2) = 199{,}668.8348$ **(B)**

puesto que $x_2 = 2\,x_1$ así lo estipula el ejemplo, se tiene:

$$1.060145929\,x_1 + 1.016226541(2x_1) = 199{,}668.83 \text{ redondeando}$$

$$3.092599011(x_1) = 199{,}668.83$$

de donde $x_1 = 199{,}668.83/3.092599011$

o bien, $x_1 = \$64{,}563.42$

y el segundo es: $x_2 = 2x_1 = \$129{,}126.84$

b) Los intereses son la diferencia entre el total pagado y el total recibido en los 3 préstamos, esto es, entre el monto M y el capital C donde:

$$M = x_1 + x_2 = 64{,}563.42 + 129{,}126.84 \text{ o bien, } M = 193{,}690.26$$

El total que se recibió en préstamo es la suma de 3 cantidades, los 63 mil del primer crédito, 46 mil del segundo y el valor que se recibió el 25 de julio, marcado como C_3 en la figura 4.5. para C_3 es necesario quitar los intereses a los 76 mil que se pagarían el 3 de septiembre, el plazo es de 40 días.

$$C_3 = 76{,}000(1.00046)^{-40} \qquad C_3 = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C_3 = 76{,}000(0.9817724) \text{ o bien, } C_3 = 74{,}614.70$$

Quiere decir que el total que se recibió en los préstamos es:

$$C = 63{,}000 + 46{,}000 + 74{,}614.70 \text{ o bien, } C = 183{,}614.70 \text{ y los intereses}$$

$$I = 193{,}690.26 - 183{,}614.70 \text{ o bien, } I = \$10{,}075.56$$

Notas importantes

- El valor de D en la ecuación (**A**) equivale a los 3 créditos en la fecha focal y esto significa que un solo pago por $199,668.83 el día 15 de diciembre liquidaría totalmente los 3 compromisos.
- Mientras no cambien las cantidades de dinero, las fechas donde se realizan o se ubican en el diagrama, ni la tasa de interés, la ecuación de valor, ecuación (**B**) en el desarrollo anterior, no variará y por ello será útil para cualquier otra condición o relación que se establezca para los pagos, tal como se ve en los 3 incisos del ejemplo 4.

Ejemplo 4

Resuelva el ejemplo 3 considerando que:

a) El primer abono es un 15% menor que el segundo.

b) El segundo es 21% menor que el primero.

c) El primero de los abonos es $15,250 mayor que el segundo.

solución

a) En la ecuación (**B**) del desarrollo del ejemplo 3, se sustituye x_1 por $x_2 - 0.15\ x_2$ o $x_1 = 0.85\ x_2$ ya que el primer pago es 15% menor que el segundo, entonces

$$1.060145929(0.85x_2) + 1.016226541x_2 = 199{,}668.8348$$
$$0.90112404(x_2) + 1.016226541(x_2) = 199{,}668.83$$
$$1.917350581(x_2) = 199{,}668.83$$

de donde $x_2 = 199{,}668.83/1.917350581$

o bien, $x_2 = \$104{,}137.88$

y $x_1 = 0.85(104{,}137.88)$

o bien, $x_1 = \$88{,}517.20$

En estas condiciones los intereses son:

$$I = (88{,}517.20 + 104{,}137.88) - 183{,}614.70 \text{ o bien, } I = \$9{,}040.38$$

b) Ahora, el segundo abono es 21% menor que el primero, $x_2 = 0.79x_1$ y al reemplazar en la ecuación (**B**) resulta:

$$1.060145929x_1 + 1.016226541(0.79x_1) = 199{,}668.83$$
$$1.060145929x_1 + 0.802818967x_1 = 199{,}668.83$$
$$1.862964896(x_1) = 199{,}668.83$$

de donde $x_1 = 199{,}668.83/1.862964896$

o bien, $x_1 = \$107{,}177.99$

y consecuentemente

$$x_2 = 0.79(107{,}177.99) \text{ o bien, } x_2 = \$84{,}670.61$$

En este caso los intereses son:

$$I = 107{,}177.99 + 84{,}670.61 - 183{,}614.70 \text{ o bien, } I = 8{,}233.90$$

que son menores a los que resultaron en el ejemplo 3 ¿por qué?

c) Si el primer pago es $15,250 mayor que el segundo se cumple que $x_1 = x_2 + 15{,}250$ y al sustituir en la multicitada ecuación (**B**) queda:

$$1.060145929(x_2 + 15{,}250) + 1.016226541(x_2) = 199{,}668.83$$

$$1.060145929x_2 + 16{,}167.22542 + 1.016226541x_2 = 199{,}668.83$$

$$2.07637247(x_2) = 183{,}501.6046$$

de donde $x_2 = 183{,}501.6046/2.07637247$

o bien, $x_2 = \$88{,}376.05$

y $x_1 = \$103{,}626.05$

porque $x_1 = x_2 + 15{,}250$

Ejemplo 5

Suponiendo que una persona realiza los siguientes depósitos y disposiciones en una cuenta que maneja intereses del 9.36% nominal diario hasta el 2 de noviembre, y el 10.32% capitalizable por meses, después de esa fecha, obtenga el monto en su cuenta el día 21 de diciembre luego de su disposición, considerando que cuando hizo su primer retiro tenía en su haber $47,925.00.

Fecha	Depósito	Disposiciones
Agosto 1	--------	$19,728.00
Agosto 16	$10,500.00	---------
Septiembre 9	--------	$5,728.00
Septiembre 22	--------	$10,402.00
Octubre 2	$18,300.00	---------
Noviembre 2	--------	$13,250.00
Noviembre 16	$12,450.00	---------
Diciembre 21	--------	$15,360.00

solución

En la figura 4.6 están las disposiciones por debajo de la recta y los depósitos por encima, de todos se obtiene el monto acumulado al 21 de diciembre, pero antes al 2 de noviembre, que es cuando cambia la tasa de interés. Note que el primer valor corresponde a la diferencia entre el saldo y la primera disposición; también está el número de días entre 2 fechas sucesivas.

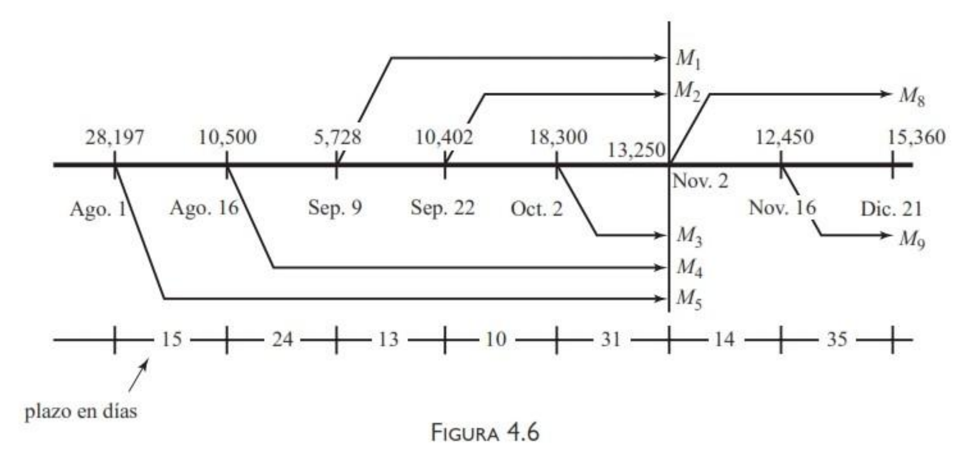


Figura 4.6

Los primeros 2 montos corresponden a las primeras 2 disposiciones, los 2 siguientes a los 2 depósitos y el quinto, M_5, se refiere a lo que quedó el 1º de agosto luego del primer retiro.

$$M_1 = 5{,}728(1 + 0.0936/360)^{54} = 5{,}728(1.014137173) \quad \text{o} \quad M_1 = \$5{,}808.98$$
$$M_2 = 10{,}402(1.00026)^{41} = 10{,}402(1.01071562) \quad \text{o} \quad M_2 = \$10{,}513.46$$
$$M_3 = 18{,}300(1.00026)^{31} = 18{,}300(1.008091513) \quad \text{o} \quad M_3 = \$18{,}448.07$$
$$M_4 = 10{,}500(1.00026)^{78} = 10{,}500(1.020484343) \quad \text{o} \quad M_4 = \$10{,}715.09$$
$$M_5 = 28{,}197(1.00026)^{93} = 28{,}197(1.024471487) \quad \text{o} \quad M_5 = \$28{,}887.02$$

El valor acumulado de las 3 primeras disposiciones al 2 de noviembre es:

$$M_6 = M_1 + M_2 + 13{,}250 \quad \text{o bien,} \quad M_6 = \$29{,}572.44$$

y el de los 3 depósitos es:

$$M_7 = M_3 + M_4 + M_5 \quad \text{o bien,} \quad M_7 = \$58{,}050.18$$

La diferencia $M_7 - M_6 = 28{,}477.74$ es un saldo a favor del cuentahabiente del que el valor futuro 49 días después, del 2 de noviembre al 21 de diciembre, puesto que la tasa nominal diaria es ahora $i = 0.10277316$, ya que, con tasas equivalentes se tiene:

$$(1 + i/360)^{360} = (1 + 0.1032/12)^{12}$$
$$1 + i/360 = (1.0086)^{12/360}$$
$$1 + i/360 = 1.000285481$$
$$i = (0.000285481)360 \quad \text{o bien,} \quad i = 0.10277316$$

Entonces, $M_8 = 28{,}477.74(1.000285481)^{49}$ $\quad 1 + i/p = 1.000285481$

$$M_8 = 28{,}477.74(1.014084842) \quad \text{o bien,} \quad M_8 = \$28{,}878.84$$

El valor futuro de los \$12,450, el depósito del 16 de noviembre, es:

$$M_9 = 12{,}450(1.000285481)^{35} \quad \text{o bien,} \quad M_9 = \$12{,}575.00$$

Consecuentemente, el 21 de diciembre, antes de hacer su retiro el cuentahabiente tiene $M_8 + M_9$ pesos y, después de hacerlo, tendrá:

$$M_8 + M_9 - 15{,}360 = \$26{,}093.84$$

Ejercicios 4.5

1. Explique brevemente los conceptos de *ecuaciones de valores equivalentes, fecha focal* y *diagramas de tiempo.*

2. ¿Qué usos tiene un diagrama de tiempos y qué datos se representan con él?

3. La psicóloga Mora consigue un préstamo por $13,500 y endosa 2 documentos a 30 y 60 días, con cargos del 12.6% de interés anual capitalizable por meses. por alguna causa, no realiza el primer pago y con su acreedor decide hacerlo 15 días después. ¿por qué cantidad será este pago? Suponga que originalmente los 2 son iguales.

4. ¿Cuánto paga por interés la psicóloga del problema 3? Suponga intereses del 13.68% compuesto por días.

*5. Hoy se cumplen 3 meses de que el señor pérez consiguió un préstamo por $37,500 con 7 meses de plazo. Tres meses antes del primero, le concedieron otro por $24,600 a un plazo de 8 meses. El día de hoy hace un abono de $30,000 pesos y acuerda con su acreedor liquidar el resto en 3 meses. ¿De cuánto es este pago, si se tienen cargos del 21.84% efectivo?

6. Con un interés del 6.48% capitalizable por días se invierten $16,800 el 3 de abril, y otros $25,600 el 10 de junio. ¿Cuánto se tiene en la inversión el 18 de agosto, si el 5 de julio se hizo un retiro de $20,000?

*7. El 1 de junio se consiguió un préstamo por $19,750, el cual se liquidará 7 quincenas después con un pago de $20,800. Obtenga la magnitud de 2 pagos iguales que sustituyen al anterior y que se hacen a 2 y 5 quincenas, contadas a partir del 1º de junio. ¿De cuánto es cada pago si el segundo es 50% mayor que el primero? (Sugerencia: obtenga primero la tasa de interés.)

*8. Obtenga 2 pagos iguales que se hacen el 15 de abril y el 8 de junio, y que reemplazan a los que se harían el 3 de mayo y el 15 de mayo, por $35,000 cada uno, para liquidar una deuda del 23 de diciembre anterior con intereses del 13.68% capitalizable por días. ¿ por qué cantidad fue la deuda? ¿Cuánto se paga por concepto de intereses?

9. Al comprar un automóvil seminuevo se deja un anticipo del 40% y el resto se liquida con 2 pagos a 60 y 90 días, por $60,000 y $86,000, respectivamente, a una tasa de interés del 15% anual compuesto por meses. ¿Cuánto se pagaría de contado por el automóvil, si además se hace un 5% de descuento adicional?

10. En el problema 9, ¿cuánto tiempo después de la compra se haría un pago por $150,000 en sustitución de los 2 de $60,000 y $86,000? (Sugerencia: encuentre la tasa de interés anual capitalizable por días equivalente.)

11. ¿Cuánto debe invertirse el 5 de abril y el 16 de junio para disponer de $45,000 el 21 de agosto y de $50,000 el 3 de octubre, en una cuenta que paga intereses del 6.96% compuesto por días, suponiendo que:

    a) Los 2 depósitos son iguales.

    b) El segundo depósito es un 25% mayor que el primero.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

En los problemas 12 a 25, seleccione la opción correcta justificando su elección.

***12.** Se consigue un préstamo endosando 2 documentos a 30 y 90 días, por $25,200 y $44,100, respectivamente, con intereses del 18.6% nominal mensual. poco antes de hacer el primero se acuerda con el acreedor sustituir los 2 por uno solo a 53 días de que se otorgó el préstamo. ¿De cuánto es este pago?

a) $67,791.43 *b*) $65,986.04 *c*) $68,770.23 *d*) $64,095.35 *e*) Otra

13. En el problema 12, ¿cuánto se recibió en préstamo?

a) $68,036.25 *b*) $66,926.68 *c*) $67,008.23 *d*) $68,695.24 *e*) Otra

14. El 10 de enero se invierten $26,350. ¿Cuánto se tendrá en la cuenta el 19 de julio, si al 1º de mayo se tenían $27,365.00?

a) $28,446.70 *b*) $28,111.11 *c*) $29,003.42 *d*) $28,649.32 *e*) Otra

15. ¿De cuánto puede disponer el señor Huerta el 25 de octubre, si el 15 de marzo depositó $25,650 en una cuenta que le bonifica el 6.84% nominal diario? Suponga que el primer día de año tenía $28,325 y el 21 de junio dispuso de $25,200 de la misma cuenta.

a) $30,923.79 *b*) $30,070.42 *c*) $29,029.32 *d*) $29,968.31 *e*) Otra

***16.** Fabiola debe $17,600 pagaderos a 2 meses y $23,150 a 5 meses incluyendo intereses. Al término de los primeros 40 días, hace un abono de $30,000, ¿con cuánto saldará su cuenta 135 días después de que hizo el primer abono? Suponga intereses del 10.8% nominal mensual.

a) $10,389.34 *b*) $9,521.43 *c*) $10,629.03 *d*) $10,304.20 *e*) Otra

17. ¿Cuántos días después del primer abono, Fabiola, la chica del problema 16, cancela su deuda con $10,500?

a) 189 *b*) 198 *c*) 193 *d*) 202 *e*) Otra

18. Obtenga 3 pagos iguales que el señor Quintero realiza el 10 de junio, el 25 de agosto y el 3 de octubre, y sustituyen a los que haría el 5 de abril por $28,960, y el 12 de septiembre por $26,425, por un crédito que logró el 28 de enero con intereses del 15% efectivo.

a) $18,691.42 *b*) $18,028.45 *c*) $18,853.69 *d*) $19,056.73 *e*) Otra

19. En el problema 18, ¿a cuánto asciende la diferencia en pesos entre los 2 planes de pagos?

a) $1,067.06 *b*) $1,176.07 *c*) $1,243.67 *d*) $1,108.95 *e*) Otra

20. ¿Cuánto se recibió en el préstamo del problema 18?

a) $51,898.84 *b*) $52,129.73 *c*) $51,926.05 *d*) $52,412.32 *e*) Otra

***21.** La Constructora piscis consigue un crédito y endosa 3 documentos con un valor nominal de $765,000, $650,000 y $820,000, con plazo de 2, 5 y 8 meses, respectivamente. Luego de efectuar el primero, acuerda con sus acreedores liquidar el resto con 3 abonos mensuales, comenzando 3 meses después de otorgado el préstamo. ¿De cuánto es cada uno si se consideran intereses del 16.5% anual capitalizable por meses?

a) $734,545.04 *b*) $740,129.53 *c*) $739,171.51 *d*) $742,504.03 *e*) Otra

22. ¿Cuánto pagó la constructora del problema 21 por concepto de intereses, y cuánto iba a pagar?

a) $120,201.03 y 151,528.36 *b*) $117,015.98 y 148,378.43 *c*) $118,048.41 y 149,209.63 *d*) $116,729.00 y 147,921.09 *e*) Otra

***23.** Una importante firma comercial compra un local para la venta de sus productos, con un anticipo del 40% y 5 abonos quincenales de $65,000 cada uno, haciendo el primero 4 meses después de la compra. Logra ventas tan extraordinarias que decide liquidar su adeudo con 3 pagos, el primero por $100,000 en lugar del primer abono quincenal, otro por $125,000 3 meses después del primero, y un tercero, a 4 meses del anterior. ¿De cuánto es este pago, si le cargan intereses del 16% efectivo?

a) $135,325.04 *b*) $148,321.35 *c*) $123,031.13 *d*) $109,665.72 *e*) Otra

24. ¿Cuál es el precio de contado del local en el problema 23?

a) $509,203.32 *b*) $580,436.33 *c*) $566,598.93 *d*) $435,328.3 *e*) Otra

25. ¿Cuánto paga de más o se ahorra por intereses la firma comercial del problema 23 por cambiar el plan de pagos?

a) $10,948.31 *b*) $9,363.08 *c*) $9,665.72 *d*) $10,968.87 *e*) Otra

4.6 Algunos problemas de aplicación

Aunque la gran mayoría de los ejemplos resueltos y los ejercicios propuestos son verdaderas aplicaciones del interés compuesto, a continuación se agregan otras que pueden considerarse como un compendio de los temas tratados en el capítulo.

Flujo de caja

Ejemplo 1

Flujo de caja en construcción de vivienda

para la construcción de un núcleo de vivienda, un contratista requiere de $5 ’000,000 distribuidos de la forma siguiente: 40% al comenzar las obras, 30% a los 3 meses, 20% a los 6 meses y el 10% restante al entregar las viviendas, 7 meses después de haber comenzado los trabajos. Con este propósito, el propietario deposita $2 ’000,000, un mes antes de comenzar la construcción. Tres meses después del primer depósito, hace otro, equivalente al resto del presupuesto, en un banco que paga el 13.92% de interés anual capitalizable por meses. ¿De qué cantidad es este pago?

solución

La figura 4.7 muestra un diagrama de tiempo con las cantidades en millones de pesos, donde cada subdivisión de la recta representa un periodo mensual. La fecha focal se localiza al final, por lo que de todas las cantidades se obtiene el monto.

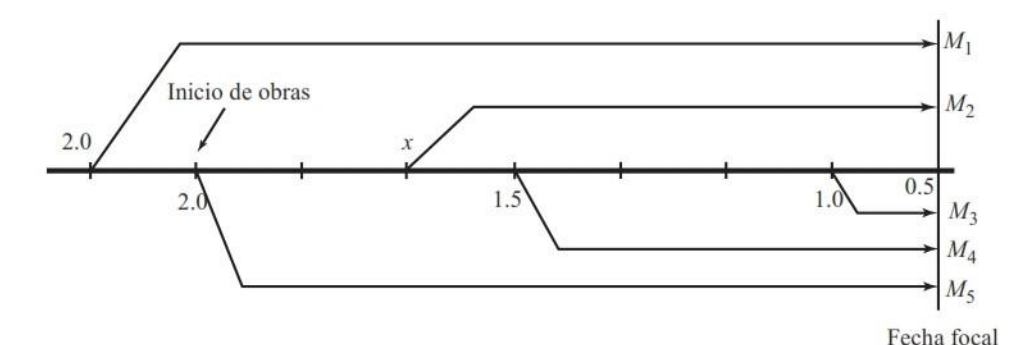


FIGURA 4.7

En el extremo izquierdo de la gráfica se encuentra el primer depósito y un mes después, al inicio de las obras, el primer retiro, que es igual al 40% del presupuesto total:

$$0.40(5'000,000) = 2'000,000$$

Tres meses después está el segundo retiro, del 30%:

$$0.30(5'000,000) = 1'500,000$$

y el 20% a los 6 meses de iniciada la construcción:

$$0.20(5'000,000) = 1'000,000$$

Al final está el 10% restante, es decir, \$500,000. El segundo depósito por x pesos se localiza a 3 meses después del primero.

Todas las cantidades se trasladan hasta la fecha focal, con la fórmula del interés compuesto y los plazos que se observan en el diagrama de la misma figura.

$$M_1 = 2(1 + 0.1392/12)^8 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = 2(1.0116)^8$$
$$M_1 = 2(1.096656369) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = 2.193312738 \text{ millones.}$$

El valor futuro del segundo pago, 5 meses después, es:

$$M_2 = x(1.0116)^5$$

o bien,

$$M_2 = (1.0593613)x$$

Un lado de la ecuación de valores equivalentes es, por lo tanto,

$$P = 2.193312738 + (1.0593613)x$$

y el otro lado, el de las 4 disposiciones, es:

$$Q = M_3 + M_4 + M_5 + 0.5 \text{ millones de pesos.}$$

Tal como se aprecia en la misma figura 4.7, donde también se observa que los plazos son, respectivamente, 1, 4 y 7 meses, entonces,

$$M_3 = 1.0(1.0116)^1 \quad \text{o bien,} \quad M_3 = 1.0116 \text{ millones de pesos}$$
$$M_4 = 1.5(1.0116)^4$$
$$M_4 = 1.5(1.047213622) \quad \text{o bien,} \quad M_4 = 1.570820433$$
$$M_5 = 2.0(1.0116)^7$$
$$M_5 = 2.0(1.08408103) \quad \text{o bien,} \quad M_5 = 2.16816206$$

Así,

$$Q = 1.0116 + 1.570820433 + 2.16816206 + 0.5$$
$$Q = 5.250582493 \text{ millones de pesos.}$$

La ecuación de valor es, en consecuencia,

$$2.193312738 + (1.0593613)x = 5.250582493 \qquad P = Q$$

de donde:

$$x = (5.250582493 - 2.193312738)/1.0593613$$
$$x = 3.057269755/1.0593613 \quad \text{o bien,} \quad x = 2.885955674$$

es decir,

$$x = \$2'885,955.67$$

Reestructuración de un crédito automotriz

Ejemplo 2

Se compra un automóvil con precio de contado de $293,500, con un anticipo y 3 abonos bimestrales iguales al anticipo, con un interés del 16.2% anual capitalizable por bimestrespoco antes de hacer el primer pago bimestral se conviene en reestructurar la deuda con 2 pagos a 3 y 7 meses de la compra, de tal manera que el segundo es un 25% mayor que el primero.

a) ¿De cuánto es cada pago?

b) ¿Cuánto se paga por intereses?

c) ¿Cuál fue el costo para el cliente por haber cambiado el plan de pagos?

solución

a) para conocer el monto de los 2 nuevos pagos es necesario encontrar primero el valor del anticipo A. para esto se calcula el valor presente C_1, C_2 y C_3 de cada uno de los 3 originales R_1, R_2 y R_3. La suma de los 4 debe ser igual al precio del automóvil.

$$A + C_1 + C_2 + C_3 = \$293,500$$

La frecuencia de conversión es$p = 6$, ya que son 6 los bimestres que tiene un año y la tasa de interés anual es $i = 0.162$. por lo tanto, para el primero el plazo es de un bimestre:

$$C_1 = R_1(1 + 0.162/6)^{-1} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C_1 = R_1(1.027)^{-1}$$

o bien, $$C_1 = (0.973709835)R_1$$

para el segundo y el tercero, el plazo es, respectivamente, de 2 y 3 bimestres:

$$C_2 = R_2(1.027)^{-2} \quad \text{o bien,} \quad C_2 = (0.948110842)R_2$$

$$C_3 = R_3(1.027)^{-3} \quad \text{o bien,} \quad C_3 = (0.923184851)R_3$$

La suma de los 4 es, entonces,

$$A + (0.973709835)R_1 + (0.948110842)R_2 + (0.923184851)R_3 = \$293,500$$

puesto que todos son iguales, $A = R_1 = R_2 = R_3$, se suman los coeficientes de las variables en el lado izquierdo y después se divide la ecuación entre la suma.

$$(3.845005527)A = \$293,500$$

de donde:

$$A = 293,500/3.845005527 \quad \text{o bien,} \quad A = \$76,332.79$$

que es el valor del anticipo y de los otros 3 abonos.

Entonces, después del anticipo el crédito es:

$$C = 293,500 - 76,332.79$$

o bien, $$C = \$217,167.21$$

que deberá ser igual al valor presente, el día de la compraventa, de los 2 pagos del nuevo convenio.

En la figura 4.8 se aprecian los abonos originales en la parte superior de la línea, y los nuevos, en la inferior. Cada espacio representa un periodo mensual.

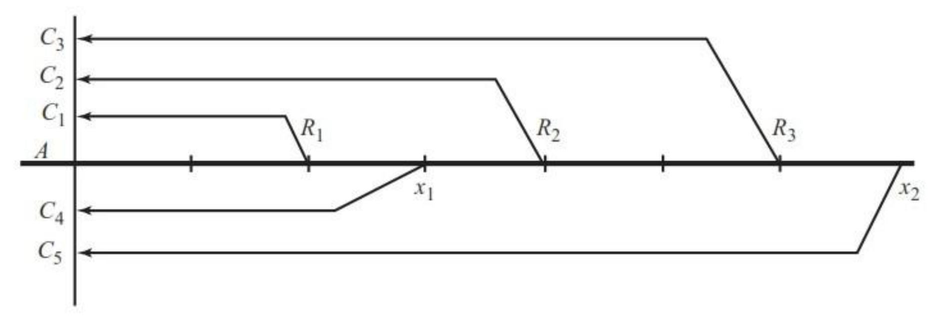


Figura 4.8

Ahora se encuentra el valor presente de los 2 pagos x_1 y x_2, y la suma debe ser igual al crédito C.

El valor presente del primero con 3 meses o 1.5 bimestres de plazo es:

$$C_4 = x_1(1 + 0.0162/6)^{-1.5}$$

$$C_4 = x_1(1.027)^{-1.5}$$

o bien, $C_4 = (0.960825089)x_1$ $\qquad a^{-n} = 1/a^n$

y el segundo es

$$C_5 = x_2(1.027)^{-3.5} \quad \text{o bien,} \quad C_5 = (0.910968684)x_2$$

pero como x_2 es 25% mayor que x_1, $x_2 = 1.25x_1$, se tiene que:

$$C_5 = (0.910968684)(1.25x_1) \quad \text{o bien,} \quad C_5 = (1.138710854)x_1$$

Note que para estos 2 capitales podría emplearse la tasa de interés compuesta por mes, equivalente y esto se deja como un buen ejercicio para el estudiante. La suma de los 2 debe ser igual al crédito inicial, luego de dar el anticipo, es decir,

$$C_4 + C_5 = 217{,}167.21$$

o bien, $(0.960825089)x_1 + (1.138710854)x_1 = 217{,}167.21$

de donde $(2.099535943)x_1 = 217{,}167.21$

$$x_1 = 217{,}167.21/2.099535943 \quad \text{o bien,} \quad x_1 = \$103{,}435.81$$

El segundo pago es un 25% mayor que éste, y

$$x_2 = 1.25(103{,}435.81)$$

o bien, $x_2 = \$129{,}294.77$

b) Los intereses son igual a la diferencia entre el total que se pagó $x_1 + x_2$ y el crédito original; esto es:

$$I = (103{,}435.81 + 129{,}294.77) - 217{,}167.21$$

o bien, $I = \$15{,}563.37$

c) Los intereses que se pagarían en el plan original son:

$$I = 4(76{,}332.79) - 293{,}500 = \$11{,}831.16$$

o también $I = 3(76{,}332.79) - 217{,}167.21$

sin considerar el anticipo porque éste no lleva intereses.

Consecuentemente el haber reestructurado su crédito el comprador tuvo un desembolso adicional, es decir, un costo de \$3,732.21 que son la diferencia entre los 2 intereses.

$$D = 15{,}563.37 - 11{,}831.16 = 3{,}732.21$$

Note que otra manera de obtener este costo, consiste en hallar la diferencia entre lo que se pagaría con los 3 abonos originales y el total que se pagó en el nuevo plan sin anticipo alguno, es decir,

$$D = (103{,}435.81 + 129{,}294.77) - 3(76{,}332.79)$$

$$D = 232{,}730.58 - 228{,}998.37$$

o bien, $D = \$3{,}732.21$ que es igual al anterior.

Constitución de un fideicomiso con tasa variable

Ejemplo 3

¿Cuánto debe depositarse ahora, cuánto dentro de 2 años y cuánto más 3 años después, para constituir un fideicomiso y disponer de 8.6 millones de pesos, al cabo de 12 años contados a partir de ahora, considerando que el segundo depósito es un 15% menor que el primero y que el último excede en $450,000 al segundo?

Suponga que se devengan intereses del 9.3% nominal mensual en los primeros 4 años, del 11.4% anual capitalizable por semestres en los 3 años siguientes y del 12.8% efectivo en los últimos cinco.

solución

El diagrama temporal de la figura 4.9, donde cada subdivisión representa un periodo anual y el dinero está en miles, puede auxiliarnos a plantear el problema. En él se han anotado los 3 depósitos, el primero de los cuales es x_1, el segundo será $x_2 = x_1 - 0.15x_1$, o $x_2 = 0.85x_1$, factorizando x_1. puesto que es $450,000 mayor que el segundo, el tercer pago en miles de pesos será:

$$x_3 = x_2 + 450$$

o bien, $x_3 = (0.85)x_1 + 450$ ya que $x_2 = (0.85)x_1$

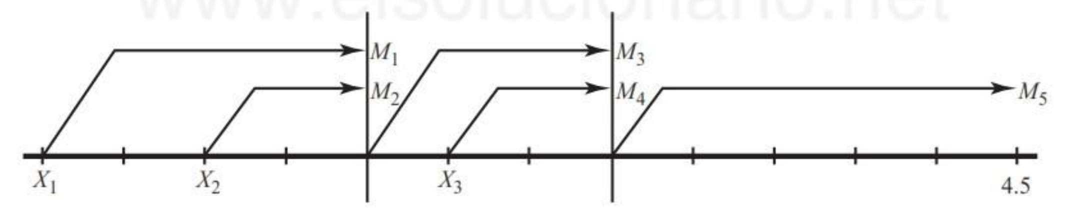


FIGURA 4.9

Como la tasa es variable, se deben considerar 3 plazos distintos, tal como se observa en la misma figura, de 4, 3 y 5 años, respectivamente, cada uno. Ahí mismo se aprecian 5 montos, el último de los cuales debe ser igual a los pretendidos 8.5 millones de pesos. Todos se obtienen con la fórmula del interés compuesto. En el primero, por ejemplo, el valor presente es x_1, el plazo es de 4 años o 48 meses, y la tasa de interés nominal mensual, esto es, capitalizable por meses, es 9.3%.

$$M_1 = x_1(1 + 0.093/12)^{48} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M_1 = x_1(1.00775)^{48} \quad \text{o bien,} \quad M_1 = (1.448554126)x_1$$

De manera semejante, el segundo es:

$$M_2 = x_2(1.00775)^{24} \quad \text{son 2 años de plazo}$$

$$M_2 = (1.203558942)x_2$$

$$M_2 = (1.203558942)(0.85x_1) \qquad x_2 = 0.85x_1$$

o bien, $M_2 = (1.023025101)x_1$

La suma de los 2 es:

$$M_1 + M_2 = (1.448554126)x_1 + (1.023025101)x_1$$
$$M_1 + M_2 = 2.471579227(x_1)$$

y su valor futuro, a 3 años, esto es a 6 semestres después, con la nueva tasa de interés es:

$$M_3 = (2.471579227x_1)(1 + 0.114/2)^6$$
$$M_3 = (2.471579227x_1)(1.394600844)$$
$$M_3 = 3.446866476(x_1)$$

El valor acumulado de x_3, el tercer pago, 2 años después es:

$$M_4 = x_3(1 + 0.114/2)^4$$
$$M_4 = 1.248245328(x_3)$$
$$M_4 = 1.248245328(0.85x_1 + 450) \text{ porque } x_3 = 0.85x_1 + 450$$
$$M_4 = 1.061008529(x_1) + 561.7103976$$

La suma de los montos M_3 y M_4 factorizando x_1 es:

$$M_3 + M_4 = (3.446866476 + 1.061008529)x_1 + 561.7103976$$
$$M_3 + M_4 = 4.507875005(x_1) + 561.7103976$$

y finalmente, considerando a esta suma como un capital C, su valor futuro 5 años después con la tasa efectiva del 12.8% es:

$$M_5 = C(1 + 0.128)^5$$
$$M_5 = C(1.826188057)$$

de donde al sustituir C resulta

$$M_5 = [4.507875005(x_1) + 561.7103976](1.826188057)$$

$M_5 = 8.232227487(x_1) + 1{,}025.78882 = 8{,}600$ en miles ya que debe ser igual a los 8.6 millones de pesos del pretendido fideicomiso.

para despejar x_1 el primer depósito, se restan las constantes y el resultado se divide entre el coeficiente de x_1.

$$x_1 = (8{,}600 - 1{,}025.78882)/8.232227487$$
$$x_1 = 7{,}574.21118/8.232227487$$
$$x_1 = 920.0682552 \text{ o bien, } \$920{,}068.26$$

El segundo es 15% menor

$$x_2 = 920{,}068.26(1 - 0.15) \text{ o bien, } x_2 = 782{,}058.02$$

y el tercero es 450,000 más grande

$$x_3 = 782{,}058.02 + 450{,}000 = 1'232{,}058.02$$

Ejemplo 4

¿A cuánto ascienden los intereses que se devengan en el fideicomiso del ejemplo 3?

solución

Los intereses son la diferencia entre el total depositado y los 8.6 millones del monto, $I = M - C$

$$I = 8'600,000 - (920,068.26 + 782,058.02 + 1'232,058.02)$$

$$I = 8'600,000 - 2'934,184.30$$

o bien, $I = \$5'665,815.70$

Plazos equivalentes y fecha de vencimiento promedio

Cuando una serie de obligaciones, con montos y plazos establecidos, se reemplaza por una sola cuya magnitud es igual a la suma de las anteriores, pero con fecha diferente, al tiempo transcurrido para este pago, se le llama *plazo equivalente*.

Ejemplo 5

¿Qué día deberá efectuarse un abono de $75,000 que sustituye a 3 pagos de $25,000, $20,000 y $30,000 con plazo de 4, 8 y 11 meses respectivamente? Suponga intereses del 14% efectivo.

solución

El diagrama de la figura 4.10 donde los montos están en miles y cada subdivisión representa un periodo mensual, puede ayudarnos.

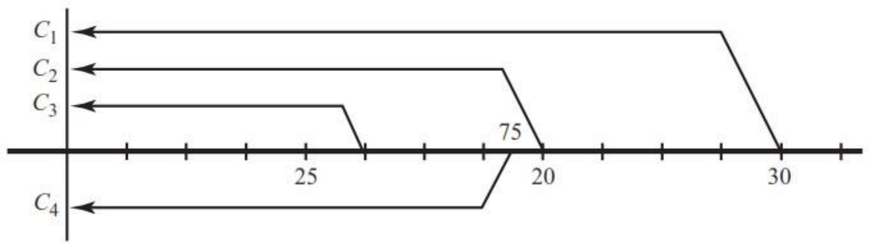


FIGURA 4.10

La tasa de interés capitalizable por días equivalente al 14% efectivo es i de la ecuación siguiente que resultó de igualar los montos con los diferentes periodos de capitalización.

$$(1 + i/360)^{360} = 1 + 0.14$$

de donde

$$1 + i/360 = \sqrt[360]{1.14} \text{ o bien, } 1 + i/360 = 1.000364034$$

Note que no es necesario despejar la i porque $1 + i/360$ es lo que se necesita para la fórmula del interés compuesto $M = C(1 + i/p)^{np}$ de donde $C = M(1 + i/p)^{-np}$

El primer capital C de la figura 4.10 tiene un plazo de 11 meses o 330 días ubicando por supuesto la fecha focal al comenzar el plazo, por lo tanto:

$$C_1 = 30{,}000(1.000364034)^{-330} = 30{,}000(0.886823449)$$

o bien,

$$C_1 = 26{,}604.70$$

El plazo para C_2 es 8(30) = 240 días, para C_3 es 120 días y para C_4 es de x días, es la incógnita, entonces,

$$C_2 = 20{,}000(1.000364034)^{-240} = 18{,}327.08$$
$$C_3 = 25{,}000(1.000364034)^{-120} = 23{,}931.60$$
$$C_4 = 75{,}000(1.000364034)^{-x}$$

La ecuación de valores equivalentes es:

$$75{,}000(1.000364034)^{-x} = 26{,}604.70 + 18{,}327.08 + 23{,}931.60 \quad C_4 = C_1 + C_2 + C_3$$

para despejar x_1, el 75,000 pasa dividiendo a la suma del lado derecho y después se toma el logaritmo natural a los 2 lados

$$(1.000364034)^{-x} = 68{,}863.38/75{,}000$$
$$(1.000364034)^{-x} = 0.9181784$$
$$\ln(1.000364034)^{-x} = \ln(0.9181784)$$
$$(-x)\ln(1.000364034) = \ln(0.9181784) \quad \log_a(M^x) = (x)\log_a(M)$$
$$-x = \ln(0.9181784)/\ln(1.000364034)$$
$$-x = -0.085363572/0.000363964$$
$$x = 234.5360829 \text{ o } 235 \text{ días}$$

redondeando esto es: 7 meses y 25 días aproximadamente contados desde el inicio del plazo. Vea en la figura 4.10 la localización de los $75,000.

Solución alterna

Es evidente, como se dijo antes, que este resultado no cambia aunque se cambie la posición de la fecha focal incluyendo cuando se posiciona en el último monto para evitar su desplazamiento. La gráfica en estas condiciones es la figura 4.11.

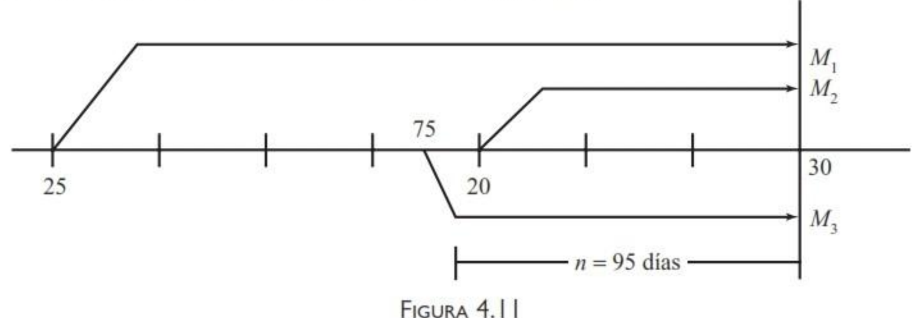


FIGURA 4.11

Ahora se evalúan 3 montos con plazos de 210, 90 y n días respectivamente

$$M_1 = 25{,}000(1.000364034)^{210} = 26{,}985.75$$
$$M_2 = 20{,}000(1.000364034)^{90} = 20{,}665.99 \text{ y}$$
$$M_3 = 75{,}000(1.000364034)^{n}$$

La ecuación de valor es ahora

$$75{,}000(1.000364034)^{n} = M_1 + M_2 + 30{,}000 = 77{,}651.74$$

de donde

$$(1.000364034)^{n} = 77{,}651.74/75{,}000 \text{ o bien, } (1.000364034)^{n} = 1.035356576$$

Como antes, se toma logaritmo a los 2 lados, se baja el exponente, n, y su coeficiente se pasa dividiendo al miembro de la derecha, es decir,

$$n = \ln(1.035356576)/\ln(1.000364034)$$
$$n = 95.46418526 \text{ o bien, } n = 95 \text{ días, redondeando.}$$

Nótese que $x + n = 235 + 95 = 330$ días o 11 meses, que son los que hay entre la fecha inicial y la final del plazo.

Importante

Insistimos en que la posición de la fecha que se encontró, donde están los $75,000, llamada**Fecha de Vencimiento Promedio** no se afecta, no cambia aunque se cambie la fecha focal.

Ejemplo 6

Encuentre la Fecha de vencimiento promedio para los pagos de $9,000 el día 10 de abril $28,500 el 25 de agosto y $13,000 del 3 de octubre imponiendo intereses del 12.87% nominal diario.

solución

En el diagrama de la figura 4.12 están los plazos, las fechas y las cantidades de dinero que se trasladan hasta el 3 de octubre, la fecha focal arbitraria.

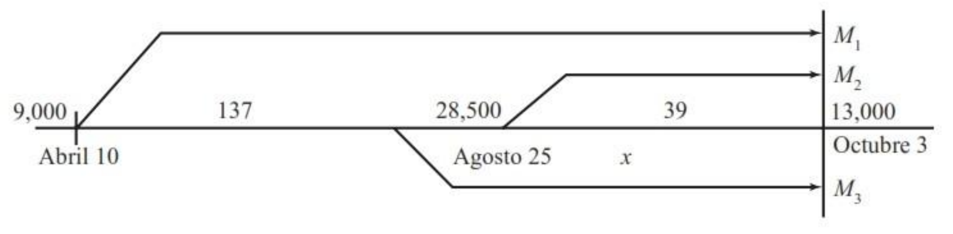


FIGURA 4.12

$$M_1 = 9{,}000(1 + 0.1287/360)^{176} = 9{,}000(1.0003575)^{176}$$
$$M_1 = 9{,}000(1.064929666) \text{ o bien, } M_1 = 9{,}584.37$$
$$M_2 = 28{,}500(1.0003575)^{39} \text{ o bien, } M_2 = 28{,}900.07 \text{ y}$$
$$M_3 = 50{,}500(1.0003575)^x, \text{ 50,500 es la suma de los 3 pagos.}$$

La ecuación de valores equivalentes es entonces:

$$50{,}500(1.0003575)^x = 9{,}584.37 + 28{,}900.07 + 13{,}000$$
$$50{,}500(1.0003575)^x = 51{,}484.44$$

Se pasan dividiendo los 50,500, luego se considera el logaritmo natural a los 2 lados de la ecuación, se baja el exponente y el logaritmo del paréntesis pasa dividiendo, pero es más claro si lo hacemos.

$$(1.0003575)^x = 51{,}484.44/50{,}500$$
$$\ln(1.0003575)^x = \ln(1.019493861)$$
$$(x)\ln(1.0003575) = \ln(1.019493861)$$
$$x = \ln(1.019493861)/\ln(1.0003575)$$
$$x = 0.019306289/0.000357436$$

$x = 54.0132594$ ó 54 días, antes del 3de octubre y esto se cumple el 10de agosto como puede comprobarse con la tabla del apéndice B.

Ejercicios 4.6

1. Explique brevemente la *fecha de vencimiento de promedio*.
2. Luis compra un departamento con \$120,000 de anticipo y 3 pagos iguales de \$135,000 cada año a 3, 5 y 8 meses de la compra, con intereses del 7.2% anual capitalizable por meses. ¿Cuál es el precio de contado?
3. En el problema 2, ¿cuál fue el costo para Luis por no pagar el departamento de contado?
4. Con un depósito inicial de 1.5 millones de pesos se constituyó un fideicomiso, ¿cuánto se tendrá 5 años después si 2 años después del inicial se depositaron otros \$925,000? Suponga intereses del 5.4% nominal trimestral.
5. ¿Qué día deberán pagarse \$155,000 en lugar de 3 pagarés con valor nominal de \$40,000, \$55,000 y \$60,000 que vencen respectivamente el 10 de marzo, el 15 de junio y el 31 de octubre? Suponga cargos del 18.3% nominal diario.

***6.** Encuentre la fecha de vencimiento promedio para el pago que sustituye a los siguientes 4: el primero por $23,500 el día 15 de noviembre; el segundo por $19,600 el 4 de enero; un ter - cero por $27,400 para el 17 de abril, y el último por $16,300 para el 23 de mayo. Considere intereses del 10.5% efectivo.

***7.** El licenciado Ruiz compra una camioneta con un enganche de $75,000 y el 70% restante con 3 abonos a 3, 4 y 6 meses de la compra, de cuánto es cada uno si se cargan intereses del 21.9% nominal mensual y además:

a) Los 3 son iguales.

b) Cada uno es un 8% mayor que el anterior.

c) Cada uno es $15,000 más chico que el siguiente.

8. Obtenga los intereses en cada una de las condiciones del problema 7.

9. En el problema 7 determine de qué tamaño es un pago único que el licenciado hará a los 5 meses de la compra en sustitución de los 3 originales y encuentre los intereses.

10. ¿Cuánto se tendrá dentro de 6 años en una cuenta que bonifica intereses del 7.39% efectivo, ahora se depositan $165,000, 2 años antes se habían depositado $220,000 y se depositan otros $275,000 al término de 2 años a partir de ahora?

***11.** ¿De cuánto se podrá disponer al iniciar la construcción de un minisúper, si 3 meses antes se depositaron 2.5 millones de pesos y 2 meses antes del primero se habían depositado otros $1'750,000? Considere intereses del 6.9% nominal mensual que se necesitarán $950,000 al final de cada trimestre, durante los 9 meses que dura la construcción y que un mes antes de concluir este periodo se requerirán 350 mil pesos para mobiliario y equipo. Suponga que la cuenta queda en ceros luego del último retiro.

12. ¿Cuánto dinero se generó por concepto de intereses en el problema 11?

13. para instalar un pequeño restaurante Jorge consigue un préstamo el 8 de febrero con interés del 13.8% nominal mensual y se compromete a pagar 3 pagarés, el primero por $165,000 que vence el 21 de abril; el segundo que vence el 1 º de junio por $190,000, y el último por $220,000 y vencimiento al 27 de septiembre, ¿cuánto le prestaron?

***14.** ¿De cuánto serán 2 pagos iguales a realizar el 13 de mayo y el 5 de agosto en sustitución de los 3 que haría Jorge del problema 13?

15. ¿De qué magnitud es un pago único el día 20 de junio en el problema 13?

16. ¿Con qué tasa de interés efectivo un capital se incrementa un 14.5% en 8 meses?

En los problemas 17 a 27 seleccione la opción correcta justificando su respuesta.

***17.** Es la fecha de vencimiento promedio para un par de documentos, el primero por $19,650 el día 23 de noviembre y el otro por $23,445 para el 15 de febrero del año siguiente, suponiendo intereses del 8.42% nominal diario.

a) Febrero 1 *b*) Enero 2 *c*) Enero 7 *d*) Diciembre 21 *e*) Otra

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***18.** ¿De cuánto es cada uno de 3 pagos iguales que se hacen a 3, 4 y 5 meses del inicio y sustituyen a uno por $75,200 a un mes de la primera fecha y otro 5 meses después del primero por $45,000? Suponga intereses del 11.7% nominal bimestral.

a) $40,515.26 *b*) $38,927.14 *c*) $41,092.75 *d*) $40,125.36 *e*) Otra

19. Los 128 empleados de una empresa mueblera participan con $4,650 cada uno para constituir un fideicomiso, 6 meses después ya son 135 y cada uno participa con otros $3,000 para un segundo depósito, ¿cuánto dinero tendrán 8 años después de la constitución del fideicomiso si los intereses son del 7.24% nominal semestral durante los primeros 3 años y del 8.62% nominal mensual durante los otros 5?

a) $2’169,309.23 *b*) $2’737,427.26 *c*) $2’625,370.62 *d*) $2’370,865.79 *e*) Otra

20. ¿Cuánto ganaron por intereses los empleados del problema 19?

a) $995,363.5 *b*) $1’203,405.03 *c*) $1’190,293.08 *d*) $1’100,665.79 *e*) Otra

21. ¿Cuál es la fecha de vencimiento promedio para 3 pagos de $17,500 el primero, $23,200 el segundo que se realiza 3 meses después del primero, y $35,000 que se hace a 4 meses del segundo? Considere cargos o intereses del 23.4% nominal mensual. De su respuesta a partir del primer pago.

a) 3 meses, 12 días *b*) 3 meses, 5 días *c*) 2 meses, 20 días *d*) 3 meses *e*) Otra

22. Carlos compra una bicicleta profesional con un crédito de $35,000 e intereses del 18.9% efectivo. Tres meses después hará un pago por el 40% más los intereses correspondientes, y 4 meses después liquida el resto. ¿De qué tamaño es el último pago?

a) $23,231.40 *b*) $22,928.35 *c*) $22,125.93 *d*) $23,428.07 *e*) Otra

23. ¿De qué cantidad serán 2 pagos iguales que sustituyen a los 2 del problema 22 si se efectúan a los 2 y a los 5 meses de la compra?

a) $18,401.97 *b*) $18,725.03 *c*) $17,929.32 *d*) $18,093.92 *e*) Otra

24. ¿Cuál es el costo o beneficio para Carlos del problema 22, si modifica su plan de pagos como en el problema 23?

a) Beneficio $968.73 *c*) Costo $989.63 *e*) Otra
b) Costo $1,125.03 *d*) Beneficio $1,046.66

25. Ana Lilia compra un automóvil con un enganche del 45% y 3 abonos mensuales iguales de $75,000 cada uno con interés del 17.4% nominal mensual, ¿cuántos días después de la compra realizaría un pago de $225,000 en sustitución de los 3?

a) 1 mes, 19 días *b*) 2 meses *c*) 2 meses, 14 días *d*) 1 mes, 25 días *e*) Otra

26. ¿Cuál es el precio de contado del automóvil que compra Ana Lilia del problema 25?

a) $306,758.09 *b*) $375,098.35 *c*) $336,352.81 *d*) $327,895.32 *e*) Otra

***27.** En el problema 25, ¿de cuánto será el tercer pago si el primero es un 20% mayor que el segundo y el tercero un 15% menor que el primero?

a) $70,329.65 *b*) $71,215.82 *c*) $71,928.32 *d*) $72,529.68 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- pronosticar y realizar cálculos operativos con cantidades que crecen de manera no constante, como inflación, devaluación, producción, etcétera.
- Evaluar el *monto acumulado,* el *capital,* los *intereses,* el *plazo* y la *tasa de interés* en operaciones financieras y comerciales con interés compuesto, utilizando la fórmula del interés compuesto:

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

- Hacer cálculos financieros y comerciales con tasas de interés nominales dada la tasa efectiva y, recíprocamente, empleando la fórmula $e = (1 + i/p)^p - 1$.
- Sustituir un conjunto de obligaciones comerciales o financieras por otro equivalente, utilizando diagramas de tiempo, fecha focal y ecuaciones de valor equivalente.
- Decidir cuál es la opción más conveniente en operaciones con interés compuesto.
- Utilizar el concepto y las fórmulas del interés compuesto en problemas de aplicación.

Conceptos importantes

Descuento compuesto
Diagramas de tiempo
Ecuaciones de valores equivalentes
Fecha de vencimiento promedio
Fecha focal
Frecuencia de conversión
Incrementos geométricos constantes y no constantes
Interés compuesto
periodo de capitalización de intereses
plazo con interés compuesto
plazos equivalentes
Tasa con interés compuesto
Tasas efectivas y nominales
Tasas equivalentes
Valor futuro de un capital
Valor presente de un monto

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas 1 a 7 conteste verdadero (V) o falso (F).

1. El índice inflacionario del 1.2% mensual es equivalente al 14.4% anual. ________
2. Un capital que se invierte al 33.33% efectivo se triplica en 3 años. ________
3. La tasa de interés efectiva del 14% es más productiva que la tasa de interés del 13.2% compuesto por meses. ________
4. Los intereses que se cargan en un préstamo al 13.5% nominal mensual son mayores que los que se cargan al 13.45% nominal semanal. ________
5. Si las ganancias de una compañía en 2012 fueron de 3 ’000,000, y en 2014 de 3 ’750,000, entonces crecieron en 25% en el periodo bianual. ________
6. Si el poder adquisitivo de un trabajador pierde un 18% semestral, entonces pierde un 3% mensual. ________
7. La bolsa de valores ganó 0.35 puntos porcentuales el lunes; 0.91 puntos el martes, 0.19 puntos el miércoles, 1.05 el jueves, y el viernes perdió 1.21 puntos. Entonces, en la semana ganó la suma en puntos porcentuales, es decir, 1.29 puntos. ________

En los problemas 8 a 16 complete la afirmación.

8. En 2012 las ventas de un nuevo artículo para el hogar fueron de US$150,000, y en 2013 de US$177,000. ¿De cuánto serán en el año 2017 suponiendo que se sostienen el crecimiento de manera geométrica? _________
9. Si ahora se invierten $25,000 al 6.42% compuesto por meses entonces en 4 meses se acumulan $_________.
10. para disponer de $7,250 el 5 de junio, el 15 de enero anterior deben invertirse $_________ al 5.8% de interés efectivo.
11. El 21.2% de interés compuesto por quincenas es equivalente al _________ % de interés efectivo.
12. Un capital crece un 18% en 3 años si se invierte al _________ % de interés efectivo.
13. El 23.8% de interés efectivo es equivalente al _________ % nominal mensual.
14. En un préstamo de $35,000 que se ampara con un documento con $36,250 de valor nominal y 7 meses de plazo, la tasa efectiva es _________ .
15. Un capital de $18,000 genera intereses de $_________ en 5 meses cuando se presta al 12.5% compuesto por bimestres.
16. El precio de contado de un televisor que se compra con un enganche del 30%, un pago a los 2 meses de $3,750 y con el 21.4% de interés nominal mensual es $_________.

17. El índice poblacional del país aumenta en 3.2 puntos porcentuales en promedio por año. ¿Cuánto crece en 5 años?

18. ¿por qué cantidad es un pago a los 3 meses de la compra de una computadora, si se dio un enganche de $8,500? Suponga interés del 15.3% efectivo y que el pago corresponde al 65% del precio.

***19.** ¿De cuánto es cada pago a 2 y 3 meses, si con un enganche del 25% se adquirió una pantalla LCD, con precio de contado de $17,850 y con el 22.8% de interés nominal mensual? Suponga que:

a) Los 2 pagos son iguales.

b) El segundo es 20% menor que el primero.

***20.** El 4 de marzo se firmó un pagaré con valor nominal de $25,000 con vencimiento al 15 de octubre. El 10 de enero se firmó otro por un crédito de $20,000 y vencimiento al 20 de junio. Se ha llegado a un acuerdo para reemplazar los 2 por 3 iguales y cuyo vencimiento sea el 15 de junio, el 6 de julio y el 10 de septiembre, respectivamente. ¿De cuánto es cada uno si se cargan intereses del 13.8% de interés nominal mensual? ¿Cuánto dinero se genera por intereses?

***21.** El flujo de capitales que una constructora tiene contemplados en su cuenta bancaria para la construcción de viviendas (en miles de pesos) es:

Fecha	Ingresos	Egresos
febrero 10	$5,000	
marzo 1		$2,600
abril 10		$1,500
abril 27		$750
mayo 2		$1,850
junio 10	$2,600	
julio 30		$975

¿Cuánto tendrá en la cuenta el 30 de julio, luego del último retiro, si el saldo el 10 de febrero fue de $175,000 a su favor y la cuenta reditúa el 7.4% de interés anual capitalizable por días?

En los problemas 22 a 32, seleccione la opción correcta justificando su elección.

22. En 2012 las utilidades de CVp Construcciones fueron de $765,000, y en 2013 de $784,584. ¿De cuánto serán en 2017 si se sostiene el incremento geométrico?

a) $825,203.40 *b*) $860,427.33 *c*) $837,845.55 *d*) $868,063.50 *e*) Otra

---

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

23. ¿En cuántos días un capital que se invierte al 6.3% anual capitalizable por días crece un 14%?

a) 749 *b*) 697 *c*) 710 *d*) 735 *e*) Otra

24. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por quincena equivalente al 15.2% nominal bimestral?

a) 15.057698% *b*) 15.003240% *c*) 15.379285% *d*) 15.123256% *e*) Otra

25. Es el monto que se acumula al 20 de enero al invertir $48,500 el 23 de junio anterior, con interés del 6.36% convertible cada día.

a) $50,396.93 *b*) $50,341.88 *c*) $52,236.43 *d*) $51,061.82 *e*) Otra

26. Son los intereses que $47,200 generan en 9 meses, cuando se prestan ganando intereses del 14.25% nominal trimestral.

a) $5,263.91 *b*) $5,037.42 *c*) $5,861.03 *d*) $5,226.34 *e*) Otra

27. Encuentre el tamaño de cada pago que se realizan el 10 de febrero y el 25 de mayo, para liquidar un crédito en mercancía por $93,250 del 6 de noviembre anterior con cargos del 18.6% nominal diario, considerando que son iguales.

a) $50,298.03 *b*) $54,396.78 *c*) $50,310.97 *d*) $49,765.32 *e*) Otra

***28.** En el problema 27, ¿de qué cantidad es el primer pago si el segundo es un 30% menor?

a) $56,495.35 *b*) $57,961.43 *c*) $57,076.92 *d*) $58,910.21 *e*) Otra

29. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 27?

a) $7,938.08 *b*) $7,025.41 *c*) $7,371.94 *d*) $7,785.23 *e*) Otra

30. El 28 de enero el señor Quintero endosó un pagaré con vencimiento al 11 de agosto, por un préstamo de 86,950 pesos. ¿En cuánto se negocia el 3 de mayo, considerando intereses del 14.82% nominal diario y descuento compuesto del 15.4% nominal?

a) $91,895.08 *b*) $90,963.91 *c*) $90,271.62 *d*) $91,125.30 *e*) Otra

***31.** ¿Cuánto debe invertirse el 5 de febrero en una cuenta que bonifica el 5.7% efectivo para disponer de 70,000 pesos el 8 de septiembre? Suponga que el 3 de enero se había realizado un depósito por $35,000.

a) $33,429.33 *b*) $32,968.03 *c*) $33,225.79 *d*) $32,542.16 *e*) Otra

***32.** Diga que conviene más al inversionista que dispone de $675,000.

a) Llevar su dinero a un banco que bonifica el 5.7% capitalizable por meses.
b) Comprar centenarios que incrementan su valor en 0.11% cada semana.
c) Invertir en CETES que ofrecen el 5.85% simple anual.
d) Comprar onzas de plata si su valor crece 0.213 centavos cada quincena.
e) prestar su dinero si le endosan un documento con valor nominal de $713,475.



Capítulo 5

Anualidades

Contenido de la unidad

En el capítulo 3 se estudió cómo distribuir un capital al comienzo del plazo en varios pagos periódicos posteriores, ganando un interés simple. Ahora se estudiarán las *anualidades* que son semejantes pero con tasas de interés compuesto. Y se verá la forma en que varios pagos sucesivos se acumulan en un monto al final del plazo.

El capítulo comienza con algunas definiciones y la clasificación más usual de las anualidades. Continúa con el cálculo de sus elementos como el *capital,* el *valor acumulado,* el *plazo* o número de pagos, el valor de cada pago y, en algunos casos, la *tasa de interés,* aunque esto es poco usual, ya que son las instituciones financieras las que generalmente determinan dichas tasas.

El capítulo concluye con una sección de aplicaciones donde se engloban las fórmulas y los conceptos tratados, con problemas que combinan los diferentes tipos y las modalidades de las anualidades. En esa sección se pretende que el estudiante desarrolle su capacidad para plantear y resolver problemas.

Además, se hace referencia al concepto de *rentas equivalentes*, tan importante como el de las *tasas y plazos equivalentes* estudiados en el capítulo 4, que se utiliza para explicar un par de fórmulas que sirven para encontrar el valor presente de las anualidades *anticipadas* y el valor futuro de las *ordinarias*.

5.1 Definiciones y clasificación de las anualidades

Aunque literalmente la palabra *anualidad* indica periodos anuales, no necesariamente los pagos se realizan cada año, sino que su frecuencia puede ser cualquiera otra: mensual, semanal, semestral o diaria, como se verá en este capítulo, pero antes, es necesario formular algunas definiciones importantes relacionadas con el tema.

Definición 5.1

Anualidad es una sucesión de pagos generalmente iguales que se realizan a intervalos de tiempo iguales y con interés compuesto.

Quizá los pagos sean iguales entre sí, por la misma cantidad, o diferentes. Ahora se estudiará el primer caso y en capítulos subsecuentes el segundo, es decir, las anualidades de renta variable.

Definición 5.2

Renta de la anualidad es el pago periódico y se expresa con R.

Definición 5.3

Intervalo de pago es el tiempo que hay entre 2 pagos sucesivos, y el ***plazo de la anualidad*** es el tiempo entre las fechas inicial del primer periodo y terminal del último.

Definición 5.4

El valor equivalente a las rentas al inicio del plazo se conoce como capital o ***valor presente C***. Su valor al final del plazo es el ***valor futuro*** o ***monto de la anualidad,*** que se expresa con M.

Ejemplo 1

Elementos de una anualidad

Si el propietario de un departamento suscribe un contrato de arrendamiento por un año, para rentarlo en $6,500 por mes, entonces:

El *plazo* es de un año, la *renta* es $R = \$6,500$ y el *intervalo de pago* es un mes.

Además, si el inquilino decide pagar por adelantado en la firma del contrato el equivalente a las 12 mensualidades, entonces el propietario, a causa de los intereses que devenga el dinero anticipado, recibirá un capital menor a los $78,000 que obtendría durante el año. Este capital es el *valor presente* o *valor actual* de la anualidad.

Si al contrario, al recibir cada pago mensual, el propietario lo deposita en un banco que reditúa un interés compuesto, entonces el dinero que al final del año tendrá en la institución bancaria será mayor a los $78,000 y eso será el *monto* o *valor futuro* de la anualidad.

Clasificación de las anualidades

Genéricamente la frecuencia de pagos coincide con la frecuencia de capitalización de intereses, pero es posible que no coincida. Quizá también la renta se haga al inicio de cada periodo o al final; o que la primera se realiceen el primer periodo o algunos periodos después. Dependiendo de éstas y otras variantes, las anualidades se clasifican de la siguiente manera:

Según las fechas inicial y terminal del plazo

Anualidad cierta: cuando se estipulan, es decir, se conocen las fechas extremas del plazo. En un crédito automotriz, por ejemplo, se establecen desde la compra el pago del enganche y el número de mensualidades en las que se liquidará el precio del automóvil.

Anualidad eventual o contingente: cuando no se conoce al menos una de las fechas extremas del plazo. Un ejemplo de este tipo de anualidades es la pensión mensual que de parte del Instituto Mexicano del Seguro Social recibe un empleado jubilado, donde la pensión se suspende o cambia de magnitud al fallecer el empleado. Por esta razón también la conocen como **anualidad vitalicia**.

Según los pagos

Anualidad anticipada: cuando los pagos o las rentas se realizan al comienzo de cada periodo. Un ejemplo de este tipo se presenta cuando se deposita cada mes un capital, en una cuenta bancaria comenzando desde la apertura.

Anualidad ordinaria o vencida: cuando los pagos se realizan al final de cada periodo. Un ejemplo es la amortización de un crédito, donde la primera mensualidad se hace al terminar el primer periodo.

De acuerdo con la primera renta

Anualidad inmediata: cuando los pagos se hacen desde el primer periodo. Un ejemplo de esta categoría se presenta en la compra de un departamento, donde el enganche se paga en abonos comenzando el día de la compra.

Anualidad diferida: cuando el primer pago no se realiza en el primer periodo, sino después. El ejemplo típico de este caso se relaciona con las ventas a crédito del tipo "compre ahora y pague después", que es un atractivo sistema comercial que permite hacer el primer abono 2 o más periodos después de la compra.

Según los intervalos de pago

Anualidad simple: cuando los pagos se realizan en las mismas fechas en que se capitalizan los intereses y coinciden las frecuencias de pagos y de conversión de intereses. Por ejemplo, los depósitos mensuales a una cuenta bancaria que reditúa el 11% de interés anual compuesto por meses.

Anualidad general: cuando los periodos de capitalización de intereses son diferentes a los intervalos de pago. Una renta mensual con intereses capitalizables por trimestre es un ejemplo de esta clase de anualidades.

Otro tipo de anualidades es la **perpetuidad** o **anualidad perpetua**, la cual se caracteriza porque los pagos se realizan por tiempo ilimitado. La beca mensual, determinada por los intereses que genera un capital donado por personas, o instituciones filantrópicas, es un claro ejemplo de estas anualidades.

Todas las anualidades de este capítulo son *ciertas*, las primeras son *simples* e *inmediatas*; también se analizan las *generales,* tomando en cuenta que pueden convertirse en simples utilizando las tasas equivalentes que se estudiaron en el capítulo anterior.

También es cierto que los problemas de anualidades se resuelven:

a) Con tablas financieras con las que se obtiene el valor presente o el valor acumulado para *np* rentas unitarias. En la página web de este libro están las tablas (véase http://www.pearsoneducacion.net/villalobos) para algunas tasas i/p y algunos plazos o número de rentas *np.*

b) Empleando fórmulas que para cada clase de anualidad existen y aquí se deducen, ya que la gran mayoría de los ejercicios en este libro se resuelven de esta manera.

c) Utilizando solamente 2 fórmulas, la del interés compuesto y la de la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, tal como se deducen las fórmulas de las anualidades, en las secciones 5.2 y 5.3.

d) Con programas y paquetería de software que hay en el mercado, que son de fácil acceso para el usuario y que fueron elaborados con fundamento en los conceptos y la teoría de las matemáticas financieras. Uno de estos soportes es el que se consigue con la editorial que publica este libro.

Para decidir con acierto cómo plantear o a qué clase de anualidad corresponde o se ajusta una situación particular, se sugiere considerar lo siguiente antes de entrar en detalles del tema.

En vez de la recta horizontal que hasta ahora hemos utilizado para los diagramas de tiempo, utilizaremos rectángulos que representan los periodos, y en cada uno en su extremo derecho o izquierdo se grafican flechas verticales indicando la renta o pago de la anualidad, utilizando, claro, puntos suspensivos para representarlos a todos sin tener que graficarlos.

Si una persona deposita, digamos, \$3,000 cada mes durante 7 meses, entonces una gráfica será la figura 5.1, donde los depósitos están al final de cada periodo, y el monto que se acumula está al final del último rectángulo.

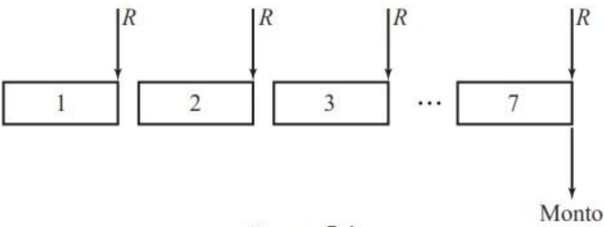


Figura 5.1

En esta gráfica se aprecian 2 puntos importantes.

- El plazo real no es de 7 meses sino solamente de 6, ya que el primer mes no interviene, salvo que el trato se haya realizado al inicio; en la práctica, lo más común es que el primer depósito se realice al comenzar el plazo.
- En el momento en que se retira el monto acumulado de los anteriores, se realiza el último depósito. Esto no tiene razón de ser ya que este pago no se incluiría.

En consecuencia, cuando de la sucesión de rentas se requiera el monto, éstas deberán con - siderarse al inicio de cada periodo, siendo el diagrama apropiado el de la figura 5.2, donde las flechas horizontales indican que cada renta se traslada en el tiempo hasta el final del plazo, sumando los intereses de cada una y sumándolas todas.

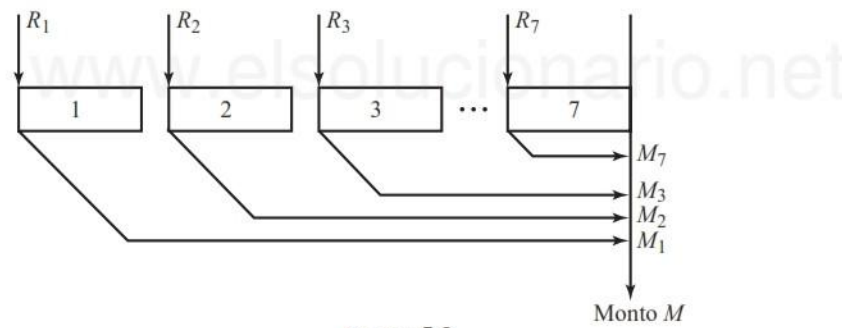


Figura 5.2

Contrariamente, si de las rentas se requiere el valor presente al comenzar el plazo, entonces éstas deberán ubicarse al final de cada periodo, como se aprecia en la figura 5.3 y de cada una se restan los intereses, llevándolas hasta el inicio del plazo y sumando todos los capitales que resultan.

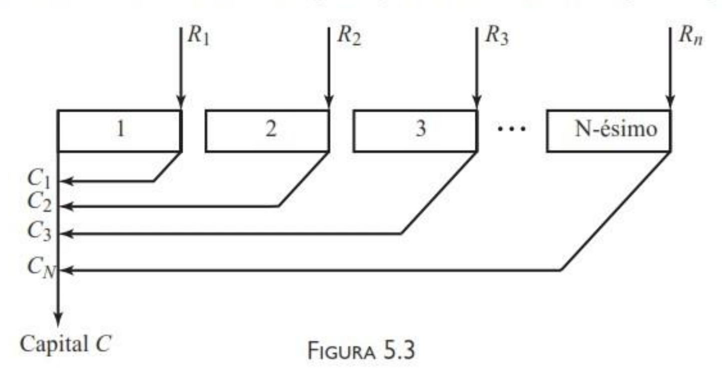
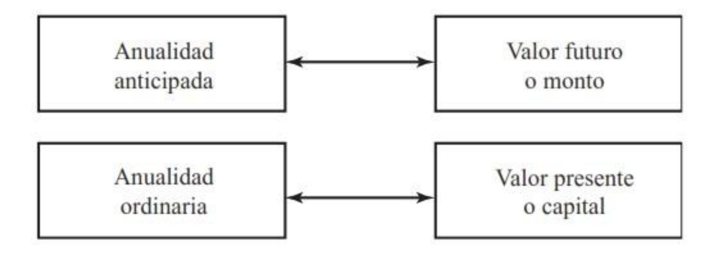


Figura 5.3

Esto significa que al no especificarse lo contrario las **anualidades anticipadas** se asociarán con el **valor futuro** al término del plazo, mientras que las **ordinarias** serán asociadas con su **valor presente** al comenzar el plazo; es decir,



Por supuesto que lo anterior no es una regla y, como se estudiará después, en muchas ocasiones el monto se relaciona con rentas vencidas; y el valor presente, con una serie de rentas anticipadas.

Por otro lado, como se aprecia en las figuras 5.4 y 5.5, cada renta hará las veces de capital al considerar el monto de la anualidad, y será un monto cuando se trate del valor presente.

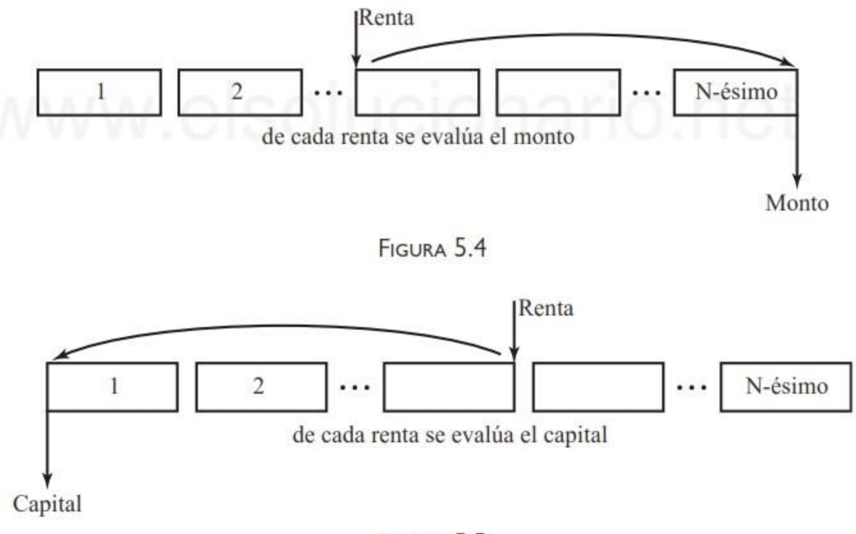


Figura 5.4

Figura 5.5

Ejercicios 5.1

1. Defina y explique *plazo* e *intervalo de pago* en las anualidades.
2. ¿Cómo se definen las *anualidades* y la *renta de una anualidad*?
3. ¿Qué son el *monto* y el *valor presente* de una anualidad?

4. Mencione 5 ejemplos de anualidades en la vida real.

5. En los ejemplos del problema 4, defina el *monto* o el *valor presente*, el *plazo*, la *renta*, el intervalo *de pago* y la *tasa de interés*.

6. Si usted deposita $1,350 cada mes durante 2 años y al final le devuelven $39,000, determine cuál es la renta, el plazo, los intereses, el valor futuro y el intervalo de pago de la anualidad.

Recuerde que los intereses son la diferencia entre el monto y el capital.

7. Mencione las características principales de las anualidades:

a) Diferidas
b) Contingentes
c) Ciertas
d) Simples
e) Generales
f) Anticipadas
g) Inmediatas
h) Perpetuas

8. Mencione la diferencia básica entre la anualidad:

a) Inmediata y diferida
b) Simple y general
c) Cierta y contingente
d) Ordinaria y anticipada

9. Justificando su respuesta, determine si es posible que una anualidad sea, al mismo tiempo:

a) Ordinaria, general y anticipada.
b) Inmediata, simple y anticipada.
c) Vencida, diferida, simple y cierta.
d) General, ordinaria, diferida y contingente.
e) Ordinaria, simple y cierta.
f) Contingente, cierta y general.
g) Anticipada, cierta, simple y diferida.

10. Describa con detalle las anualidades que sí son posibles en el problema 9.

11. Mencione y describa con brevedad los 4 métodos para evaluar los elementos de las anualidades.

12. ¿Por qué causas una serie de depósitos periódicos que se acumulan en un monto al final del plazo no debiera considerarse como anualidad vencida?

13. Mencione 2 razones por las que los pagos periódicos en una anualidad no debieran ser anticipados, cuando se relacionan con su valor presente.

14. ¿Qué diferencia encuentra entre estas *anualidades* y las *amortizaciones* que se estudiaron en el capítulo 3?

5.2 Monto de una anualidad anticipada

Se ha dicho que una anualidad es anticipada si los pagos se realizan al comenzar cada periodo.

Como se aprecia en el ejemplo 1, para hallar el monto de una anualidad anticipada, a cada renta se le agregan los intereses que dependen del número de periodos que haya entre la renta y el final del plazo. Por lo tanto, la fórmula del interés compuesto se emplea para cada monto parcial, después se suman y se obtiene una fórmula general.

Cabe señalar que cualquier anualidad se resuelve aplicando apropiadamente esta primera fórmula general, ya que si se tiene un valor único equivalente a todas las rentas, al término del plazo éste se traslada a cualquiera otra fecha con la fórmula del interés compuesto, como se ilustra en la solución alterna del ejemplo 2 de la sección 5.3.

Ejemplo 1

Deducción de la fórmula general



Obtenga el monto que se acumula en 2 años, si se depositan $4,500 al inicio de cada mes en un banco que abona una tasa del 7.2% anual capitalizable por meses.

solución



La anualidad es *simple* porque coinciden la frecuencia de conversión y la de pagos; es *cierta* porque se conoce el número de rentas; es *inmediata* porque desde el primer periodo se hacen los depósitos; y es *anticipada* porque éstos se realizan al principio de cada periodo mensual.

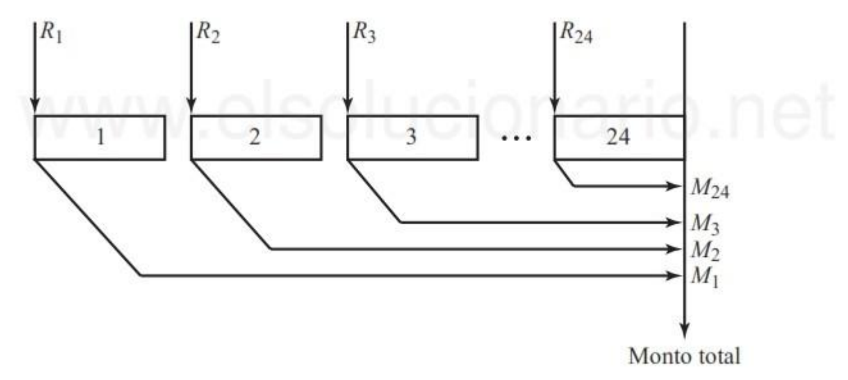


FIGURA 5.6

Como se observa en la figura 5.6, el primer depósito genera intereses durante 24 periodos mensuales, el segundo durante 23 meses y así sucesivamente, hasta el último que gana solamente durante un mes.

Por lo tanto, los montos parciales son, respectivamente:

$$M_1 = 4,500(1 + 0.072/12)^{24} \qquad M = C\,(1 + i/p)^{np}$$

$$M_2 = 4,500(1 + 0.006)^{23}$$

$$M_3 = 4,500(1.006)^{22}$$

$$\vdots$$

$$M_{23} = 4,500(1.006)^2$$

y $$M_{24} = 4,500(1.006)$$

El valor futuro o monto de la anualidad es la suma de todos los anteriores, que en orden inverso es:

$$M = 4{,}500(1.006) + 4{,}500(1.006)^2 + \cdots + 4{,}500(1.006)^{24}$$

Se factoriza la renta $4,500, y lo que queda entre los corchetes corresponde a los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 1.006$; la razón es también $r = 1.006$ y el número de términos es $m = 24$. Por lo tanto:

$$M = 4{,}500[1.006 + (1.006)^2 + (1.006)^3 + \cdots + (1.006)^{24}] \qquad \textbf{(A)}$$

La suma, según la ecuación 2.4, es:

$$\text{Suma} = 1.006\left(\frac{1-(1.006)^{24}}{1-1.006}\right) \qquad \text{Suma} = a_1\,\frac{1-r^m}{1-r}$$

$$\text{Suma} = 1.006\left(\frac{1-1.154387292}{-0.006}\right)$$

$$\text{Suma} = 1.006(25.73121533) \quad \text{o bien,} \quad \text{Suma} = 25.88560262$$

Si se sustituye este resultado en la ecuación **(A)**, se tendrá que el monto total es:

$$M = 4{,}500(25.88560262) \quad \text{o bien,} \quad M = \$116{,}485.21$$

Para generalizar, note que el primer término y la razón son:

$$a_1 = r = 1 + 0.072/12 \quad \text{o bien,} \quad a_1 = r = 1 + i/p$$

y el número de términos es el número de rentas:

$$m = 2(12) = 24 \quad \text{o bien,} \quad m = np$$

La suma es, entonces:

$$\text{Suma} = (1+i/p)\frac{1-(1+i/p)^{np}}{1-(1+i/p)} \qquad \text{ya que Suma} = a_1\,\frac{1-r^m}{1-r}$$

$$\text{Suma} = (1+i/p)\frac{1-(1+i/p)^{np}}{-i/p} \qquad \text{se cancelan los unos del } \textit{denominador}$$

$$\text{Suma} = (1+i/p)\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p} \qquad a - b = -(a - b)$$

Resultado que se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 5.1

El **monto acumulado** de np rentas anticipadas en las anualidades simples y ciertas es:

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right) \text{ donde}$$

R es el pago periódico, la renta, n es el plazo en años, e i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.

De manera semejante a los otros, en lo sucesivo se hará referencia a este teorema como "ecuación 5.1", "teorema 5.1" o "ecuación del teorema 5.1".

Ejemplo 2

Resuelva el ejemplo 1 con la ecuación 5.1.

solución

Los valores a reemplazar por las literales son:

$R = 4{,}500$, la renta mensual

$p = 12$, la frecuencia de conversión y la de pagos son mensuales

$n = 2$, los años del plazo

$np = 24$, el total de rentas

$i = 0.072$, la tasa de interés anual capitalizable por meses

$i/p = 0.006$, la tasa por periodo mensual. Entonces,

$$M = 4{,}500\ (1\ + 0.006)\left(\frac{(1.006)^{24}-1}{0.006}\right)$$

$$M = 4{,}500(1.006)(25.73121533) \text{ o bien, } M = \$116{,}485.21$$

Note que más que el valor de n, el plazo en años, es más útil el de np, el número de rentas.

Ejemplo 3

¿Cuánto dinero se generó por concepto de intereses durante los 2 años en el ejemplo 1?

solución

Recuerde que aunque no sea un cuestionamiento explicito es conveniente y muy útil, porque algunas veces se detectan posibles errores, evaluar los intereses en cada problema.

Los intereses son la diferencia entre el monto acumulado y el capital que en este caso es igual a la suma de las 24 rentas.

$$I = 116{,}485.21 - 24(4{,}500)$$

$$I = 116{,}485.21 - 108{,}000.00 \qquad I = M - C$$

o bien, $I = \$8{,}485.21$

Ejemplo 4

Plazo en inversiones



¿En cuánto tiempo se acumulan \$40,000 en una cuenta bancaria que paga intereses del 8.06% anual capitalizable por semanas, si se depositan \$2,650 al inicio de cada semana?

solución

En la ecuación 5.1 se reemplazan los valores:

$M = 40{,}000$, el monto que se pretende

$R = 2{,}650$, la renta semanal

$i = 0.0806$, la tasa de interés anual capitalizable por semanas

$i/p = 0.0806/52 = 0.\ 00155$, la tasa semanal capitalizable por semanas

La incógnita es n, el plazo en años o $np = x$, el número de rentas; entonces:

$$40{,}000 = 2{,}650(1 + 0.00155)\left[\frac{(1.00155)^x - 1}{0.00155}\right] \qquad \text{(Teorema 5.1)}$$

Para despejar x, 2,650(1.00155) pasa dividiendo, y 0.00155 pasa multiplicando al lado izquierdo; luego el 1 pasa sumando, es decir:*

$$\frac{40{,}000}{2{,}650(1.00155)}(0.00155) + 1 = (1.00155)^x$$

$$15.0709796(0.00155) + 1 = (1.00155)^x$$

o bien, $(1.00155)^x = 1.023360018$

* Esto es equivalente a decir que los 2 lados de la igualdad se dividen entre 2,650(1.000155), se multiplican por 0.00155 y el 1 se suma en ambos lados.

Como siempre que la incógnita está en el exponente, se despeja empleando logaritmos, ya que "si 2 números positivos son iguales, entonces sus logaritmos también son iguales". Es decir:

$$\ln(1.00155)^x = \ln(1.023360018)$$

$$(x)\ln(1.00155) = \ln(1.023360018), \qquad \text{ya que } \ln(a^n) = (n)\ln(a)$$

$$x = \ln(1.023360018)/\ln(1.00155)$$

$$= 0.023091349/0.0015488$$

$$x = 14.90918709$$

Puesto que el número de rentas, $x = np$, debe ser un entero, el resultado se redondea dando lugar a que la renta o el monto varíen un poco.

Por ejemplo, con $np = 15$, el entero más cercano, resulta que la renta es:

$$40{,}000 = R(1.00155)\left(\frac{(1.00155)^{15} - 1}{0.00155}\right)$$

$$40{,}000 = R(1.00155)(15.16384839)$$

$$40{,}000 = R(15.18735236)$$

de donde

$$R = 40{,}000/15.18735236 \qquad \text{o} \qquad R = \$2{,}633.77$$

que es poco menor que lo estipulado porque se "incrementó" el número de rentas que se obtuvo.

Ejemplo 5

Tasa nominal quincenal y recuperación de pagaré

¿Qué tasa de interés capitalizable por quincenas le están cargando a la señora de Ramírez, si para recuperar un pagaré con valor nominal de $39,750, incluidos los intereses, hace 15 pagos quincenales anticipados de $2,400?

solución

Se trata de una anualidad anticipada, donde:

$M = 39{,}750$, el valor futuro

$R = 2{,}400$, la renta quincenal

$p = 24$, la frecuencia de pagos y de conversión

$n = 15/24$, el plazo en años

$np = 15$, el número de rentas

$i =$ la incógnita

por lo tanto, $$39{,}750 = 2{,}400(1 + i/24)\left(\frac{(1+i/24)^{15} - 1}{i/24}\right)$$

Para despejar i, se sustituye $i/24$ por x, y se dividen los 2 miembros entre 2,400.

$$16.5625 = (1 + x)\left(\frac{(1+x)^{15} - 1}{x}\right)$$

En la tabla 4 de las Tablas financieras (véase http://www.pearsoneducacion.net/villalobos) se encuentran algunos valores de la expresión:

$$\frac{(1+i/p)^{15} - 1}{i/p}$$

Ahí se busca un valor que sea poco menor que 16.5625 en el renglón que corresponde a $np = 15$. El resultado obtenido para la tasa $i/p = 0.0125$ es el valor 16.3863, el cual es una buena aproximación para la incógnita.

Para determinar el valor de i/p con mayor exactitud, o para encontrarlo sin el uso de tablas, se procede con iteraciones, dando a x valores sucesivos hasta alcanzar la precisión deseada. A continuación se indican algunos de tales valores.

Primero se simplifica la ecuación anterior, multiplicándola por x y otras operaciones algebraicas.

$$16.5625(x) = (1 + x)[(1 + x)^{15} - 1]$$

$$16.5625(x) = (1 + x)^{16} - (1 + x) \qquad aa^n = a^{1+n}$$

$$(1 + x)^{16} - 1 - x - 16.5625(x) = 0 \text{ o bien, } (1 + x)^{16} - 17.5625(x) = 1$$

al sustituir x por 0.01 en la última ecuación queda:

$$(1.01)^{16} - 17.5625(0.01) = 0.996953645$$

y $x = 0.02$,

$$(1.02)^{16} - 17.5625(0.02) = 1.021535705$$

Si con $x = 0.01$ resultó menor que 1 y con $x = 0.02$ quedó mayor que 1, entonces el valor que se busca para x debe estar entre 0.01 y 0.02, argumento que sirve para continuar con las iteraciones.

$$\text{Si } x = 0.015\text{: } (1.015)^{16} - 17.5625(0.015) = 1.005548048$$

$$\text{Si } x = 0.012\text{: } (1.012)^{16} - 17.5625(0.012) = 0.999536531$$

Continuando con el proceso se verá que cuando

$$x = 0.012287288\text{, el resultado es } 1.000000001$$

entonces, $x = i/24 = 0.012287288$

de donde $i = (0.012287288)24$, $i = 0.294894912$ o 29.4894912%, la cual es la tasa anual capitalizable por quincenas que le cargan a la señora de Ramírez, y puede comprobarse reemplazándola en la primera ecuación del desarrollo anterior.

Solución alterna

Este resultado se obtiene más fácil con la calculadora financiera, la HP12C por ejemplo, y las siguientes instrucciones:

[f] [CLX] 39,750 [FV] 2,400 [CHS] [PMT] 15 [n]
[i] 24 [x] 29.48949002

Tasa de interés variable

Ejemplo 6

Monto en cuenta de ahorros e intereses

¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorros con 32 pagos quincenales de $3,250 cada uno, si la tasa de interés nominal quincenal en los primeros 5 meses es del 8.4%, y después aumenta 1.2 puntos porcentuales por año cada cuatrimestre? ¿Cuánto se genera por concepto de intereses?

solución

a) El ejercicio se resuelve considerando cuatro anualidades de 10, 8, 8 y 6 rentas quincenales cada una, como se ilustra en la figura 5.7.

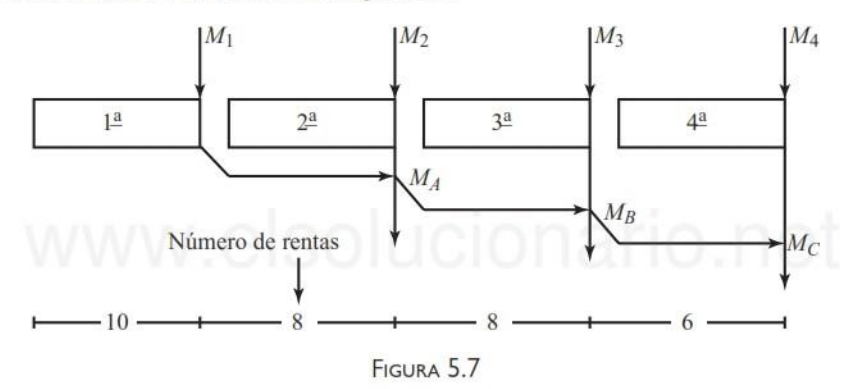


FIGURA 5.7

El monto de la primera, puesto que la tasa por quincena es $i/p = 0.084/24 = 0.0035$, es:

$$M_1 = 3{,}250(1 + 0.0035)\left(\frac{(1.0035)^{10} - 1}{0.0035}\right) \quad \text{son 10 rentas}$$

$$M_1 = 3{,}250(1.0035)(10.15897914) \text{ o bien, } M_1 = 33{,}132.2406$$

que se traslada hasta el final de la segunda anualidad empleando la fórmula del interés compuesto, la nueva tasa 1.2 puntos mayor que la anterior y 8 quincenas de plazo, la tasa es:

$$8.4 + 1.2 = 9.6 \text{ o bien, } i = 0.096,\ i/p = 0.004 \text{ y}$$

$$M_A = 33{,}132.2406(1.004)^8$$

$$M_A = 33{,}132.2406(1.032451602) \text{ o bien, } M_A = 34{,}207.43$$

Este monto deberá sumarse con el monto M_2 de la segunda anualidad

$$M_2 = 3{,}250(1.004)\left(\frac{(1.004)^8 - 1}{0.004}\right)$$

$$M_2 = 3{,}250(1.004)(8.1129005) \text{ o bien, } M_2 = 26{,}472.39433$$

El acumulado de las primeras 18 rentas es entonces

$$M_A + M_2 = \$60{,}679.82922$$

que también se lleva hasta el final del tercer grupo de rentas.

Ahora la tasa es:

$$i = 0.108,$$
$$9.6 + 1.2 = 10.8\%.$$

Entonces,

$$M_B = 60{,}679.82922(1 + 0.108/24)^8 \text{ o bien, } M_B = 62{,}899.01994$$

monto que debe sumarse al monto M_3 del tercer grupo

$$M_3 = 3{,}250(1.0045)\left(\frac{(1.0045)^8 - 1}{0.0045}\right)$$

$$M_3 = 3{,}250(1.0045)(8.127140444)$$

o bien, $M_3 = 26{,}532.0575$

Entonces,

$$M_B + M_3 = 89{,}431.08581$$

Éste se traslada hasta el final del plazo con:

$i = 0.108 + 0.012$ o bien,

$i = 0.12$, $i/p = 0.005$ y 6 quincenas de plazo.

$$M_c = 89{,}431.08581(1.005)^6$$

o bien, $M_c = 92{,}147.77942$

que se suma al monto de las 6 últimas rentas

$$M_4 = 3{,}250(1.005)\left(\frac{(1.005)^6 - 1}{0.005}\right)$$

$$M_4 = 3{,}250(1.005)(6.0755018)$$

o bien, $M_4 = 19{,}844.10775$

Consecuentemente el monto acumulado de los 32 depósitos quincenales en la cuenta de ahorros al final del plazo es:

$$M_c + M_4 = 92{,}147.77942 + 19{,}844.10775$$

o bien, $M_c + M_4 = \$111{,}991.89$ redondeando.

b) Los intereses son la diferencia entre este monto y el total invertido en los 32 pagos

$$I = 111{,}991.89 - 32(3{,}250) \text{ o bien, } I = \$7{,}991.89$$

Ejercicios 5.2

1. ¿Cuándo se dice que una anualidad es anticipada?

2. ¿Cómo evalúa la renta en las anualidades anticipadas?

*3. ¿Cuántos depósitos quincenales de $2,350 se necesitan para acumular aproximadamente $41,053.84 en una cuenta que paga intereses del 7.25% capitalizable por quincena?

4. ¿Cuál es el tamaño de cada una de las 15 rentas mensuales para acumular $48,501.68 si los intereses son del 6.3% nominal mensual?

5. ¿Cuánto dinero se acumula con 20 rentas semanales de $4,500 si se ganan intereses del 9.6% compuesto por meses?

6. ¿Cuántos pagos bimestrales de $74,361 se necesitan para acumular aproximadamente 2 millones de pesos, considerando intereses del 5.4% nominal bimestral?

7. Con $18,750 se abre una cuenta y se continúa con 36 mensualidades de $6,250 ganando intereses del 8.4% compuesto por meses. ¿Cuánto se tiene un mes después de la última mensualidad?

8. En el problema 7, ¿a cuánto ascienden los intereses?

*9. Un padre de familia abre una cuenta bancaria con $28,000 y después realiza 25 depósitos mensuales anticipados a partir del segundo mes. ¿De qué cantidad es cada uno si los cargos son del 9.6% nominal mensual y pretende acumular $285,000?

*10. Determine el plan de ahorro en el que un empleado acumula más dinero en un lapso de 3 años

   a) Depósitos mensuales de $2,780.00 cada uno con intereses del 6.36% nominal mensual.
   b) Pagos semanales de $630.00 e intereses del 6.72% efectivo?
   c) Ocho rentas quincenales anticipadas de $13,500.00 en la última parte del plazo con intereses del 5.95% capitalizable por quincenas.

11. El actuario Gutiérrez firma un documento por un crédito de $48,600 con cargos del 16% simple anual y plazo de 9 meses. ¿Cuánto debe depositar al inicio de cada semana para liberar el pagaré correspondiente, suponiendo que le bonifican el 16.8% anual capitalizable por semanas y abre la cuenta el día que logró el préstamo?

En los problemas 12 a 19 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

12. Dieciocho rentas mensuales de $5,300.00 se acumulan en $101,513.70 aproximadamente cuando se ganan intereses del 7.8% compuesto por meses. __________

13. Se necesitan 13 rentas bimestrales de $4,750.00 para acumular aproximadamente $70,620 cuando los intereses son del 11.4% compuesto por bimestre. __________

---

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

14. Los intereses que se generan en el problema 13 son de $8,870.81. __________

15. Se necesitan 21 pagos semanales de $1,621.84 para acumular un monto de $35,250 con intereses del 8% efectivo. __________

16. Una persona que pretende acumular $20,055.81 necesita invertir $500.00 al inicio de cada semana ganando intereses del 7.28% capitalizable por semana durante 9 meses. __________

17. Los intereses que se generan en el problema 16 son de $563.81. __________

***18.** Una pantalla de plasma que se paga con lo que se acumula en 25 abonos semanales de $320.00 y el 15% de enganche tiene un precio de contado de $8,789.84 con intereses del 14.28% nominal semanal, suponiendo que el primer pago se hace a 3 meses de la compra. __________

19. Para recuperar un documento por un préstamo de $81,431.44 con intereses del 21.3% simple anual y año y medio de plazo, se necesitan 18 rentas mensuales anticipadas de $5,450 ganando intereses del 11.4% nominal mensual. __________

En los problemas 20 a 29 seleccione la opción correcta justificando su respuesta.

20. Es el monto aproximado que se acumula con 15 rentas semanales de $3,650 e intereses del 8.3% nominal semanal.

a) $55,093.78 *b*) $55.454.35 *c*) $56,329.40 *d*) $53,980.09 *e*) Otra

21. Encuentre el tamaño de cada uno de los 8 pagos quincenales para acumular $75,000 en una cuenta que genera intereses del 13.44% nominal quincenal.

a) $9,141.60 *b*) $9,593.08 *c*) $10,063.57 *d*) $9,385.63 *e*) Otra

***22.** ¿Cuánto se acumula con 6 rentas mensuales de $7,200 seguidas de 10 quincenales de $4,300 cada una, si los intereses son del 9.81% compuesto por quincenas?

a) $90,103.30 *b*) $90,593.38 *c*) $89,923.32 *d*) $90,285.20 *e*) Otra

23. Dos años antes de comenzar su carrera profesional que dura 9 cuatrimestres, el padre de un estudiante deposita $250,000 con intereses del 6.18% compuesto por cuatrimestres. ¿De cuánto podrá disponer al comenzar cada cuatrimestre de los 9 de la carrera?

a) $34,705.23 *b*) $34,329.91 *c*) $35,128.03 *d*) $34,013.51 *e*) Otra

***24.** Determine con cuál alternativa se acumula más dinero en un plazo de 2 años.

a) 48 rentas quincenales de $4,750 con intereses del 5.4% capitalizable para quincenas.
b) 24 rentas mensuales de $9,450 e intereses del 5.76% nominal mensual.
c) 12 depósitos bimestrales de $18,930 con intereses del 5.82% compuesto por bimestres.
d) Un depósito de $95,000 al comenzar el plazo y otro por $124,500 9 meses después. Los intereses son del 5.6% nominal trimestral en esta opción.
e) Un pago único de $214,500 al comenzar el plazo ganando intereses del 6.03% simple anual.

***25.** ¿Cuántos pagos semanales de $2,760 se requieren para lograr un monto aproximado de $80,200 si los intereses son del 13.26% nominal semanal?

a) 29 *b*) 26 *c*) 30 *d*) 28 *e*) Otra

26. ¿Cuánto debe depositarse al comenzar cada quincena en una cuenta que bonifica el 7.92% de interés anual capitalizable por quincenas para disponer de $203,675, 18 meses después del primer pago?

a) $5,320.00 *b*) $5,750.00 *c*) $4,985.00 *d*) $5,450.00 *e*) Otra

***27.** Para ayudar con los gastos de su graduación una pareja de estudiantes decide depositar $1,750 al inicio de cada mes durante los 8 cuatrimestres que permanecen estudiando. ¿Cuánto dinero tendrán al final si gana con el 7.75% nominal mensual los primeros 2 años, con el 7.32% en los siguientes 2 y con el 8.1% en los dos últimos cuatrimestres?

a) $62,355.54 *b*) $61,928.30 *c*) $62,429.51 *d*) $63,921.83 *e*) Otra

28. ¿Cuánto ganan por concepto de intereses los estudiantes del problema 27?

a) $6,023.48 *b*) $6,721.12 *c*) $6,355.54 *d*) $6,129.95 *e*) Otra

***29.** Para ampliar sus instalaciones, la Distribuidora de Equipos de Cómputo consigue un crédito por $1'750,000 para liquidarlo al final de 10 meses con cargos del 14.4% anual capitalizable por meses. Simultáneamente abre una cuenta con depósitos quincenales durante el plazo. ¿De qué cantidad es cada uno si le bonifican intereses del 9.8% nominal quincenal?

a) $95,215.30 *b*) $94.929.51 *c*) $94,430.19 *d*) $93,925.53 *e*) Otra

5.3 Valor presente de las anualidades ordinarias

Estas anualidades se caracterizan porque los pagos se realizan al final de cada periodo, razón por la cual se conocen también como *anualidades vencidas.* Lo más común, como se dijo antes, es asociar las rentas con su valor equivalente al comenzar el plazo, es decir, con su valor presente C que se obtiene con la fórmula que se desarrolla en el primer ejemplo de esta sección.

Las aplicaciones más comunes de estas anualidades se refieren a la amortización de deudas, como créditos hipotecarios, automotrices o cualquier otro que se liquida con pagos periódicos y cargos de interés compuesto.

Ejemplo 1

Deducción de la fórmula general



¿Cuánto podrá retirar cada viernes durante 8 meses el ingeniero Serrano, si al comienzo del plazo deposita $30,000 devengando intereses del 26% compuesto por semanas?

solución

Los rectángulos de la gráfica de la figura 5.8 representan las semanas. Al final de cada uno se ubican las rentas.

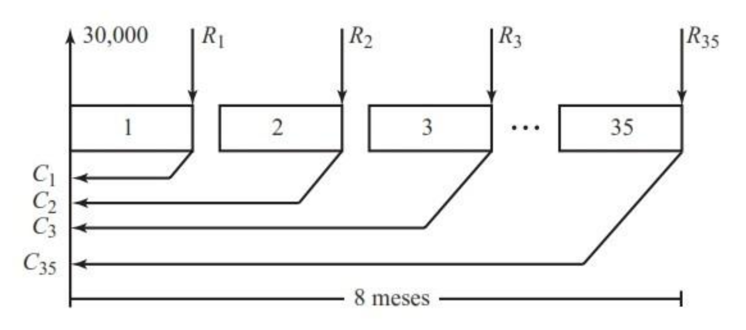


FIGURA 5.8

El número de semanas que hay en 8 meses es:

$$(8/12)52 = 34.67,$$

resultado que se redondea como 35 semanas.

El proceso consiste en encontrar al inicio del plazo el valor presente C de cada renta, para después igualar la suma de todos con los \$30,000 de la inversión inicial, como si el inicio fuese una fecha focal.

Se emplea la fórmula del interés compuesto:

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

de donde se despeja C dividiendo los 2 lados entre $(1 + i/p)^{np}$.

$$M/(1 + i/p)^{np} = C \quad \text{o bien,} \quad C = M(1 + i/p)^{-np} \quad \text{ya que} \quad a/b^n = ab^{-n}$$

La tasa por periodo es $i/p = 0.26/52 = 0.005$ y el plazo en cada renta es, respectivamente, de 1, 2, 3, …, hasta 35 meses en la última. Por lo tanto, el valor actual de cada una es:

$$C_1 = R_1(1 + 0.005)^{-1}$$
$$C_2 = R_2(1.005)^{-2}$$
$$C_3 = R_3(1.005)^{-3}$$
$$\vdots$$
$$C_{35} = R_{35}(1.005)^{-35}$$

y cuya suma deberá ser igual a los \$30,000 iniciales, es decir:

$$R_1(1.005)^{-1} + R_2(1.005)^{-2} + \ldots + R_{35}(1.005)^{-35} = 30{,}000.$$

Puesto que todas las rentas son iguales, éstas se reemplazan por R que luego se factoriza.

(A) $$R[(1.005)^{-1} + (1.005)^{-2} + \ldots + (1.005)^{-35}] = 30{,}000$$

De nuevo, la suma entre corchetes es una serie geométrica con 35 términos, donde el primero y la razón son:

$a_1 = r = (1.005)^{-1}$ porque $r = a_2/a_1$, por lo tanto, está dada por:

$$\text{Suma} = (1.005)^{-1}\left(\frac{1-((1.005)^{-1})^{35}}{1-(1.005)^{-1}}\right) \qquad \text{Suma} = a_1\frac{1-r^m}{1-r}$$

$$\text{Suma} = \frac{1}{1.005}\left(\frac{1-(1.005)^{-35}}{1-(1.005)^{-1}}\right) \qquad a^{-1} = 1/a, \text{ si } a \neq 0$$

$$\text{Suma} = \frac{1-(1.005)^{-35}}{1.005-1} \qquad aa^{-1} = 1, \quad \text{siempre que } a \neq 0$$

(B) $$\text{Suma} = \frac{1-(1.005)^{-35}}{0.005} \qquad 1.005 - 1 = 0.005$$

$$\text{Suma} = 32.03537132$$

Este resultado se sustituye por el corchete de la ecuación **(A)**:

$$R[32.03537132] = 30{,}000$$

de donde la renta semanal queda como:

$$R = 30{,}000/32.03537132 \quad \text{o bien,} \quad R = \$936.46$$

Para generalizar, note que la suma entre los corchetes en la misma ecuación **(A)** está dada por:

$$\text{Suma} = (1+1/p)^{-1}\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{1-(1+i/p)^{-1}}\right)$$

que con algunos pasos algebraicos, como en el desarrollo que se hizo con números, se simplifica como:

$$\text{Suma} = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

tal como resultó en la ecuación **(B)**.

En la tabla 5 de la página web (ver http://www.pearsoneducacion.net/villalobos/) están algunos valores para esta expresión, que en ocasiones se denota como $a_{\overline{N}|i}$: "a subíndice N al i", que corresponde al valor presente de N, es decir, np rentas vencidas de \$1 cada una.

Si se reemplaza la suma en la ecuación **(A)**, resulta la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 5.2

El valor presente C de una anualidad vencida, simple, cierta e inmediata está dado por:

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

donde:

- R es la renta al final de cada periodo
- i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año
- n es el plazo en años, y
- p es la frecuencia de conversión de intereses y de pagos.

Como en todas las fórmulas, es posible cuestionar cualquiera de las literales, por lo que para despejar una, lo mejor, insistimos, es hacerlo después de haber sustituido los valores que se conocen.

Ejemplo 2

Valor presente de un seguro de vida





La beneficiaria de un seguro de vida recibiría $6,100 mensuales durante 10 años, aunque prefiere que le den el equivalente total al inicio del plazo. ¿Cuánto le darán si el dinero reditúa en promedio el 19.35% anual compuesto por meses?

solución

Los valores para reemplazar en la ecuación 5.2 son:

$R = 6{,}100$, la renta mensual

$n = 10$, el plazo en años

$p = 12$, porque son mensuales

$i = 0.1935$ o $i/p = 0.016125$, la tasa mensual capitalizable por meses

Entonces, el capital que la aseguradora deberá entregar a la beneficiaria es:

$$C = 6{,}100\left(\frac{1-(1.016125)^{-120}}{0.016125}\right) \qquad np = 10(12) = 120$$

$$C = 6{,}100\left(\frac{1-0.146670}{0.016125}\right)$$

$$C = 6{,}100(52.91964132) \qquad \text{o bien,} \qquad C = \$322{,}809.8121$$

Solución alterna

Como se dijo en la sección que precede, otra forma de obtener este resultado consiste en aplicar la ecuación 5.1 para el monto de anualidades anticipadas; no obstante, para ello se necesita convertir o expresar la anualidad ordinaria como una anticipada, agregando un periodo ficticio, el 121, e ignorando el primero tal como se ve en la figura 5.9, teniendo presente que realizar un pago al final de cada periodo es lo mismo que hacerlo al inicio del siguiente.

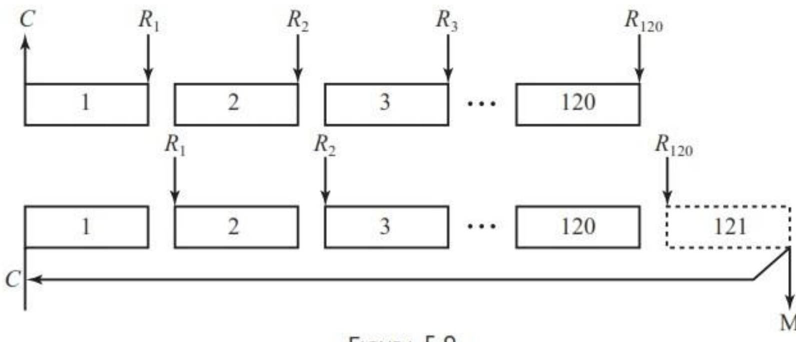


FIGURA 5.9

La parte superior de la figura corresponde a 120 rentas vencidas y su capital C al inicio del plazo. Así se resolvió el ejercicio, pero en la inferior cada renta está al inicio de un periodo y se evalúa el valor acumulado M de las mismas 120 rentas anticipadas al final del periodo ficticio. Este monto con la fórmula 5.1 para anualidades anticipadas es entonces.

$$M = 6{,}100(1.016125)\left(\frac{(1.016125)^{120}-1}{0.016125}\right) \qquad M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

$$M = 6{,}100(1.016125)(360.8056081) \quad \text{o bien,} \quad M = 2'236{,}403.95$$

y 121 meses antes está el valor presente C de este monto, de tal forma que:

$$2'236{,}403.95 = C(1.016155)^{121} \qquad M = C(1+i/p)^{np}$$

$$2'236{,}403.95 = (6.927930526)C$$

de donde $C = 2'236{,}403.95/6.927930526$ o bien, $C = \$322{,}809.8121$, que es igual al anterior.

Ejemplo 3

Plazo en la compra de un tractor

¿Cuántos abonos bimestrales vencidos de \$40,000 son necesarios para pagar el precio de un tractor, que se compró con un anticipo y un crédito de \$350,000? Suponga intereses de 13.8% capitalizable por bimestres.

solución

En la ecuación 5.2 se reemplazan C por 350,000, i por 0.138, p por 6, porque son bimestrales y son 6 los bimestres del año, R por \$40,000, el valor de cada pago, e $i/p = 0.023$. La incógnita es n o np, entonces,

$$350{,}000 = 40{,}000\left(\frac{1-(1.023)^{-np}}{0.023}\right) \qquad M = C\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

Para despejar la incógnita, se multiplica por 0.023, se divide entre 40,000, se resta la unidad a los 2 lados de la ecuación, se denota con x a np, el número de pagos, y después se toma logaritmo.

$$\frac{350{,}000(0.023)}{40{,}000} - 1 = -(1.023)^{-x}$$

$$0.20125 - 1 = -(1.023)^{-x}$$

$$(1.023)^{-x} = 0.79875$$

$$\ln(1.023)^{-x} = \ln(0.79875) \qquad \text{si } a = b \text{ entonces } \ln(a) = \ln(b)$$

$$(-x)\ln(1.023) = \ln(0.79875) \qquad \ln(a^n) = (n)\ln(a)$$

$$-x = \ln(0.79875)/\ln(1.023)$$

$$-x = -9.881809277 \quad \text{o bien,} \quad x = 9.881809277$$

Ajuste del número de rentas

Como era de esperarse el valor de x no es un número entero y en virtud de que los intereses se hacen efectivos hasta que concluyen periodos completos, el resultado anterior deberá ser un entero, por eso se hace un ajuste, en este caso y casi siempre que se cuestione el número de rentas. Este ajuste se realiza por lo menos de las siguientes 4 maneras:

- Redondeando x al entero menor, razón por la cual los abonos crecen.
- Redondeando al entero mayor, con lo que la renta disminuye.
- Con un pago menor al final del plazo. O bien,
- Con uno mayor al final.

En todas se supone, claro, que el capital no varía, variarlo sería otra opción.

a) Con $np = 9$ rentas en el ejemplo 3, cada una es de \$43,496.61, mayor que los 40,000 estipulados, ya que

$$350,000 = R\left(\frac{1-(1.023)^{-9}}{0.023}\right) \qquad M = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

$$350,000 = R(8.046604074)$$

de donde:

$$R = 350,000/8.046604074 \quad \text{o bien,} \quad R = \$43,496.61$$

b) Si se consideran 10 rentas, entonces cada una se reduce:

$$350,000 = R\left(\frac{1-(1.023)^{-10}}{0.023}\right)$$

$$350,000 = R(8.843210239)$$

de donde:

$$R = 350,000/8.843210239 \quad \text{o bien,} \quad R = \$39,578.39$$

En éste y todos los casos semejantes, debe suponerse que el saldo al final es nulo, es decir, que la deuda queda en ceros.

c) Para hallar el pago menor al final del plazo se obtiene el valor actual C de los 9 primeros de 40 mil y su diferencia con el crédito original, los 350 mil, será el valor presente del último pago 10 bimestres después.

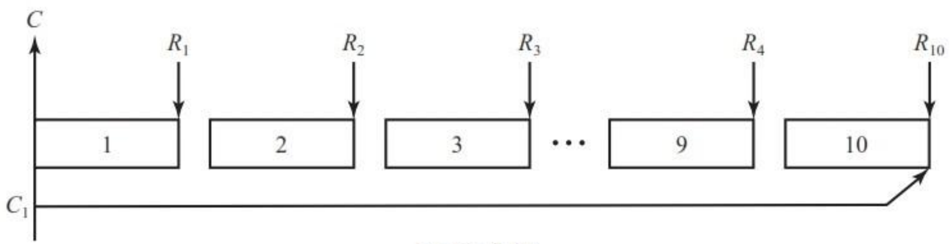


FIGURA 5.10

El valor presente de las 9 rentas de $40,000 es:

$$C = 40,000\left(\frac{1-(1.023)^{-9}}{0.023}\right)$$

$$C = 40,000(8.046604074) \quad \text{o bien,} \quad C = \$321,864.163$$

La diferencia con el crédito inicial es:

$$C_1 = 350,000 - 321,864.163 = 28,135.837$$

y el valor futuro, 10 bimestres después, es el tamaño de la última renta:

$$R_{10} = M = 28,135.837(1.023)^{10}$$

$$M = 28,135.837(1.25532546) \text{ o } R_{10} = \$35,319.63$$

Note que otra manera más práctica de obtener la última renta consiste en multiplicar la parte decimal de la x que se obtuvo por 40,000, aunque esto carece de precisión.

$$0.881809277(40,000) = 35,272.37$$

d) Si el último abono es mayor que los restantes, entonces deberá ser el noveno. Para obtenerlo, a los $40,000 se les suma el valor futuro de la diferencia anterior C_1, que con plazo de 9 meses, es:

$$M = 28,135.84(1.023)^{9}$$

$$M = 28,135.84(1.227102112) \quad \text{o bien,} \quad M = 34,525.55$$

Consecuentemente, el último abono es:

$$R_9 = 40,000.00 + 34,525.55 \quad \text{o bien,} \quad R_9 = \$74,525.55$$

Anualidad general

Como se dijo anteriormente, una anualidad es *general* si los pagos se realizan en periodos distintos a la frecuencia con que los intereses se capitalizan. Un método de solución consiste en transformar la anualidad *general* en *simple*, utilizando la tasa de interés equivalente, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Toma de decisiones al vender un camión

El dueño de un camión de volteo tiene las siguientes opciones para vender su unidad:

a) Un cliente puede pagarle $600,000 de contado.

b) Otro le ofrece $200,000 de contado y 7 mensualidades de $60,000 cada una.

c) Un tercero le ofrece $126,000 de contado y 20 abonos quincenales de $25,000 cada uno.

Determine cuál le conviene más, si sabe que el dinero reditúa el 12.6% de interés anual capi - talizable por quincenas.

solución

El problema se resuelve si se encuentra el valor presente de las últimas 2 opciones y se compara con los \$600,000 de la primera.

Para el capital al inicio del plazo de la segunda alternativa, es necesario encontrar la tasa capitalizable por meses, equivalente al 12.6% nominal quincenal, ya que los abonos son mensuales. Para esto se igualan los montos considerando que el capital es $C = 1$. Luego, para despejar i, se obtiene la raíz doceava y se realizan otros pasos algebraicos, esto es:

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.126/24)^{24}$$

$$1 + i/12 = (1.00525)^2 \quad \text{se obtiene raíz doceava, } 24(1/12) = 24/12 = 2$$

$$1 + i/12 = 1.010527562$$

de donde:

$$i = (1.010527562 - 1)12 \quad i = 0.126330744 \quad \text{o bien,} \quad 12.6330744\%$$

Note que más que el valor de i, es necesario el de $1 + i/p$ que es el que se reemplaza en las fórmulas.

El valor presente de las 7 mensualidades de \$60,000 es, por lo tanto,

$$C = 60,000\left(\frac{1-(1.010527562)^{-7}}{0.010527562}\right)$$

$$C = 60,000(6.714298486)$$

$$C = 402,857.9092 \quad \text{o bien,} \quad C = \$402,857.91$$

que agregados al anticipo arrojan un total de

$$200,000 + 402,857.91 = \$602,857.91$$

Observe que la anualidad general se transformó en una simple.

Para la última opción, se tiene que el valor presente de las 20 rentas quincenales de \$25,000 es:

$$C = 25,000\left(\frac{1-(1+0.126/24)^{-20}}{1.00525}\right)$$

$$C = 25,000(18.9386965) \quad \text{o bien,} \quad C = 473,467.41$$

que junto con el pago de contado nos dan:

$$126,000 + 473,467.41 = \$599,467.41$$

Según estos 3 valores $C_a = 600,000$, $C_b = 602,857.91$ y $C_c = 599,467.41$, que sin tomar en cuenta otros factores como la inflación, la segunda opción es la que más conviene a los intereses del propietario del camión. Sin embargo, la primera, aunque sea menor, sería la más atractiva, ya que se dispone del dinero en efectivo.

Ejercicios 5.3

1. ¿Cuál es la característica de las *anualidades ordinarias*?

2. ¿Por qué en las anualidades ordinarias las rentas se relacionan con su valor presente al inicio del plazo?

3. ¿Cuánto debe invertir al principio, al 8% de interés compuesto por trimestres, un padre de familia para retirar $35,000 al final de cada trimestre durante 4 años?

4. ¿Cuánto puede retirar cada quincena durante 2 años la beneficiaria de un seguro de vida de $450,000, si al principio los invierte en una cuenta que produce intereses del 6.28% anual compuesto por quincenas?

***5.** ¿Cuántos retiros mensuales de $3,585 pueden hacerse, si al inicio se depositan $97,000 en una cuenta que genera intereses del 9.4% anual compuesto por meses?

***6.** Se compra una lancha cuyo precio es de $375,000 y se paga con un enganche del 35%, un abono a los 3 meses por $50,000 y el resto con 10 mensualidades vencidas a partir del cuarto mes. ¿De cuánto es cada mensualidad si se tienen cargos del 18.6% de interés anual compuesto por meses? ¿A cuánto ascienden los intereses?

7. ¿Cuál es el precio al contado de una recámara que se paga con enganche de $3,500 el día de la compra, 24 abonos semanales de $325 e intereses del 23.26% nominal semanal?

***8.** ¿Cuánto debe invertir el padre de un estudiante un año antes de que éste comience sus estudios profesionales, si sabe que necesitará $30,000 al inicio de cada cuatrimestre durante 2 años y 8 meses, y el interés es del 9.5% anual compuesto por cuatrimestres?

9. Promociones Turísticas Internacionales ofrece un paquete VTI con el 20% de anticipo y el resto en 7 mensualidades de $4,500 cada una. ¿Cuál es el precio del paquete si se cargan intereses del 15.24% anual compuesto por meses?

10. El actuario González aprovecha el paquete del problema 9 y conviene pagarlo con el 40% de enganche y 10 abonos quincenales. ¿De cuánto es cada uno?

***11.** Al comprar un automóvil que le venden en $280,000, el arquitecto Morales puede elegir entre 3 planes de pago. Diga cuál le conviene más, si el dinero reditúa el 14.82% de interés anual compuesto por meses.

a) De contado con el 8% de descuento.

b) Un anticipo de $88,000 y 18 pagos mensuales de $10,500 cada uno.

c) Un enganche del 40% y 8 abonos bimestrales de $20,200 cada uno.

12. Un empleado considera que puede abonar $4,500 cada mes con excepción de los meses de junio y diciembre, cuando por el reparto de utilidades y el aguinaldo abonaría $15,000. Calcule la cantidad por la que podría solicitar un crédito hipotecario, si sabe que le dan 10 años para pagarlo, el tipo de interés es del 8.4% anual capitalizable por meses y comenzaría en diciembre.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***13.** El precio de contado de un camión de pasajeros es 3.2 millones de pesos y se paga con un anticipo del 35%, 2 abonos de $350,000 cada uno, a 2 y 3 meses de la compra, y después 8 pagos mensuales vencidos. ¿De cuánto es cada pago si los intereses son del 14.4% compuesto por meses?

14. El sistema intermunicipal de agua potable estima que el consumo bimestral en un hogar es de $475. ¿Cuánto debería cobrar al comenzar el año, si se sabe que el dinero reditúa el 8.46% anual convertible por bimestres?

En los problemas 15 a 20 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

15. En la amortización de un crédito de $35,000.00 con 13 rentas mensuales de $2,930.00 la tasa de interés anual capitalizable por meses es del 14.76% aproximadamente. __________

16. Deben invertirse $17,246.00 para realizar 10 disposiciones quincenales de $1,750 cuando los intereses son del 6.4% nominal quincenal. __________

17. Una deuda de $77,235 se cancela con 7 pagos bimestrales de $12,350 e intereses del 17.4% nominal bimestral. __________

18. Un crédito por $50,000 en refacciones automotrices se amortiza con 15 mensualidades de $3,750.00 cuando los cargos o intereses son del 21.3% capitalizable por meses. __________

19. Un refrigerador que se ofrece con 26 pagos semanales de $215 e intereses del 21.72% nominal semanal tiene un precio de contado de $4,273.50. __________

20. Trece abonos bimestrales de $13,350 cancelan una deuda de $160,205 cuando los intereses son del 7.23% nominal bimestral. __________

En los problemas 21 a 30 seleccione la opción correcta justificando su elección.

21. Se compra maquinaria para perforar pozos profundos con un anticipo y 13 abonos mensuales de $70,000 con cargos del 12% efectivo. ¿Por qué cantidad fue el crédito?

a) $852,318.64 *b*) $830,789.42 *c*) $809,305.41 *d*) $864,876.92 *e*) Otra

22. Un crédito hipotecario de $758,000 se amortiza con abonos mensuales durante 5 años e intereses del 10.2% capitalizable por meses. ¿De cuánto es cada uno?

a) $17,159.36 *b*) $15,583.04 *c*) $16,568.91 *d*) $16,179.95 *e*) Otra

23. ¿Cuántos abonos quincenales de $8,300 se necesitan para amortizar un adeudo de $72,641.67, si se tienen cargos o intereses del 13.5% nominal quincenal?

a) 7 *b*) 10 *c*) 8 *d*) 9 *e*) Otra

***24.** La Mueblería del Centro ofrece una pantalla LCD con un anticipo del 35% y 10 abonos mensuales de $1,500 cada uno. Un cliente que no deja anticipo, puede pagarla dando $1,750 cada quincena. ¿En cuánto tiempo lo logra? Suponga cargos del 15.3% nominal mensual y un pago mayor al final.

a) 10 *b*) 13 *c*) 11 *d*) 12 *e*) Otra

25. ¿Cuánto dinero le cuesta al cliente del problema 24, por no pagarla de contado?

a) $1,171.11 *b*) $872.40 *c*) $251.32 *d*) $1,031.79 *e*) Otra

***26.** La urbanizadora Vicar compra una motoconformadora con un anticipo de $450,000, un pago a los 3 meses por $330,000 y otro 4 meses después por $770,000, con intereses del 17% de interés efectivo. Poco antes de efectuar el primer abono, deciden con su acreedor reestructurar la deuda con 8 pagos mensuales. ¿De cuánto es cada uno si el primero se realiza a los 3 meses de la compra?

a) $135,579.84 *b*) $138,742.92 *c*) $150,923.50 *d*) $142,048.45 *e*) Otra

27. En el problema 26, ¿cuál fue el precio de la máquina?

a) $1’326,045.71 *b*) $1’375,098.29 *c*) $1’469,910.23 *d*) $1’497,990.32 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero pagó de más la urbanizadora del problema 30 al cambiar el plan de financiamiento?

a) $10,638.72 *b*) $9,625.43 *c*) $9,943.36 *d*) $8,965.35 *e*) Otra

29. La empresa “Diseño e Impresión Virtual” compra una máquina con un anticipo del 15% y 10 pagos mensuales de $95,000 con cargos del 12.36% nominal mensual. ¿Cuál es el precio de la máquina?

a) $1’056,856.05 *b*) $1’067,208.43 *c*) $1’295,874.21 *d*) $1’200,982.50 *e*) Otra

***30.** En el problema 29, ¿de qué cantidad sería cada abono si fueran 6 bimestrales y el anticipo del 40%?

a) $115,789.43 *b*) $113,098.35 *c*) $123,642.91 *d*) $113,475.56 *e*) Otra

5.4 Rentas equivalentes

Si bien es cierto que al comenzar este capítulo se dijo que cuando las rentas son vencidas se asocian con su capital o valor presente al comenzar el plazo, y que cuando son anticipadas se relacionarían, es decir, se hallaría su monto o valor acumulado al final del plazo, hay situaciones en la cuales los pagos anticipados se asocian con el capital y los vencidos con su monto. El caso más notorio se da cuando, por ejemplo, un conjunto de pagos periódicos se reemplaza por otro que es equivalente; esto es, que tiene los mismos efectos pero con diferente frecuencia, dando lugar a lo que se conoce como *rentas equivalentes*, que vamos a definir.

Definición 5.5

Si un conjunto de rentas es sustituido por otro que con diferente frecuencia de pagos produce el mismo monto, o si a los 2 corresponde el mismo valor presente, entonces se habla de *rentas equivalentes.*

Rentas anticipadas

Como ya se estudió en la sección 5.2 el valor futuro M de las anualidades con pagos anticipados está determinado por:

$$M = R(1 + i/p)\left(\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right) \quad \textbf{(A)}$$

y para encontrar su valor presente C al inicio del plazo, basta con trasladar este monto hasta esa fecha con la fórmula del interés compuesto, es decir,

$$M = C(1 + i/p)^{np} \text{ de donde } C = M/(1 + i/p)^{np}$$

o bien, $$C = M(1 + i/p)^{-np} \quad \text{ya que} \quad a/b^n = a(b^{-n})$$

Por lo tanto, al reemplazar M de la ecuación **(A)** en esta ecuación, resulta:

$$C = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)(1+i/p)^{-np}$$

Si se multiplica el factor $(1 + i/p)^{-np}$ por los 2 términos del numerador entre los corchetes, y puesto que $a^n a^{-n} = a^0 = 1$ y $1(a) = a$, se obtendrá como resultado la fórmula del teorema siguiente:

Teorema 5.3

El valor presente C de una **anualidad anticipada**, simple y cierta está dado por:

$$C = R(1+i/p)\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

donde:

R es la renta
i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año
n es el plazo en años
np es el número total de rentas e
i/p es la tasa de interés por periodo

Ejemplo 1

Renta semestral equivalente a una renta mensual

¿Qué renta semestral anticipada sustituye a los pagos mensuales anticipados de $500 con intereses del 15% anual compuesto por meses?

solución

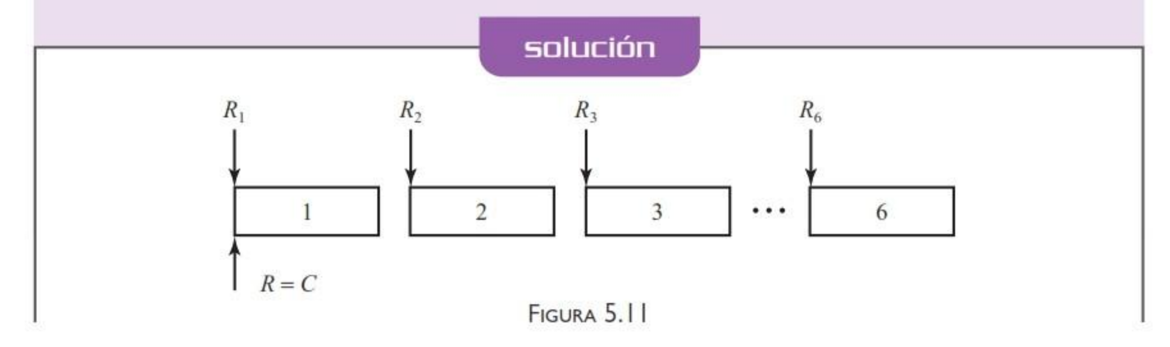


FIGURA 5.11

La tasa de interés por periodo mensual es $i/p = 0.15/12 = 0.0125$ y la renta semestral anticipada $R = C$ que es equivalente a los 6 pagos mensuales de \$500 según el teorema 5.3 es:

$$C = 500(1 + 0.0125)\left(\frac{1-(1.0125)^{-6}}{0.0125}\right)$$

$$C = 500(1.0125)(5.74600992) \quad \text{o bien,} \quad C = \$2,908.92$$

Note que este resultado es menor que la suma de las 6 rentas mensuales ¿por qué?

Ejemplo 2

Pago anticipado por renta de vivienda

El señor Cortés viene del extranjero a vacacionar y antes de su regreso paga la renta mensual anticipada por 2 años de la vivienda que habitan sus familiares. ¿De cuánto es su pago si la mensualidad es de \$9,750 y el dinero reditúa el 12.60% de interés nominal mensual?

solución

El problema es encontrar el valor presente C de 24 rentas anticipadas de \$9,750. Para esto se emplea la ecuación del teorema 5.3 con $i/p = 0.1260/12$ o $i/p = 0.0105$:

$$C = 9,750(1 + 0.0105)\left(\frac{1-(1.0105)^{-24}}{0.0105}\right)$$

$$C = 9,750(1.0105)(21.11747028) \quad \text{o bien,} \quad C = \$208,057.24$$

Esto significa que al pagar anticipadamente, el señor Cortés se está ahorrando la cantidad de \$25,942.76, ya que de lo contrario pagaría:

$$9,750(24) = \$234,000$$

Rentas vencidas

Para evaluar el monto de una anualidad vencida, el valor presente C de los np pagos vencidos que está dado por $C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$ se traslada hasta el final del plazo con la fórmula del interés compuesto, por lo tanto, el monto es:

$$M = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)(1+i/p)^{np} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

El último factor, $(1 + i/p)^{np}$, se multiplica por los 2 términos que están en el numerador y puesto que $a^n a^{-n} = 1$, se obtiene la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 5.4

El valor futuro M de una anualidad vencida u ordinaria, simple y cierta está dado por:

$$M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

donde, como antes, R es la renta, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año, y np es el número de rentas.

Ejemplo 3

Renta trimestral equivalente a 6 rentas mensuales

¿Cuál es la renta trimestral vencida equivalente a $3,400 mensuales vencidos con intereses del 8.48% anual capitalizable por meses?

solución

En la ecuación del último teorema se reemplazan R por 3,400, i por 0.0848, p por 12 y np por 3, el número de rentas por trimestre. La incógnita es M.

$$M = 3{,}400\left(\frac{(1+0.0848/12)^3-1}{0.0848/12}\right)$$

$$M = 3{,}400(3.021250047) \quad \text{o bien,} \quad M = \$10{,}272.25$$

Ejemplo 4

Ahorro con rentas equivalentes

Si con 5 pagos de $34,500 al final de cada cuatrimestre, con intereses del 14% efectivo, se amortiza un crédito, ¿cuánto dinero se ahorra el deudor si lo amortiza con abonos semanales vencidos equivalentes en el mismo plazo?

solución

Es necesario hallar primero la tasa capitalizable por semanas equivalente al 14% efectivo,

$$0.14 = (1+i/52)^{52} - 1 \qquad e = (1+i/p)^p - 1$$

$$(1+i/52)^{52} = 1.14$$

$$1+i/52 = \sqrt[52]{1.14}$$

$$1+i/52 = 1.002522952$$

de donde:

$$i = (1.002522952 - 1)^{52}$$

$$i = 0.131193504 \quad \text{o bien,} \quad 13.1193504\%$$

Note usted que para las operaciones es suficiente el valor de $1 + i/52 = 1.002522952$ y no el último resultado. Entonces, puesto que en un cuatrimestre quedan comprendidas 17 semanas, se tiene:

$$34{,}500 = R\frac{(1.002522952)^{17} - 1}{0.002522952}$$

$$34{,}500 = R(17.34748818)$$

de donde:

$$R = 34{,}500/17.34748818 \quad \text{o bien,} \quad R = \$1{,}988.76$$

Entonces, el deudor se ahorra, digámoslo así, la cantidad de \$3,455.40, ya que con abonos cuatrimestrales pagará en total 34,500(5) = 172,500; mientras que con los semanales pagará 1,988.76(85) = 169,044.60.

Importante

Si bien es cierto que 2 conjuntos de rentas equivalentes producen los mismos efectos, esto no debe confundirse con que generan los mismos intereses, ya que como se observa con el ejemplo 4, el total que se carga por intereses, en las 2 maneras con las que se amortiza la supuesta deuda, es diferente y esto no deja de ser lógico porque al recibir el acreedor los abonos cada semana, recibirá en total menos dinero que si se espera para recibirlo hasta el final del cuatrimestre. Es evidente y es razonable que también el deudor pague menos al adelantar sus pagos.

Ejemplo 5

Cargo con intereses moratorios

Ⓕ

Teresa adquirió un refrigerador que está pagando con 20 abonos quincenales vencidos de \$650 e intereses del 12.48% anual capitalizable por quincenas. Luego de 3 pagos, se retrasa con 5 y se pone al corriente al hacer el noveno.

a) ¿A cuánto equivale este pago si adicionalmente se cargan intereses moratorios del 0.9% quincenal compuesto por quincenas?

b) Halle los intereses.

solución

En la figura 5.12 se aprecia que es necesario encontrar el valor futuro de 6 rentas vencidas de \$650, 5 que se retrasaron y el noveno pago.

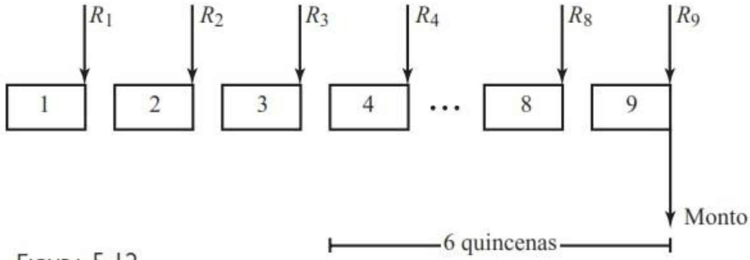


FIGURA 5.12

a) La tasa de interés que se sustituye en la ecuación 5.4 es:

$$0.1248/24 + 0.009 = 0.0142$$

El acumulado de los 6 abonos vencidos es, por lo tanto,

$$M = 650\left(\frac{(1+0.0142)^6 - 1}{0.0142}\right) \qquad \text{Teorema 5.4}$$

$$M = 650(6.217075986) \quad \text{o bien,} \quad M = \$4{,}041.10$$

b) Para calcular los intereses, se resta el precio del refrigerador del total que se paga.

El total pagado es la suma del resultado anterior y los 14 abonos de $650 que se pagaron sin retraso, esto quiere decir que:

$$M = 4{,}041.10 + 14(650.00)$$
$$M = \$13{,}141.10$$

El precio del refrigerador es el valor presente de los 20 abonos originales. Dicho valor se encuentra con la ecuación 5.2 para anualidades ordinarias:

$$C = 650\left(\frac{1-(1+0.1248/24)^{-20}}{0.0052}\right)$$

$$C = 650(18.94842694)$$

$$C = \$12{,}316.48$$

En consecuencia, lo que se paga por intereses es:

$$I = M - C$$

$$I = 13{,}141.10 - 12{,}316.48 \quad \text{o bien,} \quad I = \$824.62$$

Anualidad general

El siguiente y último ejercicio de esta sección, como en las otras del capítulo, se refiere a las anualidades generales, las cuales se caracterizan, se dijo, porque no coincide el intervalo de pago con la frecuencia de capitalización de intereses. Lo primero es hacerlos coincidir utilizando tasas equivalentes, tomando en cuenta que en las fórmulas debe utilizarse la que se capitaliza con mayor frecuencia, es decir, la menor de las 2 equivalentes.

Ejemplo 6

Cambio de rentas bimestrales por quincenales en el pago de un terreno

El señor Anaya compra el terreno para su casa con un anticipo, una hipoteca de 30 abonos bimestrales anticipados de $6,250 cada uno y una tasa de interés del 13.2% capitalizable por bimestres. Poco después de hacer el séptimo, decide amortizar el resto con pagos quincenales equivalentes. ¿De cuánto es cada uno?

solución

La tasa i nominal quincenal equivalente al 13.2% compuesto por bimestres es:

$$(1 + i/24)^{24} = (1 + 0.132/6)^6$$

$$(1 + i/24)^{24} = 1.139476505$$

de donde:

$$1 + i/24 = \sqrt[24]{1.139476505}$$

$$1 + i/24 = 1.005455199$$

$$i = (1.005455199 - 1)\,24$$

o bien,

$$i = 0.130924776$$

Por lo tanto, la renta quincenal R, equivalente a los $6,250 bimestrales vencidos, ya que en un bimestre hay 4 quincenas, está dada por:

$$6{,}250 = R\frac{(1.005455199)^4 - 1}{0.005455199} \qquad M = R\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

$$6{,}250 = R(4.032850314)$$

de donde $R = 6{,}250/4.032850314$

o bien, $R = \$1{,}549.77$

Ejemplo 7

En el ejemplo 6, ¿cuál fue el costo o el beneficio para el señor Anaya por haber cambiado el plan de pagos?

solución

Es necesario hallar los intereses o el monto que pagaría en el plan original y lo que pagó con el nuevo plan de pagos.
En el primer caso los intereses son:

$$I_1 = 30(6{,}250) - 136{,}203.75 \text{ o bien, } I_1 = 51{,}296.25$$

ya que el financiamiento del terreno es el valor presente de la anualidad vencida de los 30 pagos bimestrales.

$$C = 6{,}250\,\frac{1-(1+0.132/6)^{-30}}{0.132/6}$$

$$C = 6{,}250(21.7926002) \text{ o bien, } C = 136{,}203.75$$

con el nuevo plan son:

$$I_2 = 7(6{,}250) + 92(1{,}549.77) - 136{,}203.75$$

$$I_2 = 186{,}328.84 - 136{,}203.75$$

es decir, $I_2 = \$50{,}125.09$

Por lo tanto, el beneficio que logró el señor Anaya es:

$$B = 51{,}296.25 - 50{,}125.09 \qquad B = I_1 - I_2$$

$$B = \$1{,}171.16$$

Esto es un beneficio porque al hacer los pagos al final de cada quincena es adelantar los bimestrales y con eso se reducen los intereses.

Ejercicios 5.4

1. Explique el significado de *rentas equivalentes.*
2. ¿Qué es menor, una renta semestral anticipada o la suma de las 6 mensuales que la sustituyan?
3. ¿Qué es menor, una renta trimestral vencida o la suma de las 13 semanales vencidas equivalentes?
4. ¿De cuánto es la renta trimestral equivalente a 6 quincenales anticipadas de $3,200 con intereses del 11.76% anual capitalizable por quincenas?

*5. ¿De qué cantidad son las 4 rentas mensuales vencidas que sustituyen a la cuatrimestral de $9,300 con el 15% de interés efectivo?

6. ¿Cuáles son las 26 rentas semanales que sustituyen a una semestral vencida de $25,000 con intereses del 7.4% nominal semanal?

*7. ¿Con cuántos abonos mensuales anticipados de $188.00 se liquida un televisor con precio de $5,350 e intereses del 18.72% nominal mensual?

8. ¿Obtenga el precio de contado de una cámara de video que se paga con 8 mensualidades anticipadas de $528 e intereses del 16% nominal mensual?
9. Evalúe los intereses en el problema 8.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

10. ¿Cuánto debe invertir el padre de un estudiante en una cuenta que bonifica intereses del 6.36% anual capitalizable por cuatrimestres para disponer de $48,000 al inicio de cada uno de los 9 cuatrimestres que estudia en la universidad? Suponga que el depósito se efectúa al iniciar la carrera.

***11.** Un agricultor compra un tractor con un anticipo de $45,000, y el 75% restante lo salda con 6 pagos bimestrales anticipados con intereses del 23.76% nominal bimestral. ¿De cuánto es cada uno?

12. ¿De cuánto es el costo para el deudor que en vez de abonar $5,700 al final de cada quincena durante 2 años hace pagos trimestrales vencidos, considerando cargos del 15.75% nominal quincenal?

En los problemas 13 a 19 conteste falso o verdadero justificando su respuesta.

13. Una renta trimestral vencida de $10,016.92 es equivalente a 6 quincenales vencidas de $1,650.00 cuando los intereses son del 11.4% anual compuesto por trimestres. __________

14. Veintiséis depósitos semanales anticipados de $750.00 con intereses del 7.2% nominal semanal son equivalentes a uno semestral anticipado de $19,166.66. __________

15. El licenciado Pérez compra una Minivan con un anticipo y 36 mensualidades vencidas de $9,700. Luego de efectuar la décima se retrasa con 8 y se pone al corriente pagando $91,504.66 al hacer el decimonoveno considerando intereses del 15% efectivo. __________

16. Un crédito se pagaría con abonos vencidos de $6,325 al final de cada una de las 20 quincenas del plazo, con intereses del 21.4% nominal quincenal. Si se amortiza con pagos bimestrales vencidos equivalentes, entonces el costo para el deudor es de $1,702.00. __________

17. La señora González debe depositar $4,350 a inicio de cada mes, durante 15 meses, para liquidar un crédito de $56,975.14 con cargos del 24.12% nominal mensual. __________

***18.** Un banco ofrece el siguiente plan de ahorro con intereses del 6.3% nominal quincenal, $4,000 en la apertura y después $2,500 al final de cada quincena con plazo total de 9 meses, entonces el monto acumulado es de $50,211.54. __________

19. Con $6,425.00 al final de cada bimestre se acumulan $108,973.23 cuando los intereses son 8.4% anual capitalizable por bimestre y el plazo es de 2.5 años. __________

En los problemas 20 a 30 seleccione la opción correcta justificando su elección.

20. Seis rentas mensuales anticipadas de $8,300 con intereses del 10.5% anual compuesto por meses equivalen a una semestral anticipada de:

a) $48,295.36 *b*) $48,732.48 *c*) $47,968.93 *d*) $48,008.65 *e*) Otra

21. Es el capital que se amortiza con 18 mensualidades anticipadas de $10,500 e intereses del 15.3% nominal mensual.

a) $169,995.09 *b*) $170,071.07 *c*) $170,429.65 *d*) $170,928.03 *e*) Otra

22. Un crédito bancario de $360,000 se amortiza con 15 rentas bimestrales anticipadas e intereses del 26.4% anual capitalizable por bimestres. ¿De cuánto es cada una?

a) $31,887.85 *b*) $31,529.92 *c*) $30,908.03 *d*) $31,087.32 *e*) Otra

23. ¿Cuánto se acumula en un año de plazo con rentas quincenales vencidas de $7,250 e intereses del 6.6% nominal quincenal?

a) $173,961.14 *b*) $180,098.32 *c*) $170,245.33 *d*) $179,615.34 *e*) Otra

***24.** Con 36 rentas quincenales e intereses del 18.4% nominal mensual se amortiza un crédito automotriz de $195,000. ¿De cuánto es cada renta si son anticipadas?

a) $6,238.82 *b*) $5,987.23 *c*) $6,429.30 *d*) $6,168.82 *e*) Otra

***25.** ¿En cuánto se reduce el total que se paga cada cuatrimestre si una renta cuatrimestral de $15,300 vencida, se reemplaza por 8 quincenas vencidas equivalentes? Suponga cargos del 9.6% anual compuesto por quincenas.

a) $212.88 *b*) $302.42 *c*) $258.32 *d*) $232.52 *e*) Otra

***26.** Suponiendo que 13 rentas semanales vencidas de $4,200, cada una, se sustituyen por una trimestral equivalente, ¿cuánto gana el acreedor cada trimestre si los intereses son del 8.4% nominal semanal?

a) $603.85 *b*) $596.21 *c*) $532.36 *d*) $621.43 *e*) Otra

***27.** La licenciada Marisa compra un automóvil con un crédito de $210,000, 48 mensualidades vencidas e intereses del 23.7% nominal mensual. Luego de hacer el decimoquinto pago se retrasa con 6. ¿Con cuánto se pone al corriente al efectuar el abono número 22?

a) $50,601.19 *b*) $48,912.30 *c*) $51,029.05 *d*) $49,909.37 *e*) Otra

28. Resuelva el problema 27 suponiendo 2.3 puntos porcentuales cada mes de intereses moratorios adicionales.

a) $53,528.80 *b*) $54,409.75 *c*) $54,251.13 *d*) $53,928.07 *e*) Otra

29. ¿De cuánto es la renta semestral vencida que sustituye a 12 quincenalidades vencidas de $5,300 si se tienen cargos del 7.3% nominal quincenal?

a) $63,929.80 *b*) $64,674.84 *c*) $64,329.05 *d*) $65,008.23 *e*) Otra

30. Resuelva el problema 29 considerando que las rentas son anticipadas.

a) $61,089.45 *b*) $61,918.09 *c*) $60,529.38 *d*) $62,549.91 *e*) Otra

5.5 Anualidad diferida

Estas anualidades se caracterizan porque la primera renta no se ejecuta en el primer periodo o la última no se hace en el último.

El procedimiento para evaluar sus elementos es muy simple, ya que se resuelven como anualidades inmediatas utilizando las ecuaciones 5.1 y 5.2 para el monto o el capital, que luego se traslada en el tiempo hasta el final o el comienzo del plazo, con la fórmula del interés compuesto, aunque dependiendo del caso puede ser que primero se haga el traslado y después se apliquen dichas ecuaciones, pero se aprecia mejor en los ejemplos.

Ejemplo 1





Renta quincenal en anualidad diferida

Aeromexicana ofrece la promoción "Viaje ahora y pague después", que consiste en liquidar el precio del pasaje en 10 quincenas, empezando 3 meses después de haber viajado. ¿Cuánto pagará el licenciado José Luis, si el precio de sus boletos fue de $8,320y le cargan el 11.76% de interés anual compuesto por quincenas?

solución

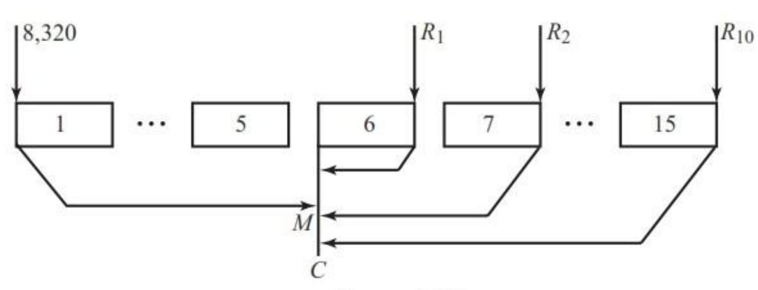


FIGURA 5.13

Como se aprecia en el diagrama de tiempos de la figura 5.13, los 10 abonos forman una anualidad ordinaria, cuyo valor presente es C al inicio del sexto periodo quincenal, y este capital C debe ser igual al valor futuro M de los $8,320, transcurridas 5 quincenas, al iniciar la sexta es:

$$M = 8{,}320(1 + 0.1176/24)^5 \text{ puesto que } M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M = 8{,}320(1.0049)^5$$

$$M = 8{,}320(1.024741279) \quad \text{o bien,} \quad M = 8{,}525.85$$

que se sustituye como C en la fórmula del teorema 5.2 para obtener el valor de las 10 rentas quincenales R:

$$8{,}525.85 = R\left[\frac{1-(1.0049)^{-10}}{0.0049}\right] \qquad \text{ya que } C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$8{,}525.85 = R(9.735699224)$$

de donde:

$$R = 8{,}525.85/9.735699224 \quad \text{o bien,} \quad R = \$875.73$$

Solución alterna

Otra forma de lograr este resultado consiste en llevar todo hasta el final de la quincena número 15, como si ahí estuviera la fecha focal. Así el valor futuro de los $8,320, 15 quincenas después es:

$$M = 8{,}320(1.0049)^{15} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M = 8{,}320(1.076075376) \text{ o bien, } M = 8{,}952.95$$

En estas condiciones los 10 abonos formarían una anualidad ordinaria cuyo monto, al final de las mismas 15 quincenas está dado por:

$$M = R\frac{(1.0049)^{10} - 1}{0.0049} \qquad M = R\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

$$M = R(10.22340612)$$

Este monto es igual al acumulado de los \$8,320 y por eso:

$$R(10.22340612) = 8{,}952.95$$

de donde $R = 8{,}952.95/10.22340612$

o bien, $R = \$875.73$ que es igual al resultado anterior.

Por supuesto que se pueden trasladar todas las cantidades de dinero hasta el final de la quincena 16, en cuyo caso, las 10 rentas formarán una anualidad anticipada.

Ejemplo 2

Precio de equipo de cómputo, anualidad diferida

La Facultad de Ingeniería adquiere un equipo de cómputo con un pago inicial de \$70,000 y 7 mensualidades de \$45,000 cada una, pagando la primera 4 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio del equipo, si se están cobrando intereses del 13.08% anual compuesto por meses?

solución

En la figura 5.14 se ilustran los 7 pagos en miles de pesos, que forman una anualidad vencida, y su valor presente C está al inicio del mes número 4.

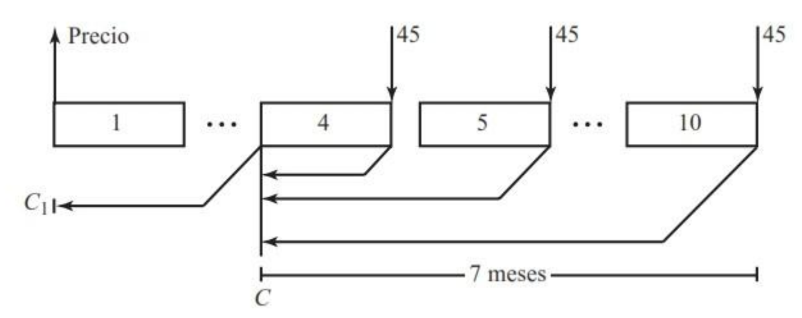


FIGURA 5.14

Se calcula este valor presente C posteriormente se traslada hasta el día de la compra, el inicio del plazo, y el resultado se suma con el enganche.

Los valores para reemplazar en la ecuación 5.2 son:

$R = 45{,}000$, la renta mensual vencida

$np = 7$, el número de pagos

$p = 12$, la frecuencia de pagos y de capitalización de intereses

$i/p = 0.1308/12$ o bien, $i/p = 0.0109$, la tasa de interés por periodo, entonces:

$$C = 45{,}000\left[\frac{1-(1.0109)^{-7}}{0.0109}\right]$$

$$C = 45{,}000(6.704514468) \text{ o bien, } C = \$301{,}703.15$$

3 meses antes, esto es equivalente a C_1 de la igualdad:

$$301{,}703.15 = C_1(1.0109)^3 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$301{,}703.15 = C_1(1.033057725)$$

de donde:

$$C_1 = 301{,}703.15/1.033057725 \quad \text{o bien,} \quad C_1 = 292{,}048.69$$

Los cuales, sumados al anticipo, arrojan el precio del equipo:

$$292{,}048.69 + 70{,}000 = \$362{,}048.69$$

Ejemplo 3

Monto en un fondo de jubilación

¿De cuánto dispondrá una compañía en la fecha de jubilación de sus empleados, si 3 años antes hace un depósito de \$140,000, seguido de 20 depósitos mensuales de \$9,500 cada uno, y ganando intereses del 9% nominal mensual? Obtenga los intereses.

solución

En la figura 5.15 está el diagrama de tiempo con rectángulos que representan los periodos mensuales.

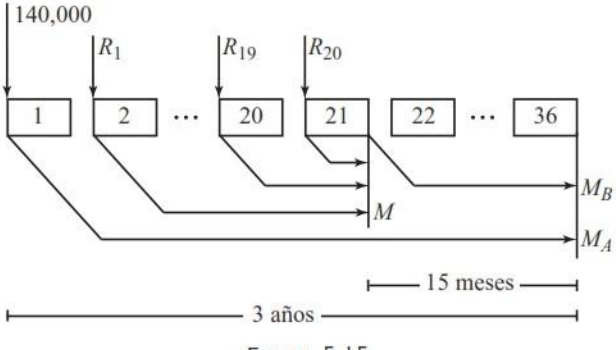


Figura 5.15

a) El monto total acumulado en los 3 años es igual a la suma de 2 montos, M_A, el valor futuro de los primeros $140,000, y M_B, el valor acumulado de las 20 rentas mensuales, las cuales constituyen una anualidad diferida. Puesto que la tasa por periodo es $i/p = 0.0075$ y el plazo es 36 meses, el primero es:

$n = 3$ años o bien, $M_A = 140{,}000(1.0075)^{36}$ $\quad M = C(1 + i/p)^{np}$

$M_A = 140{,}000(1.308645371)$

o bien, $M = \$183{,}210.35$

El acumulado de las 20 rentas mensuales anticipadas al final del mes 21 es:

$$M = 9{,}500(1.0075)\left[\frac{(1.0075)^{20} - 1}{0.0075}\right] \qquad M = R(1 + i/p)\left[\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$M = 9{,}500(1.0075)(21.49121893)$

$M = \$205{,}697.83$

y 15 meses después, al final del plazo, el día de la jubilación del primer empleado, éste se convierte en:

$M_B = 205{,}697.83(1.0075)^{15}$ $\quad M = C(1 + i/p)^{np}$

$M_B = 205{,}697.83(1.118602594)$ o bien, $M_B = \$230{,}094.13$

El total para la jubilación es, entonces,

$M = 183{,}210.35 + 230{,}094.13$ $\quad M = M_A + M_B$

o bien, $M = \$413{,}304.48$

b) Los intereses son iguales al monto acumulado menos el capital total invertido:

$I = 413{,}304.48 - [140{,}000 + 20(9{,}500)]$

$I = 413{,}304.48 - 330{,}000$ o bien, $I = \$83{,}304.48$

Tasa variable de interés

Ejemplo 4

Mensualidades en la compra de un departamento

Se compra un departamento de $960,000, con un anticipo del 30% pagadero en 12 quincenas que incluye un "apartado" de $25,000. El 70% restante se pagará con 114 abonos mensuales, luego de pagar el enganche. Obtenga el valor de los abonos, suponiendo que el interés es del 10.08% efectivo en el anticipo y del 8.16% nominal mensual en los restantes.

solución

Se tienen 2 anualidades, la primera es inmediata con 12 rentas vencidas y un valor presente C igual al 30% del precio del departamento, menos los $25,000 del apartado.

$C = 0.30(960{,}000) - 25{,}000$

$C = 288{,}000 - 25{,}000$ o bien, $C = 263{,}000$

Es necesario obtener la tasa de interés capitalizable por quincenas equivalente al 10.08% efectivo

$$(1 + i/24)^{24} = 1 + 0.1008$$

de donde $\quad 1 + i/24 = \sqrt[24]{1.1008}$

o bien, $\quad 1 + i/24 = 1.004009566$

Recuerde que no se necesita despejar la i para las operaciones. El tamaño del pago quincenal es R de la siguiente ecuación que resultó de sustituir valores en la fórmula del teorema 5.2 para el valor presente de una anualidad vencida

$$263,000 = R\frac{1-(1.004009566)^{-12}}{0.004009566} \qquad C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$263,000 = R(11.69301887)$$

de donde $\quad R = 263,000/11.69301887$

o bien, $\quad R = \$22,492.05$

Como se ve en la figura 5.16, la segunda es una anualidad diferida en 6 periodos mensuales, los del anticipo, consta de 114 mensualidades y los intereses por periodo son:

$$i/p = 0.0816/12 \quad \text{o bien,} \quad i/p = 0.0068$$

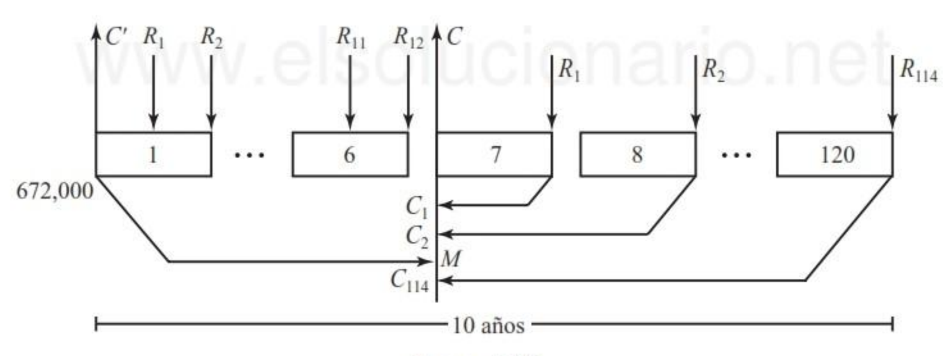


Figura 5.16

El valor presente C de esta anualidad es igual al valor futuro M del 70% del precio del departamento:

$$0.70(960,000) = 672,000$$

$$M = 672,000(1.0068)^6$$

$$M = 672,000(1.041499912)$$

o bien, $\quad M = \$699,887.95$

Éste es el valor presente de la anualidad ordinaria, y la renta está en la igualdad.

$$699,887.95 = R\left[\frac{1-(1.0068)^{-114}}{0.0068}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$699,887.95 = R(79.14385506)$$

de donde:

$$R = 699{,}887.95/79.14385506$$

o bien, $R = \$8{,}843.24$

Anualidad general

Ejemplo 5

La mueblería Hernández ofrece un minicomponente con entrada para memoria USB con 30 abonos semanales de $198 e intereses del 14.75% nominal mensual, y el atractivo de hacer el primero hasta 4 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio de contado del aparato?

solución

La tasa anual capitalizable por semanas equivalente al 14.75% compuesto por meses es i de la siguiente ecuación:

$$(1 + i/52)^{52} = (1 + 0.1475/12)^{12}$$

de donde:

$$1 + i/52 = \sqrt[52]{1.157891703}$$

$$1 + i/52 = 1.002823225 \quad \text{o bien,} \quad i = 0.144033916$$

El valor presente de los 30 abonos de $198, una semana antes de hacer el primero, es:

$$C = 198\left[\frac{1-(1.002823227)^{-30}}{0.002823227}\right] \quad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{ip}\right]$$

$$C = 198(28.72583113)$$

o bien, $C = \$5{,}687.714564$

Cuatro meses después de la compra significa que el primer pago se realiza a 17 semanas de la compra, ya que:

$$(4/12)52 = 17.33$$

y, entonces para el precio del aparato, hay que hallar el valor actual de C, 16 semanas antes:

$$C = 5{,}687.714564(1.002823227)^{-16}$$

$$C = 5{,}687.714564(0.955894283) \quad \text{o bien,} \quad C = \$5{,}436.85$$

Ejercicios 5.5

1. Diga por qué se llaman *anualidades diferidas*.

*2. Obtenga el precio de una pantalla LCD que se paga con un anticipo del 30% y 9 abonos quincenales de $525.00 haciendo el primero 2 meses después de la compra. Suponga intereses del 18.42% anual compuesto por quincenas.

*3. ¿Cuánto debe invertirse ahora en una cuenta que bonifica el 7.2% de interés nominal mensual para retirar $10,300 cada mes durante año y medio y haciendo el primero 5 meses después de la inversión?

4. La Mueblería del Centro ofrece un refrigerador en $6,350 precio de contado con el atractivo de pagarlo en 15 mensualidades, haciendo la primera 3 meses después de la compra con cargos del 27.9% nominal mensual. ¿De cuánto es cada pago?

5. En el problema 4, ¿cuánto dinero se genera por concepto de intereses?

*6. El 15 de marzo el señor Martínez consigue un préstamo y acuerda liquidarlo en un plazo de un año con 7 mensualidades de $13,500 cada una, en la parte última del plazo, ¿qué capital le prestaron si le están cargando el 19.8% efectivo?

7. Una importadora de partes electrónicas realiza una venta por $128,700 que le pagan con el 30% de entrada y 10 pagos bimestrales, haciendo el primero a 5 meses de la compra, ¿de cuánto es cada uno si incluyen ya intereses del 14.2% nominal semestral?

8. ¿Cuánto pagó por intereses el comprador en el problema 7?

*9. ¿Cuánto deberá depositarse al comenzar cada mes en una cuenta que ofrece interés del 5.4% nominal mensual desde el inicio del plazo para recuperar un pagaré que se firmó por un préstamo de $80,000 con cargos del 12% simple anual? Suponga que el plazo es de 13 meses y son 7 depósitos.

*10. ¿De qué cantidad fue un crédito que se liquida en 5 abonos mensuales vencidos de $15,300 cada uno, seguidos de 4 bimestrales de $10,000, y finalmente otros 7 quincenales de $4,500 con cargos del 21% nominal quincenal?

Justificando su respuesta conteste verdadero o falso en los problemas 11 a 16.

11. El precio de una lavadora que la Mueblería Madero ofrece con 45 abonos semanales de $125 haciendo el primero a 3 meses de la compra con intereses del 29.25% nominal semanal es $4,634.60 aproximadamente. __________

12. El costo por no pagar de contado, es decir, los intereses en el problema 11 son de $990.40. __________

*13. Para solventar los gastos de la fiesta de 15 años de su hija, un padre de familia abre una cuenta con $10,000 y 5 meses después inicia con una serie de 25 depósitos quincenales de $2,000. A 3 años del depósito inicial tendrá en su cuenta $70,625.85 sabiendo que le bonifican el 7.28% de interés anual capitalizable por quincenas. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

14. Para cancelar un préstamo de $62,729.35 se necesitan 17 abonos mensuales de $4,350 haciendo el primero 3 meses después de recibido si los intereses son del 19.6% nominal mensual. __________

***15.** Con 8 abonos mensuales vencidos de $2,300.00 se paga una computadora con precio de $17,312.13. Suponiendo intereses del 17.28% nominal mensual en el primer trimestre y del 16.5 efectivo después. __________

16. Ana Rosa consigue un préstamo y acuerda pagarlo con 18 abonos mensuales de $3,500. Luego de hacer el décimo, suspende sus pagos y al final lo liquida con $29,411.10. Suponiendo cargos o intereses del 16.8% nominal mensual. __________

Justificando su elección, en los problemas 17 a 31 seleccione la opción correcta.

17. El precio de un camión se paga con un anticipo el 35% y el resto con 10 abonos mensuales de $9,250 seguidos de 8 bimestrales de $17,300 cada uno, ¿cuál es el precio de contado si se tienen intereses del 15.3% nominal bimestral?

a) $298,929.55 *b*) $300,776.00 *c*) $305,061.30 *d*) $315,729.63 *e*) Otra

18. ¿Cuánto dinero se pagó por concepto de intereses en el problema 17?

a) $35,395.60 *b*) $36,923.08 *c*) $37,098.36 *d*) $34,895.32 *e*) Otra

***19.** ¿Cuánto logra acumular en año y medio de plazo un estudiante que hace depósitos anticipados de $2,750 y le dan a ganar el 5.8% de interés anual capitalizable por meses? Suponga que en el primer trimestre los depósitos son quincenales, en el siguiente semestre son mensuales y después son nuevamente quincenales.

a) $86,429.08 *b*) $87,390.40 *c*) $85,893.58 *d*) $86,064.43 *e*) Otra

20. Evalúe los intereses que gana el estudiante del problema 19.

a) $3,425.90 *b*) $3,564.43 *c*) $3,296.65 *d*) $3,129.78 *e*) Otra

21. Un crédito hipotecario de $850,000 se cancela con 50 mensualidades, de las cuales la primera se hizo 5 meses después de la fecha inicial. Considerando intereses del 20.5% nominal mensual, determine el tamaño de cada renta.

a) $27,199.96 *b*) $27,723.90 *c*) $26,868.31 *d*) $27,409.75 *e*) Otra

22. En el problema 21, ¿cuántos pagos serán necesarios si cada uno es de $37,135?

a) 30 *b*) 34 *c*) 32 *d*) 35 *e*) Otra

***23.** ¿Cuántos pagos quincenales anticipados de $6,350 deberán hacerse en la primera parte de un lapso de 9 meses para acumular $72,300 al final de los 9 meses, suponiendo intereses del 6.4% anual compuesto por quincenas?

a) 10 *b*) 13 *c*) 11 *d*) 12 *e*) Otra

24. Carlos Ignacio compra una casa con un enganche que se liquida con $20,000 de apartado y 15 abonos mensuales de $8,600. El 80% restante se amortiza con 60 mensualidades después de pagar el enganche, ¿cuál fue el precio de contado si le cargan el 10% efectivo en el enganche y el 8.4% nominal mensual en los otros pagos?

a) $710,096.30 *b*) $705,647.97 *c*) $718,095.36 *d*) $698,963.36 *e*) Otra

25. Halle los intereses en el problema 24.

a) $213,110.77 *b*) $210,428.82 *c*) $215,087.75 *d*) $214,925.08 *e*) Otra

26. ¿Cuál fue la tasa de interés global mensual en el problema 24?

a) 0.4026763% *b*) 0.580325% *c*) 0.43345% *d*) 0.53062% *e*) Otra

***27.** ¿Cuánto se acumula en 20 meses si en los primeros 7 se depositan $4,270 al inicio de cada quincena, luego se hacen 10 pagos mensuales de $7,000 y finalmente depósitos semanales de $2,500 cada uno? Suponga intereses del 6.63% nominal semanal.

a) $175,923.65 *b*) $171,740.90 *c*) $180,923.33 *d*) $177,409.71 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero se tendrá en una cuenta que bonifica intereses del 5.8% efectivo al final de10 pagos mensuales anticipados de $13,300, seguidos de 6 bimestrales de $25,000 cada uno?

a) $297,723.58 *b*) $295,773.35 *c*) $299,445.99 *d*) $305,429.08 *e*) Otra

***29.** Para disponer de $125,000 al final de 4 años, el contador Amezcua deposita $7,500 al final de cada una de las primeras 10 quincenas del plazo ganando intereses del 7.2% nominal quincenal. ¿Con cuánto debió abrir su cuenta al inicio del plazo?

a) $19,983.41 *b*) $20,365.56 *c*) $19,325.36 *d*) $19,181.71 *e*) Otra

30. ¿Cuánto gana por intereses el contador del problema 29?

a) $29,925.23 *b*) $31,238.96 *c*) $30,529.82 *d*) $30,016.59 *e*) Otra

31. ¿Cuánto le faltará al señor Amezcua en el problema 29 al final del plazo si no hace un depósito inicial para los $125,000?

a) $27,039.92 *b*) $26,428.22 *c*) $26,346.45 *d*) $26,641.53 *e*) Otra

5.6 Perpetuidades

Una perpetuidad es, se dijo, una anualidad donde la renta se mantiene fija, o variable, pero por tiempo ilimitado, y esto crea la necesidad de que el capital que la produce nunca se agote, a diferencia de las otras anualidades donde el capital al final del plazo queda siempre en ceros.

La renta periódica, por lo tanto, deberá ser menor o igual a los intereses que genera el capital correspondiente; y por esto nunca debe estar por arriba del resultado que se obtiene al multiplicar el capital C por i, la tasa de interés por periodo. Como esta tasa puede variar, la renta también, pero para efectos prácticos, desde el punto de vista operativo, se considera fija durante por lo menos un periodo anual. Puede probarse, además, que si la renta es menor que los intereses del periodo, los resultados varían muy poco y por eso no se considera el caso.

También es cierto que en este tipo de anualidades, no se da tiempo a que los intereses se capitalicen, y por eso es indiferente que la tasa de intereses sea simple o compuesta, aunque para facilitar las operaciones se considera simple tomando en cuenta, claro, que la frecuencia de conversión o de capitalización de intereses coincide con la frecuencia de pagos.

Por todo lo anterior los elementos de estas anualidades son lo más fácil de encontrar.

Ejemplo 1

Inversión para una beca trimestral

Con el producto de sus ventas, la Lotería Nacional instituye una beca trimestral de \$20,500. ¿De cuánto debe ser el capital a invertir a la tasa de interés del 6.9% compuesto por trimestres?

solución

La renta por trimestre es igual a los intereses del periodo trimestral que están determinados por:

$$I = Cin$$

donde: $I = 20{,}500$, la renta trimestral

$n = 3/12$, un trimestre, el plazo en años

$i = 0.069$, la tasa de interés nominal trimestral

C, el capital a invertir, la incógnita

Por lo tanto,

$$20{,}500 = C(0.069)(3/12) \qquad I = Cin$$

de donde:

$$C = 20{,}500/0.01725 \quad \text{o bien,} \quad C = \$1'188{,}405.80$$

Solución alterna

Note usted que de emplearse la fórmula del interés compuesto el monto deberá ser $M = C + 20{,}500$ y, por lo tanto,

$$C + 20{,}500 = C(1 + 0.069/4) \qquad M = C(1 + i/p)^{np}, \quad np = 1$$

$$C + 20{,}500 = C(1.01725)$$

$$20{,}500 = 1.01725C - C$$

$$20{,}500 = (1.01725 - 1)C$$

de donde:

$$C = 20{,}500/0.01725 \quad \text{o bien,} \quad C = 1'188{,}405.8$$

Ejemplo 2

Renta mensual perpetua

¿Cuánto pueden retirar cada mes y por tiempo ilimitado la señora viuda de González y sus herederos, si les son depositados \$ 1'970,000 en un banco que paga una tasa de interés del 7.72% anual compuesto por meses?

solución

En la fórmula $I = Cin$ se sustituyen:

C por 1'970,000, n por 1/12, el plazo en años son retiros mensuales, e i por 0.0772, la tasa de interés anual, por lo que la renta mensual es

$I = 1'970{,}000(0.0772)(1/12)$ $\quad I = Cin$

$I = \$12{,}673.67$

Ejemplo 3

Capital necesario para una renta perpetua

¿Cuál es el capital que debe depositarse en un banco que bonifica el 6.02% nominal mensual, para disponer de $12,500 mensuales por tiempo ilimitado?

solución

En este caso, los valores para reemplazar en la fórmula $I = Cin$ son:

$I = 12{,}500$, la renta mensual $\quad I = R$

$i = 0.0602$, la tasa anual capitalizable por meses

$n = 1/12$, el plazo en años, entonces,

$12{,}500 = C(0.0602)(1/12)$

$12{,}500 = C(0.00501\overline{6})$

de donde:

$C = 12{,}500/0.00501\overline{6}$ o bien, $\quad C = \$2'491{,}694.35$

Solución alterna

Con la fórmula del interés compuesto, se tiene que el monto acumulado por el capital C es

$M = C(1 + 0.0602/12)^1$

$M = C(1 + 0.0602/12)$ $\quad$ y los intereses son:

$I = C(1 + 0.0602/12) - C \quad I = M - C$

$I = C(1 + 0.0602/12 - 1)$ $\quad$ se factoriza C, luego se cancela el 1

$12{,}500 = C(0.0602/12)$ o $\quad 12{,}500 = C(0.005016)$

de donde: $\quad C = 12{,}500/0.00501\overline{6}$ o bien, $\quad C = 2'491{,}694.35$

Ejemplo 4

Tasa de interés en una perpetuidad

Una inversión de millón y medio de pesos produce los suficientes intereses para disponer de \$18,000 cada bimestre y por tiempo ilimitado. ¿Cuál es la tasa de interés por periodo?

solución

Ahora la incógnita es i, la tasa de interés bimestral:

$$18{,}000 = 1'500{,}000(i)(1/6) \qquad I = C(i)n$$

de donde:

$$i = (18{,}000/1'500{,}000)6 \quad i = 0.072 \quad \text{o bien,} \quad 7.2\% \text{ anual,}$$

porque el plazo, 1/6, está en años, la bimestral es 0.072/6 = 0.012 o bien, 1.2% bimestral.

Ejemplo 5

Anualidad general

¿Cuánto debe depositar ahora el señor Paredes, para disponer de \$5,000 cada quincena, comenzando dentro de 3 años y suponiendo que para entonces la tasa de interés seguirá siendo del 6.5% efectivo?

solución

Para el capital que debe tenerse para las disposiciones quincenales, primero se obtiene la tasa capitalizable por quincenas, equivalente al 6.5% efectivo

$$0.065 = (1 + i/24)^{24} - 1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

de donde:

$$(1 + i/24)^{24} = 1.065$$
$$1 + i/24 = \sqrt[24]{1.065}$$
$$1 + i/24 = 1.002627396$$
$$i = (1.002627396 - 1)24 \quad \text{o bien,} \quad i = 0.063057504$$

entonces,

$$5{,}000 = C_1(0.063057504)(1/24) \qquad I = Cin$$
$$5{,}000 = C_1(0.002627396)$$

de donde:

$$C_1 = 5{,}000/0.002627396 \ \text{o bien,} \ C_1 = \$1'903{,}024.90$$

este capital está una quincena antes de la primera renta y por eso debe trasladarse, con la fórmula de interés compuesto, hasta el día de hoy con un plazo de 24(3) − 1 = 71 quincenas porque el depósito se realiza, 3 meses antes, entonces:

$$C = C_1(1.002627396)^{-71} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C = 1'903{,}024.90(0.830024152) \quad \text{o bien,} \quad C = \$1'579{,}556.62$$

Ejemplo 6

¿Cuánto tiempo antes de disponer de una renta semanal de $2,100 por tiempo ilimitado, deben depositarse $1'230,000 en un banco que bonifica el 7.28% de interés nominal semanal, suponiendo que la tasa se mantiene?

solución

Se obtiene primero el capital necesario una semana antes de la primera renta:

$$2{,}100 = C_1(0.0728)(1/52) \qquad I = Cin \qquad I = R$$
$$2{,}100 = C_1(0.0014)$$

de donde:

$$C_1 = 2{,}100/0.0014 \quad \text{o bien,} \quad C_1 = \$1'500{,}000$$

Este capital es a la vez el monto o valor futuro de los $1'230,000, x semanas después; entonces:

$$1'500{,}000 = 1'230{,}000(1.0014)^x \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

Para despejar la incógnita, se divide entre 1'230,000, es decir, este número pasa dividiendo al lado izquierdo de la igualdad, resultando:

$$1.219512195 = (1.0014)^x \quad \text{o bien,} \quad (1.0014)^x = 1.219512195$$

Se toma el logaritmo natural, o común, a los 2 miembros:

$$\ln(1.0014)^x = \ln(1.219512195)$$

de donde:

$$(x)\ln(1.0014) = \ln(1.219512195), \qquad \text{ya que} \qquad \ln(A^n) = (n)\ln(A)$$
$$x = \ln(1.219512195)/\ln(1.0014)$$
$$x = 0.198450939/0.001399021$$
$$x = 141.8498727$$

Esto indica que 143 semanas antes de la primera renta deberán depositarse los $1'230,000 en las condiciones dadas.

Ejercicios 5.6

1. Diga qué caracteriza a las *anualidades perpetuas*.

2. ¿Qué capital destinará la Lotería Nacional para ofrecer una beca de $11,300 mensuales por tiempo ilimitado, si se considera que el dinero reditúa el 7.35% simple anual?

***3.** ¿De cuánto dinero podrán disponer al final de cada bimestre, a partir del quinto año, los herederos del señor Uribe si ahora deposita millón y medio de pesos en una cuenta que bonifica el 6.8% nominal quincenal?

4. ¿Con qué tasa de interés efectiva deberán invertirse $980,000 para generar una renta quincenal de $2,600 de manera perpetua?

5. ¿De qué renta mensual puede disponer un asilo de ancianos si les dejaron una herencia de 2.5 millones de pesos y se gana el 7.4% de interés simple anual?

6. Resuelva el problema 5 considerando que el depósito se hizo 7 años antes de la primera mensualidad.

***7.** Para ayudar a estudiantes de bajos recursos, la universidad creó un fondo con un depósito inicial de $750,000 y $35,000 cada mes durante 6 años ganando intereses del 6.6% nominal semanal. ¿De cuánto dinero dispondrá al inicio de cada trimestre, considerando que la primera renta se dispone 11 años después de la inversión inicial?

8. Suponiendo que el dinero reditúa 8.4% nominal mensual, determine cuánto debe depositar 10 años antes de casarse el señor Valdivia para contar con $45,000 el día de su boda, y de $6,250 al final de cada mes por tiempo ilimitado.

9. ¿Con qué mensualidad contará la pareja del problema 8, a partir de los 10 años de casados, si en su boda depositan en la cuenta el 65% de los 1.5 millones que supuestamente les heredan?

10. El testamento del señor Serrano especifica que el 39% de su fortuna estimada en 3.5 millones de pesos, sea legado al Hospital Civil de la ciudad. ¿Cuánto recibirá cada mes el hospital si el dinero produce el 5.75% de interés simple anual?

En los problemas 11 a 16 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

11. Millón y medio de pesos en una cuenta que genera intereses del 7.3% nominal bimestral son suficientes para disponer de por lo menos $18,250 cada bimestre. __________

***12.** La Lotería Nacional otorga una beca mensual de $8,548.64 por tiempo ilimitado, depositando $1'150,000 2 años antes de la primera disposición cuando el dinero reditúa el 7.7% de intereses anual compuesto por meses. __________

13. Si de un capital de $960.000 se retiran $13,500 al final de cada bimestre, entonces nunca se agotará. Considere el 8.3% de intereses simple anual. __________

14. Ochocientos cincuenta mil pesos no son suficientes para disponer de $2,300.00 quincenales, de manera perpetua, cuando se gana el 6.5% de interés nominal quincenal. __________

***15.** Para disponer de $9,100.00 cada bimestre por tiempo ilimitado cuando se invierten $500,000 se necesita una tasa efectiva mínima del 7.5%. __________

16. Para una beca de $10,500 cuatrimestrales deben invertirse por lo menos $450,000 con intereses del 6.75% nominal cuatrimestral. __________

---

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

Justificando su elección en los problemas 17 a 29 seleccione la opción correcta.

17. Obtenga el capital que debe depositarse en una cuenta que bonifica el 8.5% simple anual para disponer de $4,500 cada mes por tiempo ilimitado.

a) $596,780.37 *b*) $635,294.12 *c*) $693,672.08 *d*) $603,928.32 *e*) Otra

18. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva para que con una inversión inicial de $735,000 se logre una renta quincenal de $1,988.75 por tiempo ilimitado?

a) 7.0006231% *b*) 6.4800362% *c*) 6.7000105% *d*) 6.8360329% *e*) Otra

19. Resuelva el problema 18 considerando que la renta es de $4,500 mensuales.

a) 6.9839645% *b*) 7.2100750% *c*) 7.5994549% *d*) 7.0832648% *e*) Otra

20. Pronósticos Deportivos instituye 4 becas mensuales de $8,300 cada una. ¿Cuánto debe invertir en un banco que genera intereses del 4.9% anual capitalizable por meses?

a) $8’130,612.25 *b*) $7’968,093.04 *c*) $8’201,405.33 *d*) $9’008,795.47 *e*) Otra

21. Un afamado filántropo regala millón y medio de pesos a una institución de beneficencia, depositándolos en una cuenta bancaria que maneja intereses del 7% efectivo. ¿De cuánto es la disposición bimestral máxima por tiempo ilimitado?

a) $17,010.39 *b*) $17,329.65 *c*) $18,098.36 *d*) $17,517.61 *e*) Otra

22. Para que su hijo disponga de una renta mensual por tiempo ilimitado, desde que cumple los 15 años, un padre de familia invierte $875,000 en una institución financiera que paga intereses del 6.35% nominal mensual. ¿De qué tamaño es la renta? Suponga que el depósito lo hace cuando el muchacho cumple 5 años.

a) $8,722.69 *b*) $8,601.27 *c*) $8,324.06 *d*) $9,007.30 *e*) Otra

***23.** ¿Cuánto dinero debe donar a su *alma mater* un egresado para una beca cuatrimestral vencida de $7,500 que se hará efectiva 4 años después? Suponga intereses del 6.75% efectivo.

a) $237,925.63 *b*) $243,209.71 *c*) $305,921.03 *d*) $262,380.65 *e*) Otra

24. Para ayudar al Centro de atención a niños con cáncer, la Asociación de Actores y Compositores organiza un evento artístico con una recaudación total de $2’750,325, de los cuales el 23% fue para cubrir los costos del evento y el resto se deposita en una cuenta que paga el 7.08% efectivo, para realizar disposiciones mensuales por tiempo ilimitado. ¿De cuánto es cada una?

a) $12,106.72 *b*) $13,098.03 *c*) $12,385.91 *d*) $12,529.65 *e*) Otra

25. Resuelva el problema 24 considerando que 10 meses después se hace la primera disposición.

a) $12,093.28 *b*) $13,129.63 *c*) $12,744.06 *d*) $13,120.30 *e*) Otra

***26.** Al depositar $735,000 en una cuenta, pueden retirarse $8,700.00 bimestrales por tiempo ilimitado. ¿De cuánto podrá disponerse desde la sexta si en las 5 primeras se retiran solamente $7,000 cada mes?

a) $8,925.32 *b*) $9,020.30 *c*) $8,721.12 *d*) $8,803.02 *e*) Otra

27. Un famoso beisbolista legó \$875,000 a la Escuela Nacional del Deporte depositándolos en una institución que bonifica intereses del 6.95% simple anual. ¿De cuánto se podrá disponer cada mes y por tiempo ilimitado?

a) \$5,067.71 *b*) \$5,236.60 *c*) \$4,995.08 *d*) \$5,428.33 *e*) Otra

28. Resuelva el problema 27 suponiendo que el depósito se hace 10 años antes de la primera renta.

a) \$8,963.68 *b*) \$8,589.77 *c*) \$9,922.46 *d*) \$9,750.05 *e*) Otra

***29.** ¿Cuál es la tasa efectiva mínima para disponer de \$37,500 trimestrales por tiempo ilimitado cuando se invierten 2 millones de pesos?

a) 7.7135866% *b*) 7.0532651% *c*) 6.9836003% *d*) 7.2362495% *e*) Otra

5.7 Algunos problemas de aplicación

En esta sección se repasan las anualidades del capítulo, con ejemplos que resumen y combinan, sin un orden específico, los diferentes tipos de anualidades, con la finalidad primordial de capacitar al estudiante a elegir con acierto las fórmulas y la metodología en cada ejercicio para que, sin contar con la orientación que se tiene cuando se resuelve un problema de una sección cualquiera, por estar en esa sección, esté en condiciones de plantearlo y resolverlo correctamente.

Ejemplo 1

Aportaciones para un centro de rehabilitación

Una importante empresa de televisión realiza un evento para recabar fondos y crear centros de rehabilitación para niños con alguna discapacidad. Considerando que el dinero reditúa con el 7.54% anual compuesto por meses, determine de qué capital puede disponer cada mes por tiempo ilimitado por uno de tales eventos donde logró una recaudación total de \$446851,910, de los que se supone que el 45% se utilizó en la construcción y equipamiento de uno de los centros y gastos de organización del evento.

solución

El 55% de la recaudación total se destina para las disposiciones mensuales ¿por qué?

$$C = 0.55(446'851,910) \text{ o bien, } C = \$245'768,550.5$$

La renta mensual con la tasa del 7.54% nominal mensual es igual a los intereses que genera este capital.

$$I = 245'768,550.50(0.0754)(1/12) \qquad I = Cin$$

$$I = 1'544,245.73$$

Costo estimado por consumo de agua

Ejemplo 2

Estimado del costo bimestral del consumo de agua

¿Cuál será el costo estimado por bimestre del consumo de los servicios de agua y alcantarillado municipales de un usuario, si al comenzar el año le llega un recibo por $6,725 por el periodo anual, suponiendo que los bancos cargan el 11.4% de interés anual capitalizable por bimestres?

solución

Se trata de una anualidad vencida, así se supone, donde la incógnita es la renta bimestral *R*, que se obtiene reemplazando en la ecuación 5.2 los valores de: el valor presente *C* por $6,725, la tasa compuesta por bimestres; *i* por 0.114, la frecuencia de conversión y de pagos; *p* por 6, la tasa bimestral compuesta por bimestres; *i/p* por 0.019; y el número de rentas bimestrales por año *np* por 6.

$$6{,}725 = R\left[\frac{1-(1.019)^{-6}}{0.019}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$6{,}725 = R(5.6203835)$$

de donde:

$$R = 6{,}725/5.6203835 \quad \text{o bien,} \quad R = \$1{,}196.54$$

Aportaciones a un fondo para el retiro

Ejemplo 3

Renta trimestral en un fondo para el retiro

Los 550 miembros de la Asociación de Futbolistas participan con US$7,800 cada uno en un plan de inversión para el retiro, en una institución que reditúa el 9.96% de interés anual capitalizable por trimestres. ¿De qué renta trimestral podrán disponer luego de 3 años y por tiempo ilimitado?

solución

El capital que entre todos invierten es

$$C = 7{,}800(550)$$
$$C = \text{US\$}4'290{,}000$$

El valor futuro de este capital, 11 trimestres después, o sea uno antes de hacer el primer retiro, es:

$$M = 4'290{,}000(1 + 0.0996/4)^{11}$$
$$M = 4'290{,}000(1 + 0.0249)^{11}$$
$$M = 4'290{,}000(1.310679251) \quad \text{o bien,} \quad M = 5'622{,}813.987$$

La renta trimestral perpetua a partir del duodécimo trimestre es igual a los intereses que genera este capital durante un trimestre.

$$I = R = 5'622{,}813.987(0.0249) \qquad I = Cin, \qquad n = 1 \text{ trimestre}$$

o bien, $R = \text{US}\$140{,}008.07$

Pagos equivalentes en dos anualidades

Ejemplo 4

Valor presente de 2 anualidades, pagos equivalentes

La cadena hotelera Martha Patricia contrata hoy servicios de limpieza por un año a la compañía Mantenimiento y Limpieza. Ambas empresas convienen en que el pago se realice de la manera siguiente:

Dos pagos bimestrales de \$15,000 al final de cada uno de los primeros 2 bimestres, 5 pagos mensuales de \$20,000 el último de cada mes, y finalmente 6 abonos quincenales vencidos de \$7,500 cada uno. Suponga que la tasa de interés es del 15% capitalizable por meses.

a) ¿Cuánto se pagaría al comenzar el plazo, si en lugar de estos 13 abonos se hiciera un solo pago?

b) ¿Cuánto se pagaría si se hicieran 2 pagos iguales, uno al comenzar el plazo de un año y otro a los 6 meses?

solución

a) Es necesario obtener el valor presente de 3 anualidades al comienzo del año, la primera de ellas inmediata con sólo 2 rentas, y las otras 2 diferidas con 5 y 6 rentas cada una.

El capital de la primera C_A se evalúa con el valor presente de cada renta, mediante la fórmula del interés compuesto, más que como una anualidad. El plazo en la primera es de 2 meses y en la segunda de 4.

$$C_1 = 15{,}000(1 + 0.15/12)^{-2} \quad {}^{-}C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 15{,}000(1.0125)^{-2}$$
$$C_1 = 15{,}000(0.975461058) \text{ o bien, } C_1 = 14{,}631.92$$
$$C_2 = 15{,}000(1 + 0.15/12)^{-4}$$
$$C_2 = 15{,}000(0.951524275) \text{ o bien, } C_2 = 14{,}272.86$$

Entonces, la suma es:

$$C_A = 14{,}631.92 + 14{,}272.86 \quad \text{o bien,} \quad C_A = \$28{,}904.78$$

Para el valor presente C_B de la segunda anualidad, primero se obtiene el capital C_3 al comenzar el quinto mes, como se aprecia en la figura 5.17.

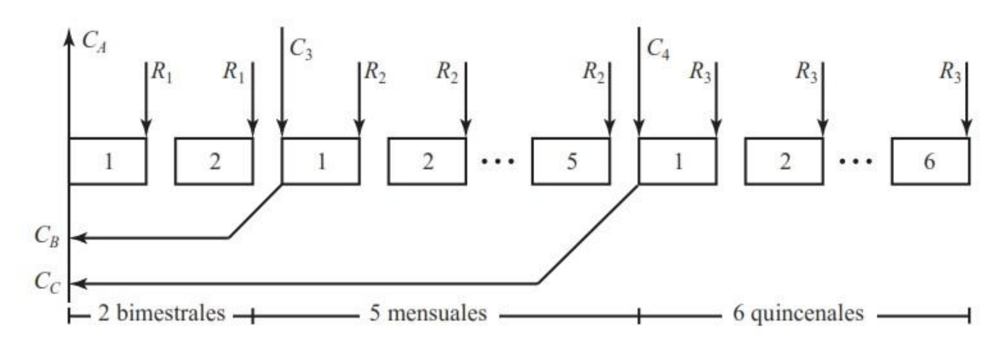


FIGURA 5.17

Ahora la renta es $R = \$20{,}000$, el número de rentas es $np = 5$ y la tasa por periodo es $i/p = 0.15/12$ o $i/p = 0.0125$; por lo tanto,

$$C_3 = 20{,}000\,\frac{1-(1.0125)^{-5}}{0.0125}$$

$$C_3 = 20{,}000(4.817835048) \quad \text{o bien,} \quad C_3 = \$96{,}356.70$$

4 meses antes, esto será equivalente a

$$C_B = 96{,}356.70(1.0125)^{-4}$$

$$C_B = 96{,}356.70(0.951524275) \quad \text{o bien,} \quad C_B = \$91{,}685.74$$

Para el valor presente C_4 de la tercera al inicio del décimo mes, es decir al final del noveno, es necesario hallar primero la tasa i compuesta por quincenas equivalente al 15% de interés nominal mensual,

$$(1 + i/24)^{24} = (1 + 0.15/12)^{12}$$

$$(1 + i/24)^{24} = (1.0125)^{12}$$

$$(1 + i/24)^{24} = 1.160754518$$

$$1 + i/24 = \sqrt[24]{1.160754518} \quad \text{o bien,} \quad 1 + i/24 = 1.00623059$$

El plazo es de 6 quincenas, 6 rentas quincenales, y cada una es de \$7,500; por lo tanto,

$$C_4 = 7{,}500\left(\frac{1-(1.00623059)^{-6}}{0.00623059}\right)$$

$$C_4 = 7{,}500(5.87130145) \quad \text{o} \quad C_4 = \$44{,}034.76$$

y 9 meses antes es $C_C = 44{,}034.76(1 + 0.0125)^{-9}$

$$C_C = 44{,}034.76(0.894220688) \quad \text{o} \quad C_C = \$39{,}376.79$$

En consecuencia, al iniciar el año el precio de los servicios de limpieza será:

$$C = C_A + C_B + C_C$$

$$C = 28{,}904.78 + 91{,}685.74 + 39{,}376.79$$

o bien, $C = \$159{,}967.31$

b) Para la segunda forma de pago se debe encontrar el valor x, el monto de cada uno de los 2 pagos, uno al comenzar el año y otro a los 6 meses; para el segundo, el valor presente es:

$$C_1 = x(1.0125)^{-6} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

o bien,
$$C_1 = (0.928174876)x$$

La suma de C_1 y el primer pago x es igual al precio por la limpieza:

$$C_1 + x = 159{,}967.31$$
$$(0.928174876)x + x = 159{,}967.31$$
$$(1.92817487)x = 159{,}967.31, \qquad \text{ya que} \qquad ab + b = (a + 1)b$$

de donde:

$$x = 159{,}967.31/1.928174876 \quad \text{o bien,} \quad x = \$82{,}963.07$$

es decir, que cada uno de los pagos en este plan de crédito es de $82,963.07.

Utilidades en cultivo de agave

Ejemplo 5

Suponiendo que el cultivo de agave requiere de gastos bimestrales de $8,000 durante 7 años, al final de los cuales genera ingresos de $325,000 mensuales durante 3 meses, ¿de cuánto son las utilidades?

solución

Las utilidades son la diferencia entre los ingresos y los egresos. Los primeros son 3(325,000) = 975,000; y los egresos son 8,000(7)(6) = 336,000, entonces,

$$U = 975{,}000 - 336{,}000$$

o bien,
$$U = \$639{,}000$$

Ejemplo 6

Si el dinero del ejemplo 5 se invierte en un banco que bonifica el 9.09% anual capitalizable por meses, ¿de cuánto serán las utilidades, es decir, los intereses?

solución

La tasa compuesta por bimestres equivalente al 9.09% nominal mensual es i de la ecuación:

$$(1 + i/6)^6 = (1 + 0.0909/12)^{12}$$

de donde al obtener la raíz sexta, queda

$$1 + i/6 = (1.007575)^2$$
$$1 + i/6 = 1.015207381 \quad \text{o bien,} \quad i = 0.091244286$$

El monto de los \$8,000 bimestrales, al final de los 7 años, es:

$$M_1 = 8{,}000(1.015207381)\left[\frac{(1.015207381)^{42} - 1}{0.015207381}\right]$$

$$M_1 = 8{,}000(1.015207381)(58.19224066)$$

o bien, $$M_1 = \$472{,}617.5378$$

entonces, las utilidades, es decir, los intereses en este caso al final de los 7 años son:

$$I = 472{,}617.54 - 8{,}000(7)(6)$$

$$I = \$136{,}617.54$$

Ahorro para estudios profesionales

Ejemplo 7

Para disponer de \$60,000 al final de cada semestre de los 9 que dura la carrera profesional de su hijo, un padre de familia deposita \$7,000 mensuales en una cuenta que le bonifica intereses del 9.6% nominal mensual. ¿Cuándo debe comenzar si el último lo efectúa un mes antes de que el hijo comience sus estudios profesionales?

solución

El diagrama de la figura 5.18 donde las rentas están en miles de pesos nos auxilia.

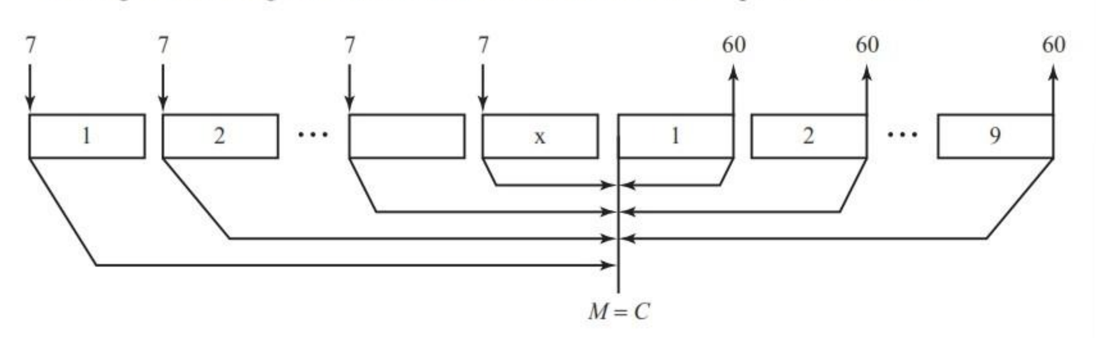


FIGURA 5.18

Se obtiene primero el capital al inicio de las 9 disposiciones semestrales. Para ello, se necesita la tasa de interés nominal semestral que equivale al 9.6% capitalizable por meses:

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.096/12)^{12}$$

$$1 + i/2 = (1.008)^6 \quad \text{se saca raíz cuadrada}$$

$$1 + i/2 = 1.048970302, \text{ de donde } i = 0.097940604$$

Entonces,

$$C = 60,000\left[\frac{1-(1.048970302)^{-9}}{0.048970302}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C = 60,000(7.140527322) \quad \text{o bien,} \quad C = 428,431.64$$

que es el capital que se necesita al inicio de la carrera y debe ser igual al monto acumulado de las x rentas mensuales anticipadas de \$7,000, por lo tanto,

$$428,431.64 = 7,000(1 + 0.096/12)\left[\frac{(1.008)^x - 1}{0.008}\right] \qquad M = R(1+i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right]$$

$$428,431.64 = 7,000(1.008)\left[\frac{(1.008)^x - 1}{0.008}\right]$$

de donde para despejar x se efectúan algunos pasos algebraicos y después se considera logaritmos a los 2 lados de la ecuación.

$$\frac{428,431.64(0.008)}{7,000(1.008)} + 1 = (1.008)^x$$

$$(1.008)^x = 1.485750159$$

$$\ln(1.008)^x = \ln(1.485750159)$$

$$(x)\ln(1.008) = \ln(1.485750159), \quad \text{porque } \ln(M^n) = (n)\ln(M)$$

$$x = \ln(1.485750159)/\ln(1.008) \quad \text{o bien,} \quad x = 49.68767229$$

Si se redondea a 50 rentas, entonces cada una se reduce un poco, ya que

$$428,431.64 = R(1.008)\frac{(1.008)^{50} - 1}{0.008}$$

$$428,431.64 = R(61.67099245)$$

$$R = 428,431.64/61.67099245 \quad \text{o bien,} \quad R = \$6,947.05$$

Entonces, debe comenzar sus depósitos mensuales 4 años y 2 meses antes del inicio de la carrera.

Ejemplo 8

Intereses

Obtenga los intereses que se generan en el plan de ahorros del ejemplo 7 y la tasa de interés global total.

solución

Como siempre los intereses son la diferencia entre lo que se retira en las 9 disposiciones semestrales y lo que se deposita en las 50 rentas mensuales, es decir, $I = M - C$, esto es:

$$I = 9(60{,}000) - 50(6{,}947.05)$$
$$I = 540{,}000 - 347{,}352.50$$

o bien, $I = \$192{,}647.50$

b) La tasa de interés global total es el cociente de los intereses entre el capital,

$$g = 192{,}647.50/347{,}352.50$$
$$g = 0.554616708$$

o bien, 55.4616708%

Deuda externa del país

Ejemplo 9

Pago mínimo para que no crezca la deuda externa

Si la deuda externa de un país es de 13,750 millones de dólares, ¿de cuánto debe ser el pago mínimo trimestral para que no se incremente, considerando intereses del 4.5% efectivo?

solución

Para evitar que la deuda se incremente cada pago trimestral debe cubrir por lo menos los intereses del periodo. Para hallarlos se obtiene primero la tasa de interés anual i, compuesta por trimestres equivalentes al 4.5% efectivo.

$$0.045 = (1 + i/4)^4 - 1 \quad e = (1 + i/p)^p - 1$$
$$(1 + i/4)^4 = 1.045$$
$$1 + i/4 = \sqrt[4]{1.045}$$

$1 + i/4 = 1.01106499$, de donde $i = 0.04425996$ o bien, 4.425996% anual.

Los intereses generados por la deuda en un trimestre son, entonces,

$$I = 13{,}750(0.04425996)(1/4) \qquad I = Cin$$
$$I = 13{,}750(0.01106499)$$
$$I = 152.1436125$$

o bien, US\$152,143,612.50 trimestrales.

Note que en todos los casos la tasa de interés y el plazo están en las mismas unidades de tiempo.

Alquiler de viviendas

La cantidad que el propietario recibe por el alquiler de sus bienes inmuebles constituye un ejemplo de anualidad perpetua, tomando en cuenta que por renovación del contrato, la oferta y la demanda de los bienes en renta y la propia variación de las tasas de interés, el tamaño de la renta puede variar pero es permanente por lo menos durante la vida útil del inmueble.

En virtud de que casi todos los inmuebles aumentan su valor con el tiempo, las tasas de interés son relativamente bajas en esta clase de operaciones.

Ejemplo 10

Renta mensual de vivienda

¿En cuánto deberá rentar su casa el licenciado López, si está valuada en un millón 750 mil pesos y pretende ganar con el 4.2% de interés anual compuesto por meses?

solución

La renta mensual es igual a los intereses que se generan en el mes, esto es:

$$I = 1'750{,}000(0.042)(1/12)$$

$$I = 6{,}125.00$$

Es práctica común que la renta de la vivienda se pague al comenzar el mes, pero esto no afecta el resultado.

Ejemplo 11

Tasa de interés en la renta mensual de un departamento

Un departamento se renta en $4,200 mensuales. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por meses, si el propietario lo tiene valuado en $750,000?

En la fórmula de los intereses $I = Cin$ se reemplazan C por 750,000, la I por 4,200, la renta mensual y n por 1/12, el plazo en años.

$$4{,}200 = 750{,}000(i)(1/12)$$

de donde:

$$i = 4{,}200(12)/750{,}000$$

$$i = 0.0672, \quad \text{es decir,} \quad 6.72\% \text{ anual.}$$

Inversión a plazo fijo en el Banco del Ahorro Nacional

Uno de los instrumentos de ahorro que ofrece el Banco de Ahorro Nacional y Servicios Financieros, Bansefi, antes Patronato del Ahorro Nacional o, más comúnmente, Banco del Ahorro Nacional, es el *Tandahorro*, que se ofrece a plazo fijo de 1, 2 o 3 años con depósitos mensuales y apertura mínima con \$50. La tasa de interés con que se ofrecen es variable, dependiendo de la tasa que tienen los CETES y, por esta razón, se protege hasta cierto punto a los ahorradores contra los efectos inflacionarios.

Ejemplo 12

¿Qué monto logra acumular una persona que deposita \$950 cada mes en Tandahorro, con plazo de 36 meses, considerando que le bonifican una tasa nominal mensual equivalente al 65% de la que ofrecen los CETES, que se ha mantenido en un 4.62% en promedio anual? Suponga que abre su cuenta con \$3,500.

solución

En la fórmula para el monto de las anualidades anticipadas se sustituyen:

R por \$950, la renta mensual

i por 0.65(0.0462) = 0.03003, la tasa de interés anual

n por 3, el plazo en años

p por 12, porque son depósitos mensuales, y

np por 36, el número de rentas

Así,

$$M_1 = 950(1+0.03003/12)\left[\frac{(1.0025025)^{36}-1}{0.0025025}\right] \qquad M = R(1+i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right]$$

$$M_1 = 950(1.0025025)(37.62222737) \qquad \text{o bien,} \qquad M_1 = \$35{,}830.55814$$

Note usted que este resultado incluye \$950 del pago de apertura.¿Por qué? y, por lo tanto, se le debe sumar el valor futuro de los 2,550 restantes, con la fórmula del interés compuesto.

$$M_2 = 2{,}550(1.03003)^3$$

$$M_2 = 2{,}550(1.092822484)$$

o bien, $M_2 = \$2{,}786.70$

La suma de los 2 montos es el total acumulado:

$$M = M_1 + M_2 \quad \text{o bien,} \quad M = \$38{,}617.55, \text{ redondeando.}$$

Préstamos con periodo de gracia

Es práctica común que cuando se otorga un crédito a largo plazo y de magnitud considerable, se conceda un *periodo de gracia* en el que el deudor no tiene obligación de dar pago alguno, provocando que el monto prestado se incremente durante ese periodo, con una tasa de interés que podría ser diferente de la que se estipula en la anualidad que, por esta condición, cae en la categoría de las diferidas.

Ejemplo 13

Para apoyar a la industria textil el BID, Banco Interamericano de Desarrollo, concede al país un préstamo por 425 millones de dólares, con un plazo de 18 años que incluyen 4 de gracia al principio. Obtenga el tamaño de cada renta mensual, si en el periodo de gracia la tasa de interés es del 7.2% anual al capitalizable por meses, y en el resto de los años es del 10.3% efectivo.

solución

El monto al final de los 4 años de gracia, en millones de dólares, es:

$$M = 425(1 + 0.072/12)^{48}$$

$$M = 425(1.33261002) \quad \text{o bien,} \quad M = 566.3592585$$

y éste es igual al valor presente de la anualidad, con pagos mensuales e intereses del 9.843528% nominal mensual que corresponde al 10.3% efectivo, ya que,

$$0.103 = (1 + i/12)^{12} - 1 \qquad e = (1 + i/12)^{12} - 1$$

de donde:

$$(1 + i/12)^{12} = 1.103$$

$$1 + i/12 = \sqrt[12]{1.103}$$

$$1 + i/12 = 1.00820294 \quad i = 0.09843528 \quad \text{o bien, 9.843528 nominal mensual}$$

entonces, considerando que la anualidad es anticipada porque la primera renta se hace justamente cuando terminan los 4 años, se cumple el teorema 5.3:

$$C = R(1 + i/p)\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$566.3592585 = R(1.00820294)\left[\frac{1-(1.00820294)^{-168}}{0.00820294}\right]$$

$$566.3592585 = R(1.00820294)(91.0064594)$$

$$R = 566.3592585/91.75297993$$

$$R = 6.172652475 \text{ millones de dólares}$$

o bien, $R = \text{US\$}6'172{,}652.48$

Reestructuración de crédito hipotecario con renta variable

Ejemplo 14

Plazo en crédito hipotecario con renta variable, intereses

Una promotora inmobiliaria ofrece casas con un crédito hipotecario constituido de 48 mensualidades vencidas de $6,500 y una tasa de interés del 21.6% anual compuesto por meses. El matemático Campos adquiere una casa y decide incrementar el pago de cada semestre a $15,500, aprovechando su aguinaldo y su prima vacacional.

a) ¿En cuánto tiempo terminará de pagar su casa, si se considera que el primero de los pagos mayores lo realiza el día de la compra?

b) ¿Cuánto pagará por concepto de interés?

solución

a) Primero es necesario hallar el valor presente de la hipoteca en las condiciones originales, tratando el problema como una anualidad ordinaria con:

$R = 6{,}500$, $np = 48$ e $i/p = 0.216/12 = 0.018$; por lo tanto,

$$C_1 = 6,500\left(\frac{1-(1.018)^{-48}}{0.018}\right) \qquad C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C_1 = 6{,}500(31.95978574) \quad \text{o bien,} \quad C_1 = \$207{,}738.61$$

Se resta el primer abono de $15,500 porque se hace el día de la compra, entonces el valor del crédito es:

$$C = 207{,}738.61 - 15{,}500.00$$
$$C = \$192{,}238.61$$

La gráfica de la figura 5.19 ayuda a entender mejor el procedimiento.

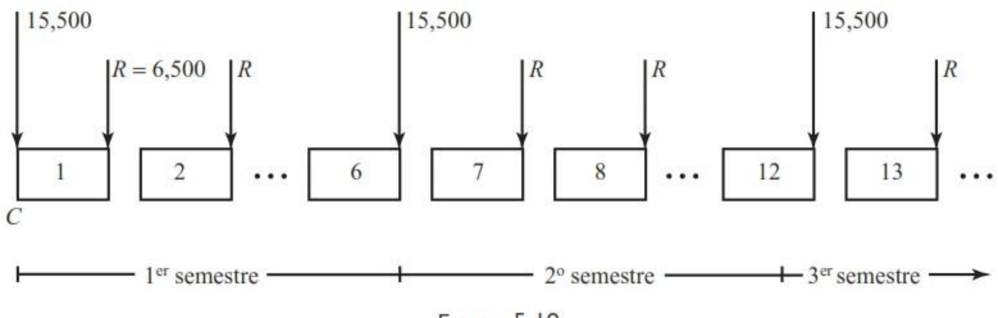


Figura 5.19

Es conveniente hallar la renta mensual R_1 equivalente a los $9,000 adicionales por semestre. Para esto se utiliza la ecuación 5.4 para el valor futuro de una anualidad vencida, notando que los $9,000 resultan de restar $6,500 de los $15,500.

$$9{,}000 = R_1\left(\frac{(1.018)^6 - 1}{0.018}\right) \qquad M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$9{,}000 = R_1(6.276568111)$$

donde: $R_1 = 9{,}000/6.276568111$ o bien, $R_1 = \$1{,}433.90$

Esto significa que abonar \$9,000 semestrales es lo mismo que abonar \$1,433.90 cada mes; por lo tanto, la renta mensual en total es:

$$R = 6{,}500 + 1{,}433.90$$

$$R = \$7{,}933.90$$

Para obtener el número aproximado de rentas, $np = x$, se reemplazan esta renta y el valor presente del crédito en la ecuación 5.2 para anualidades vencidas:

$$192{,}238.61 = 7{,}933.90\left(\frac{1-(1.018)^{-x}}{0.018}\right)$$

de donde, con algunos pasos algebraicos, se llega a:

$$\frac{192{,}238.61}{7{,}933.90}(0.018) - 1 = -(1.018)^{-x}$$

o bien, $(1.018)^{-x} = 0.563859517$

que se resuelve tomando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, es decir,

$$\ln(1.018)^{-x} = \ln(0.563859517)$$

$$(-x)\ln(1.018) = \ln(0.563859517), \text{ ya que } \ln(M^n) = n\ln(M)$$

$$-x = \ln(0.563859517)/\ln(1.018)$$

$$-x = -0.572950142/0.017839918$$

$$x = 32.11618676 \quad \text{o bien,} \quad 32 \text{ meses, aproximadamente.}$$

Es decir, que el plazo será de 5 semestres y 2 meses adicionales; por lo tanto, serán necesarios 5 pagos semestrales de \$15,500, 25 mensuales intercalados y 2 más al final de \$6,500, cada uno, aproximadamente, porque x se ha redondeado.

Para obtener con precisión el valor de las rentas mensuales, se encuentra el capital que reduce la deuda con los 5 pagos semestrales. La tasa semestral equivalente i se despeja a partir de la siguiente ecuación:

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.216/12)^{12}$$

$$1 + i/2 = \sqrt{1.238720532}$$

$$1 + i/2 = 1.112978226$$

El valor presente de los 5 pagos de \$9,000 es, entonces,

$$C = 9{,}000\left(\frac{1-(1.112978226)^{-5}}{0.112978226}\right)$$

$$C = 9{,}000(3.668374062)$$

$$C = \$33{,}015.37$$

ya que se trata de 5 rentas vencidas.

El valor presente de los restantes, puesto que la hipoteca se reduce en esta cantidad, debe ser igual a:

$$192{,}238.61 - 33{,}015.37 = 159{,}223.24$$

por lo tanto, la renta mensual será:

$$159{,}223.24 = R\left(\frac{1-(1.018)^{-32}}{0.018}\right)$$

$$159{,}223.24 = R(24.16502914)$$

donde: $R = 159{,}223.24/24.16502914$

o bien, $R = \$6{,}588.99$

Quiere decir que el crédito hipotecario, a final de cuentas, se cancela con un pago de \$15,500 el día de la compra, 27 rentas mensuales de \$6,588.99 y 5 semestrales de \$15,588.99, porque

$$9{,}000 + 6{,}588.99 = \$15{,}588.99$$

b) Los intereses son, por lo tanto, la diferencia entre el monto y el capital, donde el monto es el total que se pagó.

$$M = 15{,}500 + 27(6{,}588.99) + 5(15{,}588.99)$$

$$M = 271{,}347.68$$

El capital es el valor del crédito.

$$C = \$207{,}738.61$$

Y los intereses son:

$$I = 271{,}347.68 - 207{,}738.61$$

$$I = \$63{,}609.07$$

Ejercicios 5.7

***1.** ¿Qué monto puede disponer ahora un empleado en su jubilación, si desde hace 15 años estuvo ahorrando \$6,250 anuales en un fondo para el retiro que le pagó una tasa de intereses del 8.78% efectivo en los primeros 4 años, porcentaje que se incrementó en 1.02 puntos porcentuales anuales cada sexenio?

2. Un importante club de fútbol profesional contrata los derechos de transmisión directa de sus partidos con una empresa de televisión por cable. Recibe un anticipo y US\$520,000 al final de cada mes durante medio año. ¿Cuál es el valor presente de las 6 rentas al inicio del plazo, si el dinero reditúa un interés del 8.4% anual capitalizable por meses?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

3. En el problema 2, otra cadena de televisión le ofrece el mismo anticipo y pagos de US$1'030,000 al término de cada bimestre en el mismo plazo. ¿Cuál le conviene más?

***4.** El ingeniero Barajas compra una trilladora con un enganche del 35% y abonos bimestrales vencidos de $175,000 durante año y medio. Suponiendo que el interés es del 14.4% anual capitalizable por bimestres, determine:

a) ¿Cuál es el precio de contado de la máquina?

b) ¿Cuánto paga por concepto de intereses?

c) ¿De cuánto sería cada abono mensual, si da el 40% de enganche, el primero a los 5 meses de la compra y no varía el plazo?

5. Durante 8 años se invierten $465,000 semestralmente en un predio para el cultivo de agave que se estima producirá $1'675,000 por año a partir del noveno. ¿En cuánto tiempo se recuperará la inversión, si el dinero reditúa el 9% de interés efectivo?

6. Al comenzar el año, a un usuario de los servicios de agua del municipio se le entregó un recibo por $6,700 por su consumo de agua de todo el año. ¿De cuánto será el gasto bimestral, suponiendo que la tasa de interés es del 9.3% anual compuesto por bimestres? Suponga que el cargo se realiza al final de cada bimestre.

7. ¿Cuánto deberá pagar un inquilino al comenzar el año por las 12 mensualidades anticipadas de $8,000 que paga por su vivienda, suponiendo que la tasa de interés es del 11.7% efectiva?

***8.** ¿Cuántos depósitos quincenales anticipados de $3,645 deben hacerse en la primera parte del año para tener $35,000 al final, si el interés es del 7.84% compuesto por quincenas? Haga un ajuste en los depósitos.

9. Una tienda de electrodomésticos vende un televisor de contado en $4,925 o con 40 abonos semanales, el primero 3 meses después de la compra a una tasa del 15.96% de interés compuesto por semanas. ¿De cuánto es cada abono?

10. Los 70 miembros de Futbolistas A.C. participan con $600 quincenales cada uno durante 3 años, ganando una tasa de interés del 10.5% nominal quincenal. ¿Cuánto podrán disponer al final de cada trimestre por tiempo ilimitado, a partir de los 7 años después de haber comenzado?

***11.** La señora de Chávez recibe $720,000 por un seguro de vida. Invierte dicha cantidad en un banco que paga una tasa de interés del 7.03% nominal mensual. A los 2 años retira $285,000 y a partir del tercero $9,750 mensuales. ¿Durante cuánto tiempo podrá hacerlo? Haga un ajuste a la renta.

12. El testamento de un reconocido filántropo estipula que el 39% de sus inversiones valuadas en 2.5 millones de pesos se otorgue al Centro de Readaptación Juvenil de la ciudad. ¿Cuál será la renta mensual con que contará el Centro, 2 años después del deceso y por tiempo ilimitado, si se devenga un interés del 7.96% anual capitalizable por meses?

***13.** Con la promoción de *compre ahora y pague después*, un profesor adquiere una pantalla LCD cuyo precio de contado es de $14,250. ¿De cuánto serán cada uno de los 40 pagos semanales, si el primero se realiza 3 meses después de la compra y se cobra un interés del 21.48% capitalizable por semanas?

Conteste verdadero o falso en los problemas 14 a 21 justificando su respuesta.

***14.** Una renta mensual anticipada de $7,650 es equivalente a $45,200.57 semestrales anticipados cuando los intereses son del 7.42% nominal mensual. __________

15. La renta trimestral vencida de $9,325 con intereses del 6.24% anual capitalizable por trimestres es equivalente a la renta quincenal vencida de $1,494.65. __________

16. La renta semestral anticipada que sustituye a la renta mensual anticipada de $2,625 es $14,728.63 con intereses del 7.4% nominal mensual. __________

17. Con $26,082.40 al hacer el pago número 10 se cubren 7 abonos mensuales vencidos de $3,650 que no se realizaron, con intereses del 8.24% nominal mensual. __________

18. Ocho pagos mensuales anticipados de $5,325 son equivalentes a un pago de $41,117.54 al inicio del periodo de 8 meses cuando los intereses son del 12.3% nominal mensual. __________

19. La beca mensual instituida por la Asociación de Egresados con $760,000 es de $4,496.67 si los intereses son del 7.1% nominal mensual. __________

20. El señor Fernández compra un terreno de $265,000 y lo paga con 10 abonos mensuales anticipados de $27,641.67 con intereses del 11.4% anual compuesto por meses. __________

***21.** Los intereses ascienden a $11,416.70 con el problema 20. __________

En los problemas 22 a 30 seleccione la opción correcta justificando su decisión.

***22.** Al vender una máquina de construcción pesada la Urbanizadora del Centro tiene las siguientes opciones. Determine: ¿cuál le conviene más si se sabe que los bancos pagan el 6.4% de interés compuesto por meses?

a) El ingeniero Peña le ofrece 2 pagos de $725,000 cada uno, el primero en la compraventa y el otro a los 3 meses.

b) Otro le da $1'410,000 de contado, y

c) Un tercero le da $550,000 el día de la compra, y después 10 abonos mensuales de 90,000 cada uno.

d) Un pago único por $1'443,000 a los 3 meses de la compra.

23. ¿Cuánto deberá pagar el inquilino de una vivienda al comenzar un periodo de 12 mensualidades anticipadas de $10,250 cada una, si se consideran intereses del 10.5% nominal mensual?

a) $121,626.83 *b*) $118,921.43 *c*) $120,093.42 *d*) $117,298.37 *e*) Otra

24. Un centro de rehabilitación para niños con capacidades diferentes recibe un donativo de 12.35 millones de pesos, de los cuales invierte el 70% en una cuenta que le bonifica intereses del 9.3% nominal mensual, y el resto lo destina a la renovación de su mobiliario e instalaciones. ¿Cuánto puede retirar de la cuenta cada mes?

a) $68,953.42 *b*) $70,023.32 *c*) $66,998.75 *d*) $71,865.00 *e*) Otra

***25.** Durante 6 años se gastan $110,000 semestrales en un predio con agave. ¿Cuánto debe producir anualmente durante los siguientes 7 años para recuperar la inversión, considerando que el dinero reditúa el 12% de interés efectivo?

a) $426,075.59 *b*) $405,723.61 *c*) $398,093.21 *d*) $450,203.65 *e*) Otra

26. ¿En cuánto tiempo se recupera la inversión en el problema 25, si la utilidad que se espera es de $78,000 anuales?

a) 7 años *b*) 5 años *c*) 4 años *d*) No se recupera *e*) Otra

27. El Banco Internacional concede a un país en desastre un préstamo por 20.3 millones de dólares, con intereses del 2.3% anual en el periodo de gracia de 7 años y del 3.8% en el resto del plazo, es decir, durante 10 años. ¿Cuánto debe abonar cada año?

a) US$2'905,507.13 *c*) US$2'203,405.33 *e*) Otra
b) US$2'120,973.41 *d*) US$3'060,530.84

***28.** Tres amigos se asocian para crear la cadena de tiendas El Jitomate. El primero participa con 2 millones, el segundo con 3.5 y el tercero con 4.5. Estiman lograr utilidades de $671,500 por trimestre. ¿En cuántos trimestres recuperarán su inversión, suponiendo que el dinero reditúa con el 6.05% anual capitalizable por trimestres?

a) 19 *b*) 16 *c*) 15 *d*) 17 *e*) Otra

29. ¿En cuánto deberá rentar su casa el licenciado Santillán, si está valuada en $1'725,400 y pretende ganar el 4.5% efectivo?

a) $6,340.52 *b*) $6,895.42 *c*) $6,960.00 *d*) $6,695.40 *e*) Otra

30. ¿De cuánto es el pago mínimo semestral, en millones, que debe de hacer el gobierno para que no se incremente la deuda externa, sabiendo que es de 2,735 millones de dólares y le cargan intereses del 3.75% anual compuesto por semestres?

a) $50.22322 *b*) $51.28125 *c*) $49.73205 *d*) $52.63243 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Diferenciar los tipos de anualidades más comunes y explicar sus características.
- Calcular el *valor presente*, la *renta*, el *plazo* y la *tasa de interés* de las anualidades *ordinarias*, utilizando la fórmula:

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

- Obtener el *monto*, la *renta*, la *tasa de interés* y el *plazo* de las anualidades *anticipadas* con la fórmula:

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

- Ajustar la renta, el monto o el valor presente de las anualidades, donde la incógnita es el plazo.
- Reemplazar un conjunto de rentas por otro conjunto equivalente.
- Resolver las anualidades mediante rentas equivalentes.
- Convertir anualidades *generales* en *simples* para evaluar sus elementos.
- Plantear y resolver problemas financieros y comerciales reales, aplicando los conceptos, las definiciones y las características de las anualidades.
- Calcular el monto de las anualidades *ordinarias* y el valor presente de las *anticipadas* utilizando, respectivamente, las fórmulas:

$$M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right) \quad \text{y} \quad C = R(1+i/p)\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

- Obtener la renta, el capital o la tasa de interés en las anualidades *perpetuas* con la fórmula:

$$I = Cin, \text{ con } n = 1.$$

- Plantear y resolver problemas con anualidades *diferidas*.

Conceptos importantes

Anualidad
Anualidad anticipada
Anualidad general y anualidad simple
Anualidad ordinaria o vencida
Anualidades ciertas y contingentes
Anualidades inmediatas y anualidades diferidas
Frecuencia de capitalización de intereses e intervalo de pago en las anualidades
Perpetuidad
Renta, valor presente, monto, tasa de interés, plazo e intereses de las anualidades
Rentas equivalentes

Problemas propuestos para exámenes

1. ¿De qué cantidad es el pago mínimo para disponer de $7,200 cada mes por tiempo ilimitado cuando los intereses son del 8.7% nominal mensual?

***2.** ¿Cuánto debe depositarse al inicio de cada una de 25 quincenas para disponer de $16,300 al final de cada bimestre durante los siguientes 2 años? Suponga intereses del 7.1% anual compuesto por bimestre.

***3.** ¿De cuánto es la renta trimestral vencida que sustituye a 13 pagos de $10,500, uno al final de cada semana, con intereses del 5.8% nominal semanal?

4. ¿Cuántos pagos mensuales de $7,233.70 se necesitan para cancelar un adeudo de $113,625.00 con cargos del 17.7% nominal mensual?

5. ¿En cuánto tiempo se acumulan $28,953.26 en una cuenta que bonifica el 6.2% de interés efectivo, con depósitos mensuales de $2,150?

6. Carlos Ignacio deposita $3,275.00 al inicio de cada mes y su hermana $825.00 al comienzo de cada semana, ¿quién acumula más dinero en 2 años de plazo con intereses del 7.5% nominal semanal?

***7.** Para vacacionar, Laura abre una cuenta con $4,500 y después hace 7 depósitos quincenales de $1,650 cada uno en una cuenta que paga el 7.4% de interés anual compuesto por quincenas. ¿De qué cantidad dispondrá al iniciar su viaje 3 meses después del último depósito?

8. ¿De qué tamaño fue la deuda que se liquida con 10 pagos bimestrales de $25,500 si los intereses son del 19.8% nominal bimestral?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

9. Diseño Europeo es una mueblería que ofrece un juego de sala, recámara y comedor con un anticipo del 30% y 8 abonos mensuales de $2,750 con cargos del 23.4% nominal mensual. ¿Cuál es el precio de contado?

10. ¿De qué cantidad es un pago al final de los 8 meses en sustitución de las mensualidades en el problema 9?

***11.** Obtenga el enganche y un pago a los 6 meses de la compra en el problema 9, suponiendo que el anticipo es 20% menor que el abono posterior.

12. En el problema 9, ¿cuánto se pagó por concepto de intereses?

En los problemas 13 a 19 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

13. En toda anualidad los pagos son anuales. __________

14. Siete rentas mensuales anticipadas de $3,125 son equivalentes a $21,251.43 al comenzar el periodo de 7 meses, cuando los intereses son del 11.7% anual compuesto por meses. __________

15. Para acumular $82,095.33 se necesitan 8 depósitos mensuales anticipados de $10,000 cada uno, con intereses del 7.3% nominal mensual. __________

***16.** Un automóvil de $180,134.76 se paga con un anticipo de $52,350 y 15 mensualidades vencidas de $9,625 con cargos o intereses del 20.5% efectivo. __________

17. En las anualidades perpetuas la renta es mayor o igual a los intereses que se generan en el periodo. __________

18. Si el primer pago quincenal para cancelar una deuda se hace al final del quinto periodo, entonces la anualidad es diferida. __________

19. El valor presente de 7 rentas mensuales de $6,300 es poco mayor de $44,100. __________

En los problemas 20 a 31seleccione la opción correcta justificando su elección.

***20.** ¿Cuántos depósitos quincenales de $2,735 deberá hacer un estudiante para disponer de $45,000 para sus gastos de graduación suponiendo intereses del 7.92% nominal quincenal?

a) 18 *b*) 17 *c*) 16 *d*) 14 *e*) Otra

21. El doctor Ortiz adquiere un automóvil con un apartado de $30,000, 4 meses antes de la compra, $25,000 el día de la compra y después 10 mensualidades de $14,750. ¿Cuál es el precio de contado si los intereses son del 9.6% nominal mensual?

a) $204,629.09 *b*) $197,183.98 *c*) $205,529.36 *d*) $198,763.08 *e*) Otra

22. Un famoso futbolista firma un contrato por 2 años por un monto de 1.5 millones de dólares que le pagarán en partidas bimestrales anticipadas iguales durante la vigencia del contrato. ¿Cuánto percibirá cada bimestre si se consideran intereses del 7% efectivo?

a) US$134,404.39 *b*) US$129,098.35 *c*) US$132,897.30 *d*) US$135,921.23 *e*) Otra

23. Obtenga la renta mensual equivalente a $16,850 cuatrimestrales, considerando que son anticipadas y los intereses del 11.5% nominal mensual.

a) $4,272.96 *b*) $4,008.98 *c*) $4,361.01 *d*) $4,521.20 *e*) Otra

24. ¿Cuánto recibe cada mes y por tiempo ilimitado el Hospital Civil del municipio, si logró un donativo de 3.55 millones y se consideran intereses del 6.9% anual capitalizable por meses?

a) $21,663.92 *b*) $20,412.50 *c*) $24,098.03 *d*) $22,129.84 *e*) Otra

***25.** Determine cuál es la opción más conveniente para el señor Vergara al vender su automóvil, si se consideran intereses del 8.48% nominal mensual.

a) Don Luis le ofrece $235,000 de contado.

b) Un amigo le da $90,000 de contado y 5 abonos mensuales de $30,000 cada uno.

c) Otro le ofrece 3 pagos de $80,000 cada uno a los 2, 3 y 5 meses de la compra -venta.

d) Teresa se lo paga con $125,000 el día de la compra y 13 abonos quincenales de $8,750 cada uno.

e) Rosalía le da $60,500 en la compra, $120,000 a los 3 meses y $60,500 2 meses después.

***26.** Con intereses del 10% efectivo, el Sistema de Agua Potable y Alcantarillado adquiere un crédito que pagará con rentas mensuales de 3.5 millones de pesos cada una durante los primeros 3 años, rentas bimestrales de 5.2 millones los siguientes 2 y cuatrimestrales de $12'800,000 los últimos 2 años del plazo. ¿De cuánto fue el crédito?

a) $194'230,306.50 *c*) $198'908,343.09 *e*) Otra

b) $189'963,421.35 *d*) $193'198,891.60

***27.** ¿Durante cuánto tiempo el gobierno estatal podrá disponer de $950,000 al final de cada bimestre si previamente realiza 30 depósitos mensuales de $608,242.26 con intereses del 6.69% nominal bimestral?

a) 23 bimestres *b*) 4 años *c*) 26 bimestres *d*) 5 años *e*) Otra

***28.** El 23 de abril se consigue un crédito pagadero con un abono a los 3 meses por $48,000 otro por $65,000 a 2 meses del primero y un tercero, 4 meses después del anterior por $34,000. Poco antes de efectuar el primero deciden cambiar el plan con 15 pagos semanales haciendo el primero en el vencimiento de dicho pago. ¿De qué cantidad es cada uno si se cargan intereses del 18.6% anual capitalizable por meses?

a) $10,629.35 *b*) $9,523.08 *c*) $10,035.61 *d*) $9,705.98 *e*) Otra

29. ¿Cuál fue el costo o beneficio para el deudor del problema 28 por haber cambiado el plan de pagos?

a) $1,410.30 beneficio *c*) $1,450.61 costo *e*) Otra

b) $1,840.35 costo *d*) $1,705.42 beneficio

30. ¿De qué cantidad es la beca cuatrimestral por tiempo ilimitado que la Lotería Nacional ins - tituye con 3.2 millones de pesos con intereses del 7.35% nominal cuatrimestral?

a) $74,850.00 *b*) $75,924.00 *c*) $78,400.00 *d*) $69,650.00 *e*) Otra

***31.** El contador Núñez logra un crédito por $85,700 para renovar el mobiliario y tecnología de sus oficinas, para pagarlo con abonos mensuales durante 9 meses, con cargos del 13.2% nomina mensual, luego de efectuar los primeros 3 se retrasa con 4 y se pone al corriente al hacer el noveno pago. ¿Con cuánto lo hace si le cargan 2.3 puntos porcentuales adicionales al mes por intereses moratorios?

a) $54,629.35 *b*) $55,029.61 *c*) $53,421.68 *d*) $53,804.33 *e*) Otra





Amortización de créditos

Contenido de la unidad

En la sección 3.6 del capítulo 3, se estudiaron las amortizaciones con interés simple, tanto de renta variable como de renta fija con intereses sobre saldos insolutos. Ahora, trataremos las amortizaciones pero con interés compuesto, que también pueden ser de renta fija o variable; pero antes es necesario recordar conceptos que se vieron en aquella sección.

6.1 Definiciones y sistemas de amortización

Amortizar una deuda es liquidarla mediante pagos periódicos que incluyen intereses.

El capital que se debe al hacer un pago cualquiera se conoce como *capital vivo de la deuda*, *deuda viva* o más comúnmente como *saldo insoluto*. Se trata digamos, de un saldo no saldado.

La diferencia entre la deuda original y el saldo insoluto corresponde a los *derechos adquiridos* por el deudor; es la parte o porción del bien que se está amortizando, y que ya es propiedad del deudor.

También es cierto que cada abono que se hace para cancelar la deuda, se separa o se divide en 2 partes: la primera para cubrir los intereses que se generan en el periodo; y la segunda, llamada *amortización* es la que se abona al capital que se adeuda, haciendo que disminuya con cada pago:

$$\text{Abono} = \text{Amortización} + \text{Intereses}$$

Cabe señalar que para crear sistemas o formas para amortizar una deuda, no hay más límite que la propia creatividad de quienes a esto se dedican, a prestar su dinero; sin embargo, aquí abordaremos las más comunes, con algunas de sus ventajas o desventajas, y sus características.

Amortización gradual

Los pagos en este sistema son todos iguales y puesto que el saldo insoluto disminuye con cada abono, los intereses se reducen y la amortización se incrementa, es decir, que en cada pago es mayor que la del pago anterior. Constituye una interesante aplicación de las anualidades ordinarias y por ello se simplifican los cálculos; pero tiene la desventaja de que los pagos deben ser mayores que los intereses del primer periodo, porque de otra manera nunca se cancelaría totalmente la deuda.

Amortización constante

A diferencia del sistema anterior, aquí la porción que se abona al capital, es decir, la amortización, es siempre la misma, lo cual da lugar a que cada pago sea menor que el anterior, y esto puede ser un atractivo para el deudor. Además, es muy fácil calcular el saldo insoluto en cualquier momento, lo cual, como se dijo antes, se necesita para cancelar o refinanciar el capital que se debe.

Amortización con renta variable

Aquí cada abono y su correspondiente porción amortizadora crecen con el tiempo, y esto lo hace atractivo para el deudor, ya que los primeros pagos pueden ser tan pequeños que ni siquiera cubran los intereses del periodo, dando lugar a que la deuda crezca en vez de reducirse. Tiene la desventaja de generar más intereses que otros sistemas, además de que las fórmulas son un tanto más complicadas. No obstante, como se verá en los ejemplos esta dificultad es sólo aparente. Puede suceder que las rentas se reduzcan sucesivamente.

Los pagos pueden variar uno por uno o en grupos, y hacerlo en forma aritmética o geométrica.

6.2 Amortización gradual

Como ya se mencionó, este sistema es una aplicación de las anualidades ordinarias y, por lo tanto, se emplea la ecuación del teorema 5.2

$$C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

donde C es la deuda original, R es el abono periódico, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año, y np es el número de rentas.

Ejemplo 1

Para completar la colegiatura cuatrimestral de su hijo, el señor Gutiérrez consigue un préstamo de $195,000 con intereses del 13.92% anual capitalizable por quincenas. ¿Cuántos pagos quincenales de $22,300 debe hacer para amortizar su adeudo?

solución

La incógnita es el número de abonos, $np = x$.

El capital, es decir, el préstamo es $C = 195{,}000$.

La renta quincenal es $R = 22{,}300$.

La frecuencia de conversión y de pagos es $p = 24$, éstos son quincenales y la tasa de interés quincenal, compuesta por quincenas, es:

$$i/p = 0.1392/24 \quad \text{o bien,} \quad i/p = 0.0058$$

Por lo tanto, al reemplazar estos valores en la ecuación 5.2 quedará:

$$195{,}000 = 22{,}300\left(\frac{1-(1+0.0058)^{-x}}{0.0058}\right)$$

de donde:

$$\frac{195{,}000(0.0058)}{22{,}300} - 1 = -(1.0058)^{-x}$$

o bien,
$$(1.0058)^{-x} = 0.949282511$$

Se toma logaritmo natural, o común, a ambos lados:

$$\ln(1.0058)^{-x} = \ln(0.949282511)$$
$$(-x)\ln(1.0058) = \ln(0.949282511) \quad \ln(M^x) = (x)\ln(M)$$
$$-x = \ln(0.949282511)/\ln(1.0058)$$
$$-x = -8.999935727$$

o bien,
$$x = 9, \text{ porque debe ser entero.}$$

Al redondear, la renta se reduce un poco quedando 9 pagos de $22,299.84 cada uno. ¿Por qué?

Renta mínima

Ejemplo 2

¿Cuántos pagos de $1,100 se necesitarán para amortizar el préstamo del ejemplo 1?

solución

Al sustituir en la misma fórmula 5.2 resulta:

$$195{,}000 = 1{,}100\ \frac{1-(1.0058)^{-x}}{0.0058}$$

de donde, con pasos semejantes a los del ejemplo 1, se obtiene:

$$-(1.0058)^{-x} = \frac{195{,}000(0.0058)}{1{,}100} - 1$$

o bien, $$-(1.0058)^{-x} = 0.028181818$$

Pero esta ecuación no tiene solución, porque el miembro izquierdo tiene signo contrario al derecho. ¿Qué significa dicho resultado?

Significa que al efectuar el primer abono mensual, los intereses del periodo son $I = 195{,}000(0.0058)$ o $I = \$1{,}131$, lo cual quiere decir que con $1,100 del supuesto pago no se cubren ni los intereses y tales pagos deberán ser mayores a los $1,131, teniendo presente, claro, que cuanto más grandes sean, más pronto se amortizará el adeudo. Esto quiere decir que con $1,100 nunca se amortiza la deuda.

Ejemplo 3

¿Durante 5 años, cuál es el precio de un terreno que se amortiza con 60 rentas mensuales de $9,750 cada una, con cargos del 14.5% efectivo, suponiendo que se adquirió con un 25% de enganche?

solución

En este caso C es la incógnita; $np = 60$, el número de rentas; $p = 12$; los pagos son mensuales; el año tiene 12 meses; la renta es $R = \$9{,}750$; y la tasa nominal mensual equivalente al 14.5% efectivo es i de la igualdad siguiente:

$$(1 + i/12)^{12} = 1.145$$

de donde:

$$1 + i/12 = \sqrt[12]{1.145}$$

o bien, $$1 + i/12 = 1.011347621$$

Por lo tanto,

$$C = 9{,}750\left(\frac{1-(1.011347621)^{-60}}{0.011347621}\right)$$

$$C = 9{,}750(43.3458832)$$

o bien, $C = \$422{,}622.3612$

El crédito es el 75% del precio, es decir,

$$(0.75)\text{precio} = 422{,}622.3612$$

de donde:

$$\text{precio} = 422{,}622.3612/0.75 \text{ o bien, } \$563{,}496.48$$

Ejemplo 4

Por el Tratado de Libre Comercio de América del Norte, un empresario tiene las siguientes opciones para comprar maquinaria para su fábrica textil. Despreciando los costos por transporte y otros, decida cuál le conviene más, suponiendo que las 3 le ofrecen la misma calidad e igual factibilidad.

a) En Canadá puede conseguir la maquinaria sin enganche, con 15 pagos mensuales vencidos de 21,750 dólares canadienses y una tasa de interés del 13.2% capitalizable por meses.

b) En Estados Unidos le ofrecen la maquinaria con un anticipo de US$28,500 y 10 abonos bimestrales vencidos iguales al anticipo y cargos del 15% de interés anual compuesto por bimestres.

c) En México puede adquirir la maquinaria al contado a un precio de $3’595,000.

Evalúe considerando las siguientes condiciones.

i. La paridad con el dólar canadiense es de 11.9863 pesos mexicanos por cada dólar y con el estadounidense es de 12.951 pesos mexicanos por dólar.

ii. La compra se hace 5 meses después de que el tipo de cambio estuvo como en el caso **i.**, la unidad monetaria canadiense aumenta su valor en 0.2% cada mes, mientras que la estadounidense crece 0.04 centavos mexicanos por día. En México el precio se incrementa 0.56% en los 5 meses.

iii. La paridad es la actual, la del momento en el que se resuelve este ejercicio, investíguela, por favor.

solución

Es necesario obtener el valor presente del precio de la maquinaria en las 3 opciones.

a) El valor actual en este primer caso, se encuentra al reemplazar en la ecuación 5.2 para anualidades vencidas los números siguientes:

$R = 21{,}750$, el abono mensual

$i = 0.132$, la tasa de interés anual capitalizable por meses

$p = 12$, los pagos son mensuales, y

$np = 15$, el número de pagos

$$C = 21{,}750\left(\frac{1-(1+0.132/12)^{-15}}{0.132/12}\right)$$

$$C = 21{,}750(13.75837135) \text{ o bien,}$$

$$C = \$299{,}244.58 \text{ dólares canadienses}$$

b) Al comprar las máquinas en Estados Unidos, el precio actualizado es igual a la suma del enganche y el valor presente de los 10 pagos bimestrales, que se obtiene sustituyendo también en la ecuación 5.2 los valores de:

$R = 28{,}500$, la renta por bimestre

$p = 6$, el número de bimestres por año

$i = 0.15$, la tasa de interés anual capitalizable por bimestres

$np = 10$, el número de rentas, e

$i/p = 0.15/6 = 0.025$, la tasa de interés por bimestre

Por lo tanto:

$$C_1 = 28{,}500\left(\frac{1-(1+0.025)^{-10}}{0.025}\right)$$

$$C_1 = 28{,}500(8.752063932)$$

$$C_1 = 249{,}433.82$$

El precio actualizado al día de la compra es entonces:

$$C = 28{,}500 + 249{,}433.82$$

$$C = \text{US}\$277{,}933.82$$

ya que el anticipo fue de US$28,500.

Solución alterna

Otra manera de obtener este resultado consiste en utilizar la ecuación 5.3, para el valor presente de una anualidad anticipada y 11 rentas de $28,500 cada una.

$$C = 28,500(1+0.15/6)\left(\frac{1-(1.025)^{-11}}{0.025}\right) \qquad C = R(1i/p)\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C = 28{,}500(1.025)(9.514208712) \text{ o bien } C = \$277{,}933.82$$

i. En moneda nacional, con las paridades dadas, quedará:

$C_1 = 299{,}244.58(11.9863)$

o bien, $C_1 = \$3'586{,}835.31$ comprándola en Canadá

$C_2 = 277{,}933.82(12.9515)$

o bien, $C_2 = \$3'599{,}659.90$ si la compra en Estados Unidos.

De contado se compra en \$3’595,000.00. Por ello la opción más conveniente es la menor, que en este caso es la primera, por lo que la maquinaria se tendría que comprar en Canadá.

ii. Si la compra se realiza 5 meses después, el tipo de cambio de la moneda y el precio actualizado en cada opción será:

Con la moneda canadiense, el tipo de cambio es:

$$p = 11.9863(1.002)^5$$
$$p = 12.10664341$$

y el precio es:

$$299{,}244.58(12.10664341) = \$3'622{,}847.42$$

Puesto que la divisa estadounidense aumenta 0.04 centavos por día, en un mes aumenta 0.04(30) o 1.2 centavos, o 0.012 pesos, y en 5 meses la paridad es:

$$p = 12.9515 + 5(0.012)$$
$$p = 12.9515 + 0.06$$
$$p = 13.0115$$

El precio, en este caso, es:

$$277{,}933.82(13.0115) = \$3'616{,}335.93$$

El precio en México creció un 0.056%; esto es,

$$3'595{,}000.00 + 3'595{,}000(0.0056) = \$3'615{,}132.00$$

Por lo tanto, la opción más conveniente para el empresario es comprar la maquinaria en México, por ser la del menor precio actualizado, en estas condiciones.

iii. Evalúe el mismo ejercicio con el tipo de cambio al día en que resuelve el problema.

Ejercicios 6.2

Se recomienda repasar la sección 5.3.

1. ¿Qué es *amortizar* una deuda?
2. ¿Cuál es la característica de la amortización *gradual?*
3. ¿En qué consiste la amortización *constante?*
4. Explique brevemente la amortización de *renta variable.*
5. ¿Existe alguna diferencia entre *abono* y *amortización?* ¿Cuál?

6. Para ampliar sus instalaciones, una fábrica de dulces consigue un crédito que amortiza con 9 rentas mensuales de $17,250 con intereses del 14.24% nominal mensual. ¿Cuánto le prestaron?

***7.** ¿Cuántos pagos de $7,300 se necesitan para amortizar un crédito de $88,396.00 con cargos o intereses del 12.36% anual capitalizable por meses?

8. Muebles tubulares logra un crédito por $165,000 con cargos del 17.4% nominal quincenal. ¿De qué cantidad es cada uno de los 8 abonos quincenales que lo amortizan?

9. Resuelva el problema 8 considerando 6 abonos y el primero a 3 meses después de la operación crediticia.

***10.** Juan compra un automóvil con un enganche de $65,000 y el 75% restante con un pago a los 8 meses de la compra con intereses del 16% efectivo. Tres meses antes de este desembolso decide abonar $27,200 cada mes durante 6 meses y un pago mayor al final. ¿De qué tamaño es éste?

***11.** ¿Cuál es el costo o beneficio para Juan, del problema 10, por haber cambiado el plan de pagos?

***12.** Una conocida cadena de tiendas de abarrotes ofrece un crédito a quienes quieran administrar una de sus tiendas, pagando $70,000 cada bimestre durante un año y 8 meses, haciendo el primero 5 meses después de firmar un contrato. ¿Por qué cantidad es el crédito si manejan intereses del 15.6% nominal bimestral?

13. ¿Cuál es el precio de un paquete todo incluido que la cadena hotelera Vallartense está ofreciendo con intereses del 13.8% y 5 mensualidades de $2,725.00 cada una?

En los problemas 14 a 19 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

14. Quince mensualidades de $9,020.61 amortizan un crédito de $125,800.00 cuando los intereses son del 11.1% nominal mensual. __________

15. Con intereses del 13.2% nominal quincenal y 9 abonos quincenales de $25,300 se amortiza el 60% del precio de una camioneta, entonces su precio es de $369,270.80. __________

16. La Asociación de Ingenieros Civiles financia la construcción de un tramo de carretera aportando $3,750 millones recuperables en 4 años con rentas cuatrimestrales de $449,744.30 cada una, con intereses del 18.3% anual capitalizable por cuatrimestres. __________

17. Se necesitan 17 mensualidades de $23,251.15 para amortizar un crédito de $338,400 con intereses del 21.4% nominal mensual. __________

18. El pago quincenal para amortizar un préstamo de $45,000 con intereses del 19% efectivo debe ser mayor a $327.35. __________

19. La Mueblería del Centro ofrece un comedor con abonos mensuales de $1,150 durante 10 meses haciendo el primero a 5 meses de la compra con intereses del 23.10% anual capitalizable por meses, entonces el precio de contado es de $9,609.09. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

Seleccione la opción correcta en los problemas 20 a 30 justificándola.

***20.** La Asociación de Futbolistas Profesionales, con 75 socios, constituyen un fideicomiso aportando $20,000 mensuales cada uno durante 8 meses. ¿De cuánto dinero pueden disponer cada bimestre durante 5 años, si les pagan intereses del 9.2% nominal mensual? Suponga que la primera se realiza 3 años después de la última aportación mensual.

a) $669,182.58 *b*) $725,063.91 *c*) $685,429.63 *d*) $715,927.80 *e*) Otra

***21.** El 48% de una hipoteca se amortiza con 12 abonos bimestrales de $35,000 y el resto con 36 mensuales después de los primeros. ¿De qué tamaño son éstos si se cargan intereses del 15.3% nominal bimestral?

a) $22,055.09 *b*) $18,236.49 *c*) $21,325.75 *d*) $19,429.61 *e*) Otra

22. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 21?

a) $329,482.51 *b*) $386,091.35 *c*) $348,923.08 *d*) $330,811.00 *e*) Otra

23. ¿Cuántos pagos bimestrales de $145,000 se deben efectuar para amortizar un crédito para maquinaria agrícola por $1'706,223.00 considerando intereses del 19.2% nominal bimestral?

a) 14 *b*) 16 *c*) 13 *d*) 15 *e*) Otra

***24.** Suponiendo que el dinero reditúa el 6.9% nominal mensual, determine qué conviene más al licenciado Sánchez al vender su automóvil.

a) El doctor Barajas le da $110,000 de enganche y 7 mensualidades de $15,000 cada una.

b) Claudia le da 10 pagos quincenales de $21,800 cada uno.

c) Un amigo le da $55,000 en la compraventa y 2 abonos trimestrales de $80,000 y $85,000 respectivamente.

d) Otro le ofrece $215,000 de contado.

e) Ignacio le pagaría $3,850 al final de cada semana durante 9 meses y un enganche de $68,750.

25. Para construir y equipar un nuevo gimnasio la cadena Todos por la Salud consigue un crédito por $4.5 millones con interés del 14% nominal trimestral, lo amortiza con 10 abonos trimestrales de $425,000 cada uno, y al final de los 11 trimestres uno de mayor cuantía. ¿De cuánto es éste?

a) $1'409,517.16 *b*) $1'513,621.32 *c*) $1'383,421.65 *d*) $1'298,315.08 *e*) Otra

26. En el problema 25, ¿de qué tamaño será cada pago si los 11 fueran iguales?

a) $492,294.33 *b*) $506,721.65 *c*) $485,923.67 *d*) $499,913.85 *e*) Otra

***27.** ¿Cuál es el precio de contado de un automóvil que se amortiza con un pago de $70,000 el día de la compraventa, $45,000 3 meses después y 12 abonos semanales de $7,650, haciendo el primero 18 semanas después de que se compró? Considere intereses del 21.5% nominal semanal.

a) $197,623.48 *b*) $195,974.99 *c*) $198,729.32 *d*) $205,725.09 *e*) Otra

28. En el problema 27, ¿cuál es el costo, es decir, los intereses por no pagar de contado el automóvil?

a) $10,993.85 *b*) $10,825.01 *c*) $11,321.65 *d*) $13,421.95 *e*) Otra

29. ¿De cuánto debe ser el pago mínimo semanal para amortizar un crédito de $37,500 con intereses del 13.52% anual capitalizable por semanas?

a) $107.75 *b*) $97.50 *c*) $102.25 *d*) $110.09 *e*) Otra

30. ¿De qué tamaño son los 35 pagos quincenales que amortizan un crédito de $140,000? Considere intereses del 19.6% nominal quincenal.

a) $4,325.08 *b*) $4,615.06 *c*) $4,508.29 *d*) $4,205.50 *e*) Otra

6.3 Saldo insoluto, derechos transferidos y cuadros de amortización

Cuando una persona compra un terreno, por ejemplo, y lo amortiza con un plan determinado, cada vez que realiza un pago, al mismo tiempo que el propietario está cediendo los derechos de su propiedad, el comprador los está adquiriendo, hasta que logra ser el dueño del valor total. Así, en cualquier momento, el terreno o su valor se distribuyen en dos partes: el **saldo insoluto**, lo que todavía pertenece al vendedor; y los *derechos adquiridos* por el comprador, es decir que:

VALOR DEL BIEN = SALDO INSOLUTO + DERECHOS ADQUIRIDOS

Para apreciar mejor este proceso de cesión de derechos, se elabora un *cuadro de amortización*, como se aprecia en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Cuadro de amortización de un crédito vacacional

Para vacacionar con su familia, el señor Velasco consigue un crédito por $35,000 a pagar en 8 mensualidades con una tasa de interés del 12.60% anual capitalizable por meses. Elabore un cuadro de amortización.

solución

Es necesario hallar primero la renta mensual con la ecuación 5.2:

$$35{,}000 = R\left(\frac{1-(1+0.126/12)^{-8}}{0.0105}\right) \qquad C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$35{,}000 = R(7.6348574)$$

de donde:

$$R = 35{,}000/7.6348574$$

o bien, $R = \$4{,}584.23755$ la renta mensual.

Al final del primer mes, puesto que el saldo insoluto es el valor de la deuda, los intereses son:

$$I = 35{,}000(0.0105)$$

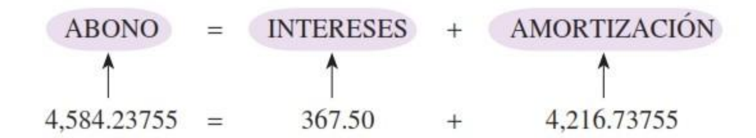
o bien, $I = \$367.50$

La diferencia con la renta mensual es lo que se abona a la deuda, y es igual a la amortización primera.

$$A_1 = 4{,}584.23755 - 367.50$$

o bien, $A_1 = 4{,}216.73755$

es decir,



El saldo insoluto luego del primer abono es, entonces:

$$S_1 = 35{,}000 - 4{,}216.73755$$

o bien, $S_1 = 30{,}783.26245$

Y los intereses para el segundo pago se evalúan con base a este saldo:

$$I_2 = 30{,}783.26245(0.0105)$$

o bien, $I_2 = \$323.22426$

Entonces, la segunda amortización es:

$$A_2 = 4{,}584.23755 - 323.22426$$

o bien, $A_2 = 4{,}261.01329$

y el saldo insoluto, luego del segundo abono es, por lo tanto:

$$S_2 = 30{,}783.26245 - 4{,}261.01329$$

o bien, $S_2 = 26{,}522.24916$

Se continúa con este proceso hasta el último periodo mensual, y con estos valores y los que se obtengan se construye el siguiente cuadro. Se han mantenido 5 cifras decimales sólo para mayor precisión en el saldo final.

Cuadro de amortización

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	35,000.00000
1	4,584.23755	367.50000	4,216.73755	30,783.26245
2	4,584.23755	323.22426	4,261.01329	26,522.24916
3	4,584.23755	278.48362	4,305.75393	22,216.49523
4	4,584.23755	233.27320	4,350.96435	17,865.53088
5	4,584.23755	187.58807	4,396.64948	13,468.88140
6	4,584.23755	141.42325	4,442.81429	9,026.06711
7	4,584.23755	94.77370	4,489.46385	4,536.60326
8	4,584.23755	47.63433	4,536.60321	0.000044*

*La diferencia con 0 se debe al redondeo y es insignificante.

Note que al sumar los números en la columna de intereses resulta $1,673.90 redondeando, que es igual al total que se paga por intereses en el crédito vacacional, es decir, que esta suma es aproximadamente igual a:

$$I = 4{,}584.23755(8) - 35{,}000.00 \qquad I = M - C$$
$$I = 36{,}673.90041 - 35{,}000.00 \quad \text{o bien,} \quad I = 1{,}673.90$$

También es cierto que la suma de las 8 amortizaciones, en la tercera columna, es igual a los 35,000 del crédito.

Para hacer este cuadro se aprecia que:

En la primera columna se incluye el periodo cero para anotar el valor del crédito en la última columna.

En la segunda se escribe la renta constante en todas las filas y en la tercera están los intereses de cada periodo, que como se dijo, se evalúan multiplicando el saldo insoluto anterior, multiplicado por la tasa de interés por periodo mensual, 0.0105, en este caso.

La amortización en la cuarta columna se obtiene, se dijo, restando de la renta mensual constante, los intereses del periodo y finalmente el saldo insoluto en cualquier fila es igual a la diferencia entre el saldo insoluto anterior y la amortización en ese renglón.

Además es claro que cuando el número de rentas es relativamente grande, se puede usar Excel, por ejemplo, para realizar este cuadro; sin embargo, en el ejemplo siguiente se explica cómo llenarlo en sus primeras y últimas filas.

Ejemplo 2

Cuadro de amortización, derechos transferidos, saldo insoluto

Haga el cuadro de amortización en sus primeros 3 renglones y el último. De un crédito automotriz que se cancela con 36 mensualidades de $5,750, a una tasa de interés del 25.20% anual capitalizable por meses, ¿cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 15? ¿Cuál es el porcentaje de los derechos transferidos al deudor en ese momento?

solución

Con la ecuación 5.2 se obtiene el valor presente del crédito:

$$C = 5{,}750\left(\frac{1 - (1 + 0.252/12)^{-36}}{0.252/12}\right)$$

$$C = 5{,}750(25.08423298)$$

$$C = \$144{,}234.3396$$

a) Con este resultado como primer saldo insoluto y la renta mensual en todas las filas de la segunda columna se comienza el cuadro de amortización.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	$144,234.3396
1	$5,750.00	$3,028.9211	$2,721.0789	$141,513.2607
2	$5,750.00	$2,971.7785	$2,778.2215	$138,735.0392
3	$5,750.00	$2,913.4358	$2,836.5642	$135,898.4750
...				
35				X
36	$5,750.00	(0.021)X	X	0

Para el último renglón de esta tabla, se procede de manera inversa a como se ha iniciado, anotando la renta fija en la segunda columna y un cero en la última, dado que el último saldo es nulo. El penúltimo saldo insoluto debe ser igual a la última amortización y se denota por x. En la tercera columna están los intereses del periodo que deben ser igual a

$$(0.252/12)x = (0.021)x$$

La suma de los intereses y la amortización en cualquier periodo debe ser igual a la renta, esto es:

$$(0.021)x + x = \$5{,}750$$

de donde, al sumar los términos semejantes y despejar, queda que la amortización última x es:

$$(1.021)x = 5{,}750$$

$$x = 5{,}750/1.021 \text{ o bien, } x = 5{,}631.733594$$

y los intereses del último saldo son:

$$I_{36} = 5{,}631.733594(0.021)$$
$$I_{36} = \$118.2664$$

Con esto se completa el último renglón de la tabla.

Se recomienda que el estudiante concluya la tabla para corroborar estos valores.

b) Para el saldo insoluto, luego de hacer el abono 15 se obtiene el valor actual de los 21 restantes.

$$C = 5{,}750\left(\frac{1 - (1 + 0.252/12)^{-21}}{0.252/12}\right)$$
$$C = 5{,}750(16.84106703)$$
$$C = \$96{,}836.14$$

Solución alterna

Otra manera de obtener este saldo insoluto consiste en hallar el valor actual C, al iniciar el plazo de los 15 abonos que se han realizado, para restarlo de la deuda original y la diferencia llevarla hasta el final del periodo 15 con la fórmula del interés compuesto, es decir,

$$C = 5{,}750\left(\frac{1 - (1 + 0.252/12)^{-15}}{0.252/12}\right) \qquad C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$
$$C = 5{,}750(12.75365389)$$
$$C = 73{,}333.50987$$

La diferencia con la deuda original es:

$$D = 144{,}234.34 - 73{,}333.50987$$
$$D = 70{,}900.83013$$

y 15 periodos después, esto se convierte en:

$$M = 70{,}900.83013(1 + 0.252/12)^{15} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M = 70{,}900.83013(1.365796927)$$
$$M = 96{,}836.13591$$

o bien \$96,836.14 que es igual al anterior.

Por supuesto que resulta más práctico hallar este saldo con el primer método, evaluando el valor actual de los abonos que faltan por hacer, con la forma del teorema 5.2.

Note que se han mantenido varias cifras decimales, sólo para mayor precisión.

c) Los derechos transferidos al deudor son iguales a la diferencia entre este saldo y la deuda original.

$$144{,}234.34 - 96{,}836.14 = \$47{,}398.20$$

Y el porcentaje sobre la deuda es:

$$47{,}398.20/144{,}234.34 = 0.32861938$$

o bien, 32.86% aproximadamente.

Ejemplo 3

Saldo insoluto, cancelación de crédito

En el ejemplo 2, ¿cuál es el saldo insoluto luego de efectuar el pago número 23? ¿Y con cuánto se cancela el crédito automotriz al hacer el pago número 23?

solución

a) Luego de efectuar el vigésimo tercer abono restan 13, y el saldo insoluto es igual al valor presente de estas 13 rentas:

$$C = 5{,}750\left(\frac{1-(1+0.252/12)^{-13}}{0.021}\right) \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C = 5{,}750(11.27393171)$$

o bien, $C = \$64{,}825.11$

b) Al efectuar el pago vigésimo tercero la deuda se cancelará con la suma del saldo insoluto anterior y el propio pago. Es decir:

$$64{,}825.11 + 5{,}750.00 = \$70{,}575.11$$

Ejemplo 4

Saldo insoluto luego de la penúltima renta

Obtenga el saldo insoluto luego de hacer el pago quincenal número 25 si son 26 de US$3,128.00 cada uno y los intereses son del 23.5% efectivo.

solución

La tasa capitalizable por quincenas equivalente está en la igualdad:

$$(1 + i/24)^{24} = 1 + 0.235 \text{ de donde } 1 + i/24 = \sqrt[24]{1.235} = 1.00883341$$

El saldo insoluto es simplemente el valor actual una quincena antes del último pago. Se obtiene con la fórmula del interés compuesto.

$$\text{Saldo insoluto} = 3{,}128(1.00883341)^{-1}$$

$$= 3{,}100.611031 \text{ o bien, } \$3{,}100.61$$

Ejercicios 6.3

1. Defina y explique brevemente el concepto de *saldo insoluto.*
2. Explique la diferencia entre saldo insoluto y los derechos adquiridos por el deudor.
3. ¿Para qué son útiles el saldo insoluto y los derechos transferidos al deudor?
4. ¿Qué ventajas tienen y para qué se utilizan los cuadros de amortización?
5. ¿Cómo se calcula el saldo insoluto en la amortización gradual?
6. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 15 de un total de 36 mensuales de $3,450 cada uno, con intereses del 14.28% nominal mensual?

*7. Haga el cuadro para la amortización de un crédito que la Abarrotera González logró por $165,000, considerando 8 rentas quincenales y cargos del 17.4% nominal quincenal.

8. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 2 en el problema 7?
9. Martha Patricia consigue un crédito para ampliar su fábrica de globos y lo está amortizando con 15 abonos mensuales de $10,500 cada uno e intereses del 16.4% anual capitalizable por meses. ¿A cuánto ascienden los derechos transferidos por el acreedor luego de hacer el pago número 10?

*10. Haga el cuadro de amortización en sus primeras 3 y últimas 2 filas en el problema 9.

11. Un crédito hipotecario de $750,000 se amortiza con 48 rentas mensuales e intereses del 8.42% anual capitalizable por meses. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el vigésimo cuarto pago?
12. ¿Con cuánto dinero se cancela totalmente el crédito del problema 11 al efectuar el trigésimo pago?
13. En sus primeras 3 filas elabore el cuadro de amortización del crédito del problema 11.

Justificando su respuesta conteste verdadero o falso en los problemas 14 a 18.

14. El porcentaje del crédito transferido al deudor luego de hacer el pago 35 en el problema 11 es aproximadamente del 27%. __________

*15. El saldo insoluto luego de hacer cualquier abono en la amortización de un crédito es siempre mayor que los derechos transferidos al deudor. __________

16. Cuando se han realizado 25 abonos quincenales de $10,400 de un total de 28, en la amortización de un préstamo con intereses del 9.3% nominal quincenal el saldo insoluto es de $30,959.75. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

17. El saldo insoluto es igual a lo que el acreedor ha transferido al deudor en la amortización de crédito. __________

18. El penúltimo saldo insoluto en la amortización de un crédito es igual a la renta. _________

Seleccione la opción correcta en los problemas 19 a 30 justificando su elección.

19. ¿De qué cantidad es la amortización al hacer el vigésimo primer pago mensual en la amortización de un crédito automotriz de $180,000 con intereses del 21.3% nominal mensual? Suponga que son 36.

a) $5,287.43 *b*) $5,138.58 *c*) $5,429.31 *d*) $4,987.30 *e*) Otra

***20.** ¿Qué porcentaje de la deuda que se amortiza con 20 abonos bimestrales de $15,750 se ha transferido al deudor luego de hacer el sexto? Suponga cargos del 11.4% anual capitalizable por bimestres.

a) 26.1560124% *b*) 27.0932178% *c*) 27.832104% *d*) 26.930535% *e*) Otra

21. ¿Con cuánto dinero se liquida la deuda del problema 20 al efectuar el undécimo abono?

a) $144,920.95 *b*) $150,302.65 *c*) $148,797.03 *d*) $146,563.58 *e*) Otra

22. ¿De qué cantidad son los intereses en el abono quincenal número 23 de un total de 35 que amortizan un crédito de $87,250 con intereses del 17.6% anual capitalizable por quincenas?

a) $267.93 *b*) $318.09 *c*) $295.32 *d*) $256.94 *e*) Otra

***23.** ¿Con cuál pago de un total de 60 mensuales se ha amortizado aproximadamente el 56.74% de la deuda de $1.35 millones si los intereses son del 11.2% anual capitalizable por meses?

a) Trigésimo sexto *c*) Cuadragésimo *e*) Otra
b) Trigésimo octavo *d*) Trigésimo séptimo

24. ¿Con cuánto se cancela la deuda del problema 23 al hacer el trigésimo cuarto abono?

a) $710,008.31 *b*) $701,928.45 *c*) $695,783.08 *d*) $707,427.85 *e*) Otra

25. Es el saldo insoluto luego de efectuar el decimosexto abono de un total de 17 mensualidades de $7,850 con intereses del 16.3% nominal mensual.

a) $7,705.75 *b*) $7,774.80 *c*) $7,528.23 *d*) $7,608.92 *e*) Otra

26. Es el porcentaje de la deuda de $25,300 que ha transferido el acreedor luego de realizar el séptimo abono. Suponga cargos del 13.5% y que son 28 pagos quincenales.

a) 75.6875% *b*) 24.4538% *c*) 75.5462% *d*) 24.3125% *e*) Otra

***27.** Si el saldo insoluto luego de hacer el pago mensual número 20 es de $72,040.54 entonces el crédito fue por:

a) $239,317.81 *b*) $278,053.21 *c*) $245,542.24 *d*) $263,362.26 *e*) Otra

Suponga que en total son 27 y los intereses son del 18.9% nominal mensual.

***28.** ¿Cuántos abonos bimestrales de $15,240 se han realizado de un total de 18 si el saldo insoluto es de $148,139.72 y los intereses son del 20.4% nominal bimestral?

a) 5 *b*) 8 *c*) 7 *d*) 6 *e*) Otra

29. En el problema 28, ¿a cuánto ascienden los derechos adquiridos por el deudor en el momento dado?

a) $57,349.61 *b*) $58,923.31 *c*) $56,729.32 *d*) $54,547.60 *e*) Otra

30. Calcule los intereses en el problema 28.

a) $71,632.68 *b*) $70,049.32 *c*) $68,923.05 *d*) $66,309.85 *e*) Otra

6.4 Amortización constante

Puesto que la porción que amortiza el capital es igual para todos los pagos, se dijo que, cada uno es menor que el anterior y, como en los casos anteriores, con el primer ejemplo se deducen las fórmulas para este sistema de amortización.

Ejemplo 1

Reducción de fórmulas

Con el sistema de amortización constante, tasa de interés del 13.2% nominal mensual y plazo de 2 años, obtenga los primeros 2 pagos mensuales y el último para amortizar un crédito de $96,000.

solución

La parte que amortiza el capital en cada uno de los 24 pagos es:

$$A = 96{,}000/24$$

o bien, $$A = \$4{,}000$$

Los intereses que genera la deuda en el primer periodo son:

$$I_1 = 96{,}000(0.132/12) \qquad i = 0.132$$

$$I_1 = 96{,}000(0.011) \quad \text{o bien,} \quad I_1 = \$1{,}056$$

y el primer abono con intereses es:

$$R_1 = 4{,}000 + 1{,}056$$

o bien, $$R_1 = \$5{,}056$$

Los intereses del segundo periodo, puesto que el saldo insoluto es \$4,000 menos que el anterior, son:

$$I_2 = (96,000 - 4,000)(0.011)$$

o bien, $I_2 = \$1,012$

y porque la amortización es constante, la segunda renta es entonces:

$$R_2 = 4,000 + 1,012 \quad \text{o bien,} \quad R_2 = \$5,012$$

Puede continuarse de esta manera para los 22 pagos restantes, pero como el saldo insoluto al iniciar el último periodo es igual a la amortización, entonces la última renta es, en consecuencia:

$$R_{24} = 4,000 + 44 \qquad R_{24} = A + I_{24}$$

o bien, $R_{24} = \$4,044$

Ya que los intereses son $I_{24} = 4,000(0.011)$ o bien, $I_{24} = \$44$

Para generalizar, advierta lo siguiente que se resume en el teorema 6.1:

- La amortización en cada pago es $A = C/np$, donde C es la deuda, y np el número de rentas.
- Los intereses del primer periodo son $I_1 = C(i/p)$, donde i/p es la tasa de interés por periodo y C es la deuda original. La primera renta es, entonces:

$$R_1 = A + C(i/p) \qquad R_1 = A + I_1$$
$$R_1 = C/np + Cin/np \qquad C(i/p) = C(in/np) \quad \text{y} \quad A = C/np$$
$$R_1 = (C/np)(1 + ni) \qquad \text{se factoriza } C/np$$
$$R_1 = A(1 + ni) \qquad C/np = A$$

- La diferencia entre la primera y la segunda renta es igual a la diferencia entre los intereses porque la amortización es constante, además estos intereses son en general:

$$I_1 = C(i/p) \text{ e, } I_2 = (C - A)(i/p)$$

entonces,

$$I_2 - I_1 = (C - A)(i/p) - C(i/p)$$
$$I_2 - I_1 = C(i/p) - A(i/p) - C(i/p) \qquad (a - b)x = ax - bx$$

porque

es decir:

$$I_2 - I_1 = -A(i/p) \text{ se cancela } C(i/p)$$

Esta diferencia es negativa porque las rentas decrecen y además es igual a los intereses de la última renta con signo positivo, claro. En el ejemplo esta diferencia es:

$$d = -4,000(0.011) \text{ o bien, } d = -44$$

y también $I_{24} = 44$

- El segundo abono con intereses es $R_2 = R_1 - d$. El tercero es $R_3 = R_2 - d$ o bien, $R_3 = R_1 - 2d$. Todos forman una progresión aritmética y por eso el enésimo es:

$$R_N = R_1 + (N - 1)(-d) \qquad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Teorema 6.1

En la *amortización constante* de una deuda C, la primera renta es:

$$R_1 = A[1 + (np)(i/p)] \qquad \text{y la enésima es}$$
$$R_N = R_1 - (N - 1)d$$

donde:

$A = C/np$ es la amortización constante

$d = A(i/p)$ es la diferencia entre 2 rentas sucesivas, que decrecen aritméticamente, y como antes:

n es el plazo en años

np es el número de rentas

i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.

Ejemplo 2



Valor presente, cancelación anticipada de un crédito y cuadro de amortización

El Hospital Regional del Norte renueva sus aparatos de radiología con un anticipo del 33%, y el resto a pagar en 2 años con amortización constante y pagos trimestrales. El primero de éstos es por US$24,335. Suponiendo que la tasa de interés es del 9.64% anual convertible por trimestres, obtenga:

a) El precio de contado del nuevo equipo.
b) El capital con el que se cancela la deuda al hacer el quinto pago.
c) El cuadro de amortización.

solución

a) Para el precio de contado, en la primera ecuación del teorema 6.1 se reemplazan:

R_1 por 24,335, la primera renta
p por 4, el número de trimestres por año
n por 2, el plazo en años
np por 8, el número de rentas
i por 0.0964, la tasa de interés anual.

Entonces:

$$24{,}335 = (C/8)[1 + 2(0.0964)] \qquad R_1 = A(1 + ni)$$
$$24{,}335 = (C/8)(1.1928)$$

de donde el crédito es:

$$C = 24{,}335/0.1491 \quad \text{o bien,} \quad C = \$163{,}212.609$$

que corresponde al 67% del precio, y por eso:

$$\text{Precio} = 163{,}212.609/0.67$$

o bien, US$243,600.909

b) El valor presente de los 3 pagos que restan luego de hacer el quinto es igual al saldo insoluto, la suma de las 3 amortizaciones, cada una de las cuales es:

$$A = 163{,}212.609/8 \text{ o bien, } A = 20{,}401.58$$

Entonces:

$$\text{saldo} = 3(20{,}401.58) \quad \text{o bien,} \quad \$61{,}204.74$$

Note que éste no incluye intereses.

El quinto pago, que debe sumarse a este saldo es:

$$R_5 = 24{,}335 - (5-1)(491.68) \qquad R_5 = R_1 - (N-1)\,d$$

o bien, $R_5 = \$22{,}368.28$

ya que la diferencia es $d = 20{,}401.58(0.0964/4) = 491.68 \qquad d = A(i/p)$

Entonces, al hacer el quinto pago, la deuda se cancelará con:

$$61{,}204.74 + 22{,}368.28 = \text{US}\$83{,}573.02$$

Observe que de los últimos 3 pagos no se suman intereses, porque se están anticipando, mientras que el quinto sí los incluye.

c) El cuadro de amortización es el siguiente, que se inicia con el primer saldo insoluto; esto es, la deuda original en la última columna del periodo o renglón 0, la primera renta y los primeros intereses en el periodo 0 renglón 1, y la amortización constante en todos los renglones de la penúltima columna.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	163,212.609
1	24,335.000	3,933.424	20,401.576	142,811.033
2	23,843.322	3,441.746	20,401.576	122,409.457
3	23,351.644	2,950.068	20,401.576	102,007.881
4	22,859.966	2,458.390	20,401.576	81,606.305
5	22,368.288	1,966.712	20,401.576	61,204.729
6	21,876.610	1,475.034	20,401.576	40,803.153
7	21,384.932	983.356	20,401.576	20,401.577
8	20,893.254	491.678	20,401.576	0.001

Note que:

Para continuar este cuadro:

- El saldo anterior a cualquier periodo K se obtiene restando de la deuda original, $(K - 1)$ veces la amortización constante. Por ejemplo, para el cuarto periodo el saldo anterior que se necesita para los intereses del siguiente es:

$$S_{4-1} = 163{,}212.609 - (4 - 1)(20{,}401.576)$$
$$S_3 = 163{,}212.609 - 61{,}204.728$$

o bien, $$S_3 = 102{,}007.881$$

- Para los intereses de cualquier periodo, el saldo inmediato anterior se multiplica por la tasa de interés por periodo; por ejemplo, para los del cuarto se tiene:

$$I_4 = 102{,}007.881(0.0964/4)$$
$$I_4 = 102{,}007.881(0.0241)$$

o bien, $$I_4 = \$2{,}458.39$$

que se anotan en la tercera columna del cuadro y se suman con la amortización constante para obtener la cuarta renta

$$R_4 = 20{,}401.576 + 2{,}458.390$$

o bien, $$R_4 = \$22{,}859.966$$

- La diferencia entre 2 abonos sucesivos es siempre igual a los intereses del último periodo. Así por ejemplo, 24,355.00 – 23,843.322 = 491.678, como se aprecia en el cuadro.

- El último pago es por lo tanto:

$$R_u = A + A(i/p) \qquad R_u = A + I, \qquad I = d$$
$$R_u = A(1 + i/p)$$

Intereses en la amortización constante

En este sistema de amortización, el cargo total por concepto de intereses se obtiene sumando los valores de la tercera columna del cuadro de amortización; pero también con la fórmula 2.2 para la suma de los términos de una progresión aritmética, tal como se ve en el siguiente desarrollo.

El primer término de la sucesión es igual a los intereses del primer periodo:

$$I_1 = C(i/p) \qquad I_1 = a_1$$

El último es:

$$I_{np} = A(i/p) \qquad I_{np} = a_m$$
$$I_{np} = (C/np)(i/p) \qquad A = C/np$$

o bien, $$I_{np} = Ci/(np)p$$

y la suma es entonces:

$$I = (np/2)[Ci/p + Ci/(np)p] \qquad S_m = (m/2)(a_1 + a_m)$$
$$I = (np/2)[Cinp/pnp + Ci/npp] \qquad a/b = ac/bc$$

Si se factoriza Ci/npp dentro de los corchetes y se cancela np, se obtiene la fórmula del siguiente.

Teorema 6.2

El cargo total por concepto de intereses en la amortización constante de un crédito está dado por:

$$I = (Ci/2p)(np + 1)$$

donde las literales tienen el significado de antes. (Véase el teorema 6.1, por ejemplo).

Ejemplo 3

Halle los intereses que le cargan al hospital del ejemplo 2, con la ecuación del teorema 6.2.

solución

Los valores a sustituir son:

$C = 163{,}212.609$, el crédito
$i = 0.0964$, la tasa de interés anual
$p = 4$, la frecuencia de conversión y de pagos y
$n = 2$, el plazo en años, entonces:

$$I = [163{,}212.609(0.0964)/8](8 + 1)$$
$$I = (1{,}966.711939)(9)$$

o bien, $I = \$17{,}700.41$

Resultado que puede comprobarse sumando los números de la tercera columna del cuadro de amortización.

Ejercicios 6.4

1. ¿Cómo encuentra la diferencia entre 2 pagos sucesivos en la amortización constante?

2. ¿Será posible que los primeros abonos sean menores que los últimos en la amortización constante?

3. ¿Cómo obtiene el monto total que se paga cuando un crédito se amortiza de manera constante?

Considere amortización constante en todos los problemas.

***4.** Obtenga los primeros 5 abonos mensuales que amortizan un adeudo de $125,000 con intereses del 18.63% anual capitalizable por meses. Suponga que son 20.

5. El 83% del precio de un automóvil se amortiza con 24 abonos mensuales e intereses del 21.4% nominal mensual. Diga cuál es este precio si la primera renta es de $10,750.00.

6. Encuentre el total que se paga por intereses en el problema 5.

7. ¿Con cuántos pagos bimestrales que decrecen $135 cada bimestre se amortiza el precio de 3 mesas de billar $150,000.00 si se cargan intereses del 13.5% nominal bimestral?

8. ¿Por qué cantidad fue un préstamo si el primer abono quincenal de un total de 23 es por $2,850 y los intereses que se cargan son del 18.6% nominal quincenal?

***9.** Haga el cuadro de amortización en el problema 8 en sus primeras filas y la última.

10. En el problema 8, ¿cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 15?

11. ¿Cuál es la tasa de interés capitalizable por quincenas con la que se amortiza en año y medio un crédito por $85,700 suponiendo que el último abono quincenal es por $2,392.46?

***12.** ¿De cuánto es la tercera renta trimestral si con 13 se amortiza un crédito para maquinaria de construcción por $1'350,600 con intereses del 16.28% anual capitalizable por trimestres?

13. ¿A cuánto ascienden los derechos transferidos al deudor en el problema 12, luego de efectuar el noveno abono?

Conteste falso o verdadero en los problemas 14 a 20 justificando su respuesta.

14. Con 13 rentas mensuales que decrecen $287.25 se amortiza un crédito automotriz de $210,380.28 cuando los intereses son del 21.3% nominal mensual. __________

15. Los derechos transferidos al deudor luego de hacer el decimosexto pago semanal de un total de 20 que amortizan un crédito por $60,000 con intereses del 13.52% nominal semanal son de $48,000. __________

16. Los 15 abonos bimestrales que amortizan un crédito de $1'350,000 con cargos del 13.8% nominal bimestral decrecen $2,070.00 sucesivamente. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***17.** Con $635,329.80 se cancela la deuda del problema 16 al efectuar el noveno abono.______

18. Un crédito de $93,250.00 se amortiza con 8 rentas mensuales con intereses del 15.3% anual capitalizable por meses cuando la primera es de $12,845.19.__________

19. El último abono trimestral de los 15 que amortizan un crédito de $2'750.000 con intereses del 9.6% nominal trimestral es de $184,800.00. __________

20. Un crédito de $24,675 se amortiza con 35 abonos semanales que decrecen $2.8905 cuando los intereses son del 21.32% nominal semanal. __________

En los problemas 21 a 31 seleccione la opción correcta justificando su elección.

21. ¿De cuánto fue la deuda que se amortiza con 18 mensualidades, considerando que la última es por $4,125 y los intereses son del 13.27% nominal mensual?

a) $73,437.90 *b*) $75,693.08 *c*) $71,961.71 *d*) $73,529.68 *e*) Otra

22. Son los intereses que se pagan en el problema 21.

a) $7,714.96 *b*) $7,529.61 *c*) $7,609.90 *d*) $7,492.29 *e*) Otra

***23.** ¿Cuántos abonos quincenales se requieren para amortizar un crédito de $123,230 suponiendo que el primero es de $7,125.04 y los intereses que se cargan son del 24.48% anual convertible cada quincena?

a) 22 *b*) 19 *c*) 20 *d*) 21 *e*) Otra

24. Encuentre los derechos cedidos por el acreedor luego de hacer el pago bimestral número 7 de un total de 15, suponiendo que la diferencia entre los sucesivos es de $1,377.00 y los intereses son del 16.2% nominal bimestral.

a) $459,000 *b*) $356,032.50 *c*) $410,656.32 *d*) $357,000 *e*) Otra

***25.** ¿Cuál es el cuadro de amortización de la deuda del problema 24 en sus primeras 3 filas.

Periodo		Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
a)	0	---	---	---	765,000
	1	71,655.00	20,655.00	51,000	714,000
	2	70,278.00	19,278.00	51,000	663,000
	⋮				
b)	0	---	---	----	705,000
	1	66,035.00	19,035.00	47,000	658,000
	2	64,766.00	17,766.00	47,000	611,000
	⋮				

c) 0	---	---	---	724,500
1	67,861.50	19,561.50	48,300	676,200
2	66,557.40	18,257.40	48,300	627,900
⋮				
d) 0	---	---	---	777,750
1	72,849.25	20,999.25	51,850	725,900
2	71,449.30	19,599.30	51,850	674,050
⋮				
e) Otra				

26. ¿De cuánto es el tercer abono mensual de los 25 que amortizan un crédito, suponiendo que se reducen $23.95 de manera sucesiva? Considere cargos del 20.5% nominal mensual.

a) $2,042.09 *b*) $1,823.51 *c*) $1,982.05 *d*) $1,952.80 *e*) Otra

***27.** Si los primeros 3 renglones del cuadro que corresponde a la amortización de un préstamo son:

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	---	---	---	630,000
1	128,934.00	38,934.00	90,000	540,000
2	123,372.00	33,372.00	90,000	450,000
⋮				

entonces el último abono es:

a) $95,129.00 *b*) $92,721.00 *c*) $93,928.61 *d*) $95,562.00 *e*) Otra

28. ¿Cuál es el primer abono semanal que amortiza un crédito por $83,200 con intereses del 7.25% nominal semanal, si el plazo es de 9 meses?

a) $2,249.33 *b*) $2,360.00 *c*) $2,159.66 *d*) $2,421.33 *e*) Otra

29. Los intereses en el problema 28 son:

a) $2,380.00 *b*) $2,540.00 *c*) $2,320.00 *d*) $2,430.00 *e*) Otra

***30.** ¿Por qué cantidad se otorgó un crédito si los intereses son $10,910.00, se amortiza con 10 rentas mensuales y la última es de $14,890.00?

a) $135,531.13 *b*) $146,916.36 *c*) $129,525.30 *d*) $142,098.07 *e*) Otra

31. Obtenga el saldo insoluto luego de efectuar el 60% de los pagos en el problema 30.

a) $58,623.27 *b*) $58,766.55 *c*) $57,093.05 *d*) $56,429.35 *e*) Otra

6.5 Amortización de renta variable

A diferencia de los sistemas anteriores, aquí tanto la renta como la amortización son variables, y la variación puede ser aritmética o geométrica y variar pago tras pago o en grupos de pagos.

A la sucesión de rentas que varían de forma aritmética se le llama gradiente uniforme, o *gradiente aritmético*; y a la diferencia entre 2 rentas sucesivas, *gradiente*, que se denota con d.

Las rentas que varían de forma geométrica se denominan *serie en escalera* o *serie gradiente*, y la razón entre 2 rentas sucesivas se llama *gradiente geométrico*.

Variación aritmética

Ejemplo 1

Deducción de fórmula

Obtenga las 5 rentas mensuales vencidas que amortizan un capital de $60,000 con intereses del 10.80% nominal mensual, suponiendo que cada una es $1,000 mayor que la anterior.

solución

Como se aprecia en la figura 6.1, de cada renta se obtiene su valor actual con la fórmula del interés compuesto. La suma de los 5 debe ser igual a los $60,000.

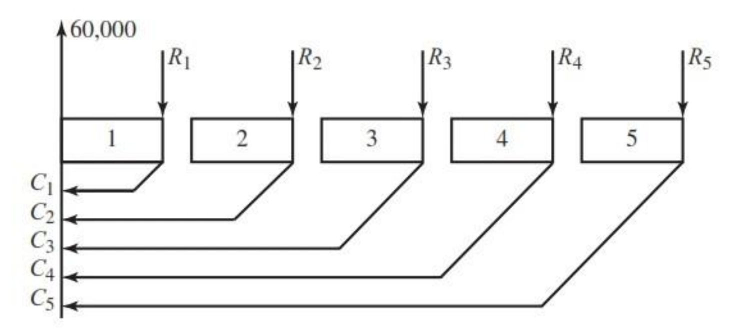


FIGURA 6.1

El plazo para el primero es un mes, para el segundo son 2 y para el último son 5 meses:

$$C_1 = R_1(1 + 0.1080/12)^{-1}$$
$$C_2 = R_2(1 + 0.009)^{-2}$$
$$C_3 = R_3(1.009)^{-3}$$
$$C_4 = R_4(1.009)^{-4}$$
$$C_4 = R_4(1.009)^{-5}$$

y puesto que cada uno es \$1,000 mayor que el anterior, estos 5 capitales se escriben como:

$$C_1 = R_1(1.009)^{-1} \quad \text{o} \quad C_1 = R_1(1.009)^{-1}$$
$$C_2 = (R_1 + d)(1.009)^{-2} \quad \text{o} \quad C_2 = R_1(1.009)^{-2} + d(1.009)^{-2} \qquad d = 1{,}000$$
$$C_3 = (R_1 + 2d)(1.009)^{-3} \quad \text{o} \quad C_3 = R_1(1.009)^{-3} + 2d(1.009)^{-3}$$
$$C_4 = (R_1 + 3d)(1.009)^{-4} \quad \text{o} \quad C_4 = R_1(1.009)^{-4} + 3d(1.009)^{-4}$$
y
$$C_5 = (R_1 + 4d)(1.009)^{-5} \quad \text{o} \quad C_5 = R_1(1.009)^{-5} + 4d(1.009)^{-5}$$

La suma S_1 de los primeros términos, los que están en el recuadro, sombreado, factorizando R_1 es:

$$S_1 = R_1[(1.009)^{-1} + (1.009)^{-2} + (1.009)^{-3} + (1.009)^{-4} + (1.009)^{-5}]$$

y la suma entre los corchetes es una serie geométrica con un primer término $a_1 = (1.009)^{-1}$, la razón común es también $r = (1.009)^{-1}$ y el número de términos es 5; entonces:

$$S_1 = R_1\left[(1.009)^{-1}\frac{1 - [(1.009)^{-1}]^5}{1 - (1.009)^{-1}}\right] \qquad S = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_1 = R_1\left[\frac{1}{1.009}\left(\frac{1-(1.009)^{-5}}{1-(1.009)^{-1}}\right)\right] \qquad a^{-1}b = \left(\frac{1}{a}\right)b$$

$$S_1 = R_1\left[\frac{1-(1.009)^{-5}}{1.009-1}\right] \text{ o bien, } S_1 = R_1\left[\frac{1-(1.009)^{-5}}{0.009}\right] \qquad aa^{-1} = 1$$

esto es,

$$S_1 = R_1(4.867784789)$$

Note que S_1 es el capital, es decir, el valor presente de una anualidad ordinaria de 5 rentas R_1, y por eso se puede escribir en general como:

$$S_1 = R_1\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

Por otro lado, la suma de los segundos términos, los que no están en el recuadro, forman una serie aritmético-geométrica cuya suma puede comprobarse, sin considerar la diferencia d, está dada por:

$$S = \frac{1-(1+ni)(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

donde el significado de todas las literales es el mismo de antes.
En este caso, tal suma es, entonces:

$$S = \frac{1-[1+(5/12)(0.108)](1+0.009)^{-5}}{(0.009)^2}$$

$$S = 0.000781516/0.000081 \quad \text{o bien,} \quad S = 9.648344444$$

y como la diferencia es $d = \$1{,}000$, al multiplicar queda que $S_2 = 9{,}648.34$ $\quad S_2 = 1{,}000(S)$
Consecuentemente, puesto que $C = S_1 + S_2$, se tiene:

$$60{,}000 = R_1(4.867784789) + 9{,}648.34$$

de donde:

$$R_1 = (60{,}000 - 9{,}648.34)/4.867784789$$

o bien, $R_1 = \$10{,}343.85$

Para las 4 rentas restantes se suman sucesivamente los $1,000. Se deja como un interesante ejercicio, hallar el valor presente de cada una para luego sumarlos y corroborar que suman $60,000.

Lo anterior se resume en el siguiente:

Teorema 6.3

Un crédito C al inicio del plazo se amortiza con np rentas vencidas, que varían aritméticamente según la ecuación

$$C = T(R_1) + V(d)$$

donde:

$$T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$V = \frac{1-(1+np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2} *$$

Además,

R_1 es la primera renta
d es el gradiente, la diferencia entre 2 pagos sucesivos
n es el plazo en años
p es la frecuencia de conversión y de pagos
i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.

Por supuesto que estas fórmulas son válidas para rentas que decrecen, es decir, para d negativa.

* Note que como $(np)(i/p)$ es igual a ni, el primer paréntesis se puede expresar como $(1 + ni)$, pero es más práctico dejarlo así para las operaciones.

Ejemplo 2

Haga el cuadro de amortización del crédito del ejemplo 1 y determine los intereses.

solución

a) Sirva este cuadro para comprobar las fórmulas. Se comienza escribiendo la primera renta en la segunda columna del renglón 1, y la deuda C en la última del renglón cero.

Los intereses del primer periodo son:

$$I_1 = 60{,}000(0.009) \qquad I = C(i/p)$$

o bien, $I_1 = \$540$ que se escribe en la fila 1 de la tercera columna.

La primera amortización es, por lo tanto:

$$A_1 = 10{,}343.85 - 540, \quad \text{o bien,} \quad A_1 = 9{,}803.85, \quad \text{ya que} \quad R = A + I$$

que se anota en la cuarta columna, la de amortizaciones.

Esta amortización se resta del saldo insoluto anterior para obtener el nuevo saldo, mismo que se multiplica por la tasa de interés, 0.009, que se resta de la renta R_2 y se logra la segunda amortización, continuando así hasta concluir el cuadro.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	60,000.00
1	10,343.85	540.00	9,803.85	50,196.15
2	11,343.85	451.76	10,892.08	39,304.07
3	12,343.85	353.74	11,990.11	27,313.95
4	13,343.85	245.83	13,098.02	14,215.93
5	14,343.85	127.94	14,215.91	0.02

b) Los intereses se obtienen sumando los valores de la tercera columna, pero cuando no se tiene el cuadro o no se tiene completo, basta con encontrar el total pagado, para luego restar el crédito. El total que se paga es una serie aritmética con $a_1 = 10{,}343.85$, la primera renta en este ejemplo, y $d = 1{,}000$, la diferencia común, es

$$M = (5/2)[2(10{,}343.85) + 4(1{,}000)] \qquad S = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$M = \$61{,}719.25$$

entonces, $I = 61{,}719.25 - 60{,}000$

o bien, $I = \$1{,}719.25$

que se comprueba sumando la tercera columna.

Ejemplo 3

Valor presente, intereses, saldo insoluto

¿Por qué cantidad fue un crédito para maquinaria agrícola, si se amortizó con 15 rentas bimestrales a una tasa del 12.78% compuesto por bimestres? Suponga que la primera es por $50,000 y crecen sucesivamente $6,500. ¿Cuánto se paga por intereses? ¿Con cuánto se liquida la deuda al hacer el pago número 8?

solución

a) En las ecuaciones del teorema 6.3 se sustituyen R_1 por $50,000, d por $6,500, i por 0.1278, p por 6, puesto que son bimestrales, n por 15/6 = 2.5 años y np por 15, el número de rentas.

$$T = \frac{1-(1+0.1278/6)^{-15}}{0.0213} \quad \text{o bien,} \quad T = 12.72517236$$

$$V = \frac{1-(1+0.3195)(1+0.0213)^{-15}}{(0.0213)^2} \quad (np)(i/p) = 15(0.0213) = 0.3195$$

o bien, $V = 84.07816573$

Entonces, puesto que $C = T(R_1) + Vd$, queda:

$$C = 12.72517236(50{,}000) + 84.07816573(6{,}500)$$

o bien, $C = \$1'182{,}766.69$

b) Los intereses son la diferencia entre el total que se paga y el valor de la maquinaria, $I = M - C$.

El total que se paga es igual a la suma de las 15 rentas, que forman una serie aritmética con $a_1 = 50{,}000$, $d = 6{,}500$ y 15 términos,

$$M = (15/2)[2(50{,}000) + (14)6{,}500] \quad S = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$M = (15/2)(191{,}000)$$

o bien, $M = \$1'432{,}500$

Entonces, los intereses son:

$$I = 1'432{,}500.00 - 1'182{,}766.69 \quad \text{o bien,} \quad I = 249{,}733.31$$

c) Con las mismas ecuaciones, las del teorema 6.3, se obtiene el saldo insoluto luego de hacer el octavo pago. Para ello el número de rentas es $np = 7$, las que faltan, y la primera de esa serie es la novena del total; esto es:

$$R_9 = 50{,}000 + 8(6{,}500) \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$R_9 = \$102{,}000$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{1-(1.0213)^{-7}}{(0.0213)}$$

o bien, $T = 6.439771803$

$$V = \frac{1-(1+0.1491)(1.0213)^{-7}}{(0.0213)^2} \qquad (np)(i/p) = 7(0.0213) = 0.1491$$

o bien, $V = 18.77660936$

Entonces, el saldo insoluto es:

$$\text{Saldo} = (6.439771803)(102{,}000) + (18.77660936)(6{,}500)$$

o bien, $\text{Saldo} = \$778{,}904.68$

A éste hay que sumar la propia renta R_8 en la que hubo 7 incrementos desde la primera; es decir:

$$R_8 = 50{,}000 + 7(6{,}500)$$

o bien, $R_8 = \$95{,}500$

En consecuencia al efectuar el pago número 8 la deuda se liquida con:

$$778{,}904.68 + 95{,}500 = \$874{,}404.68$$

Note que cuando se ha realizado el 53.33% de los pagos, la deuda se ha amortizado únicamente en 34.1455%. ¿Por qué?

Variación geométrica

En este sistema de amortización, el incremento en las rentas se da en porcentaje y, como antes, con el primer ejemplo se desarrolla una fórmula genérica.

Ejemplo 4

Deducción de fórmula, rentas en una amortización

Se compra una computadora de \$21,000, con 6 abonos quincenales que crecen 6% sucesivamente a una tasa de interés del 12% nominal quincenal. ¿De cuánto es cada uno?

solución

Como se ve en la figura 6.2 los \$21,000 se separan en 6 partes proporcionales $C_1, C_2, \ldots C_6$, cuyo valor futuro debe ser igual al valor de cada renta quincenal, es decir, que los 6 capitales son:

$$C_1 = R_1(1 + 0.12/24)^{-1} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C_2 = R_2(1.005)^{-2}$$

$$\vdots$$

$C_6 = R_6(1.005)^{-6}$, dado que el plazo crece con la renta

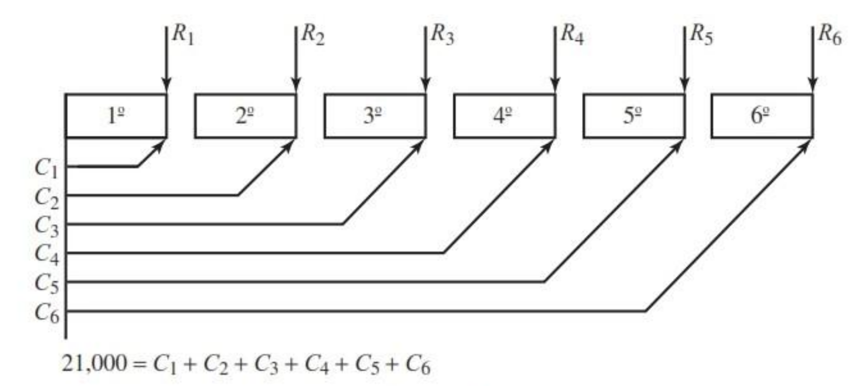


FIGURA 6.2

Como cada pago es un 6% mayor que el precedente, se cumple que el K–ésimo es igual al anterior más 6% del mismo, esto es:

$$R_K = R_{K-1} + (0.06)R_{K-1} \quad \text{o bien,} \quad R_K = (1.06)R_{K-1}$$

Y si denotamos con t al paréntesis, es decir $t = 1.06$, entonces, t en general es $t = 1 + f$, donde f es la tasa de incremento en los pagos. Es claro que si f es negativo, entonces $t < 1$ y los pagos se reducen en lugar de crecer.

También es cierto que si R_1 es la primera renta, entonces:

$$R_2 = R_1(1 + f) \quad \text{o} \quad R_2 = R_1(t)$$
$$R_3 = R_2(1 + f) \quad \text{o} \quad R_3 = R_2(t), \quad R_3 = R_1(t)(t) \quad \text{o bien,} \quad R_3 = R_1(t^2)$$

y continuando de esta manera, el K–ésimo abono es expresable en términos del primero, como $R_K = R_1(r^{K-1})$.

La suma de los 6 capitales, puesto que R_1 es factor común es, por lo tanto:

$$\text{Suma} = R_1[(1.005)^{-1} + t(1.005)^{-2} + t^2(1.005)^{-3} + \ldots + t^5(1.005)^{-6}] \qquad t = 1 + f$$

La suma entre corchetes es una serie geométrica con 6 términos y como tal se evalúa con el teorema 2.4, donde el primero es $a_1 = (1.005)^{-1}$ o $a_1 = 1/1.005$. La razón común es $r = t(1.005)^{-2}/(1.005)^{-1}$ o bien, $r = t(1.005)^{-1}$ porque $r = a_2/a_1$, por ejemplo. Entonces, la suma es:

$$\text{Suma} = R_1\left[\left(\frac{1}{1.005}\right)\frac{1-[(t)(1.005)^{-1}]^6}{1-t(1.005)^{-1}}\right] \qquad S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

(A) $$\text{Suma} = R_1\left[\frac{1-(t/1.005)^6}{1.005-t(1)}\right] \qquad (1.005)(1.005)^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad t(1.005^{-1}) = t/1.005$$

$$\text{Suma} = R_1\left[\frac{1-(1.06/1.005)^6}{1.005-1.06}\right] \qquad \text{ya que} \quad t = 1.06$$

o bien, $\text{Suma} = R_1(6.849062564)$

Esta suma de los 6 capitales debe ser igual al precio de la computadora y por eso:

$$R_1(6.849062564) = 21,000$$

de donde:

$$R_1 = 21{,}000/6.849062564$$

o bien,
$$R_1 = \$3{,}066.11$$

El segundo abono y los siguientes se obtienen, claro, multiplicando sucesivamente por 1.06.

Un buen ejercicio para el estudiante es comprobar este resultado encontrando los 6 capitales, y ver que su suma sea realmente $21,000.

Para generalizar, observamos que la ecuación **(A)** del desarrollo anterior, es decir, la suma entre los corchetes, puede expresarse como:

$$\text{Suma} = \frac{1-[(1+f)/(1+i/p)]^{np}}{(1+i/p)-(1+f)} \qquad t = 1+f$$

$$\text{Suma} = \frac{1-[(1+f)/(1+i/p)]^{np}}{i/p-f} \qquad \text{se cancela el 1 en el denominador}$$

o bien,
$$\text{Suma} = \frac{1}{f-i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np}-1\right]$$
invirtiendo los signos en el numerador y el denominador y sacando $f - i/p$

Al multiplicar esto por R_1, la primera renta, resulta la ecuación del siguiente:

Teorema 6.4

Un crédito C al inicio del plazo se amortiza con np rentas vencidas variables, geométricamente, según la ecuación

$$C = \frac{R_1}{f-i/p}\left(\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np}-1\right)$$

donde:

R_1 es la primera renta

f es la tasa de variación geométrica en las rentas

i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año y

n es el plazo en años

Note que C se localiza al inicio del primer periodo, es decir, un periodo antes de la primera renta y por esto la anualidad es ordinaria.

Ejemplo 5

Renta, cuadro de amortización, intereses, saldo insoluto

Obtenga los primeros renglones del cuadro de amortización de un crédito hipotecario de $800,000, abonos mensuales durante 5 años, una tasa de interés del 20.4% nominal mensual y un incremento constante en los pagos del 1.8%. Calcule el saldo insoluto luego de efectuar el pago 35 y los intereses.

solución

Para hallar el valor de la primera renta, se sustituyen en la ecuación del último teorema, los valores siguientes:

La deuda original, $C = 800{,}000$

La tasa de incremento en las rentas, $f = 0.018$

La tasa de interés, $i = 0.204$ anual compuesta por meses

La frecuencia de conversión y de pagos, $p = 12$, porque son mensuales

El plazo en años, $n = 5$

Además, $np = 5(12) = 60$ el número de rentas e $i/p = 0.204/12 = 0.017$

Entonces,

$$800{,}000 = \frac{R_1}{0.018 - 0.017}\left(\left(\frac{1.018}{1.017}\right)^{60} - 1\right)$$

de donde:

$$800{,}000 = \frac{R_1}{0.001}\left((1.000983284)^{60} - 1\right)$$

$$800{,}000(0.001) = R_1(0.060741353)$$

$$R_1 = 800/0.060741353 \quad \text{o bien,} \quad R_1 = \$13{,}170.60$$

El segundo pago y los restantes se obtienen multiplicando sucesivamente por 1.018.

$$R_2 = 13{,}170.60(1.018) = \$13{,}407.67$$

$$R_3 = 13{,}407.67(1.018) = \$13{,}649.01, \text{ etcétera.}$$

a) Con estos valores en la segunda columna y la deuda en el renglon 0 de la quinta columna, se inicia la tabla de amortización.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	$800,000.00
1	$13,170.60	$13,600.00	–$429.40	$800,429.40
2	$13,407.67	$13,607.30	–$199.63	$800,629.03
3	$13,649.01	$13,610.69	$38.32	$800,590.71
4	$13,894.69	$13,610.04	$284.65	$800,306.07
5	$14,144.79	$13,605.20	$539.59	$799,766.48

Note que las primeras 2 amortizaciones son negativas, la deuda crece en los primeros pagos y comienza a reducirse hasta después del cuarto.

b) Para evaluar los intereses, se suman los pagos formándose una serie geométrica con:

$a_1 = 13,170.60$, el primer abono
$r = 1.018$, la razón y
$n = 12(5) = 60$, el número de términos

La suma es igual al total que se pagó, en el monto M.

$$\text{Suma} = 13,170.60\left(\frac{1-(1.018)^{60}}{1-1.018}\right) \qquad S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\text{Suma} = 13,170.60(106.4739754)$$

$$\text{Suma} = \$1'402,326.14$$

Consecuentemente,

$$\text{Intereses} = 1'402,326.14 - 800,000.00 \qquad I = M - C$$

$$I = \$602,326.14$$

c) El saldo insoluto después de hacer el pago 35, es igual al valor presente de los 25 que restan. La misma ecuación del teorema 6.4 se utiliza con $np = 25$ y un primer pago R_1, que es igual al pago número 36 de los 60, el cual es:

$$R_{36} = 13,170.60(1.018)^{35}$$

$$R_{36} = \$24,591.09$$

porque hubo 35 incrementos del 1.8%.

El saldo insoluto es, entonces,

$$C = \frac{24,591.09}{0.018-0.017}\left(\left(\frac{1.018}{1.017}\right)^{25} - 1\right)$$

$$C = 24'591,090\ (1.024874353 - 1)$$

$$C = \$611,687.45$$

Note nuevamente que cuando se ha realizado el 58.33% de los pagos, la deuda se ha amortizado tan sólo un 23.54%, aproximadamente, ya que:

$$35/60 = 0.58\overline{3} \text{ o bien, } 58.33\%$$

y $$(800,000 - 611,687.45)/800,000 = 0.2354 \text{ o bien, } 23.54\%$$

Importante

Antes de concluir esta sección, es importante señalar que los teoremas 6.3 y 6.4 se emplean no sólo para amortizar deudas, sino también para distribuir un capital cualquiera C al inicio del plazo, en una serie de pagos crecientes, como se aprecia en los ejercicios de esta sección.

Ejercicios 6.5

1. ¿Cuál es la característica esencial de las amortizaciones de esta sección?

2. ¿Qué es una *serie gradiente* y qué es el *gradiente aritmético*?

3. ¿Qué es una *serie en escalera* y qué es el *gradiente geométrico*?

***4.** Obtenga las primeras 4 rentas quincenales que amortizan en un año un crédito de $350,000, considerando que el primero cubre exactamente los intereses de una tasa del 18.6% capitalizable por quincenas y forman una serie gradiente aritmética. ¿A cuánto ascienden los derechos transferidos al deudor luego del pago número 17?

5. ¿Cuál es el precio de un terreno que se amortiza con un enganche del 30% y 36 rentas mensuales que crecen 2.5%, la primera es por $4,150 y se cargan intereses del 17.4% anual capitalizable por bimestres?

***6.** Haga el cuadro de amortización, en sus primeros 3 renglones y el último, de un crédito que se amortiza con 13 pagos bimestrales que crecen a un ritmo del 1.5% sucesivamente, el primer pago es de $6,000 y la tasa de interés es del 13.8% compuesto por bimestres.

***7.** Con intereses a una tasa del 7.32% capitalizable por bimestres, se depositan $250,000 para disponer de cantidades bimestrales que crecen 2.3%. ¿Durante cuánto tiempo se harán las disposiciones, suponiendo que la primera es por $13,500? Obtenga los intereses y suponga una menor al final.

***8.** ¿Cuánto deberá invertir a una tasa del 13.36% compuesto por meses, el doctor Velazco para hacer disposiciones mensuales durante año y medio, considerando que el primer retiro es por $10,750, a los 4 años después de la inversión y que crecen:

a) $325 cada mes? *b*) 18% cada mes?

***9.** Encuentre los primeros abonos bimestrales que amortizan en 2 años, un crédito de $1.25 millones a una tasa del 16.4% nominal bimestral, suponiendo que cada uno es $7,500 más grande que el siguiente.

10. ¿Con cuántos pagos quincenales amortiza el señor Villalobos un crédito de $94,565, si el primero es por $4,200, los siguientes se incrementan en 0.8% y le cargan una tasa del 12.69% de interés nominal quincenal?

11. ¿Cuánto debe dar a la Universidad un egresado para que otro estudiante de economía restringida disponga de una beca cuatrimestral que crezca un 3.5% cada cuatrimestre? Suponga que la tasa es del 9.3% de interés capitalizable por semestres, que la primera renta, 2 años después del donativo, es por $25,000 y la carrera profesional dura 9 cuatrimestres.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***12.** ¿Cuánto podrá retirar cada quincena durante 9 meses, una persona que deposita en un banco $45,000, ganando intereses a una tasa del 5.28% compuesto por quincenas? Considere que el primero se hace 4 meses después del depósito y que los retiros:

a) son iguales. *b*) crecen $250 sucesivamente. *c*) se incrementan un 1.9% cada uno.

***13.** ¿Cuántas disposiciones mensuales pueden hacerse, si se invierten $125,000 en una cuenta que reditúa una tasa de interés del 8.4% efectivo? Suponga que la primera disposición es por $6,500, a los 10 meses de la inversión, que las disposiciones ulteriores crecen 1.5% cada mes, y haga un ajuste con un retiro mayor al final.

En los problemas 14 a 20 diga si la afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta.

14. Una deuda con pagos que crecen geométricamente se amortizan siempre en menor tiempo que cuando crecen aritméticamente. __________

15. En todo sistema de amortización con rentas que varían aritméticamente la primera es siempre mayor que los intereses generados en el primer periodo. __________

16. El crédito que se amortiza con 13 rentas mensuales que crecen $150.00 con intereses del 13.2% nominal mensual donde la primera es por $2,350 es por $38,891.31. __________

17. La primera renta quincenal de un total de 25 que amortizan un crédito de $56,725.00 con intereses del 19.5% anual compuesto por quincenas y crecen sucesivamente un 2.5% es de $1,860.92. __________

***18.** Los primeros 3 renglones del cuadro de amortización de una deuda por $128,650 suponiendo intereses del 10.2% nominal bimestral y 10 rentas bimestrales que se reducen $350 sucesivamente, son:

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	$128,650.00
1	$12,865.00	$2,187.05	$10,677.95	$117,972.05
2	$12,515.00	$2,005.52	$10,509.48	$107,462.57

19. Si un crédito por $75,900 se amortiza con 18 abonos mensuales que crecen 1.75%, el primero es por $4,132.01 y los intereses son del 16.2% nominal mensual, entonces el saldo insoluto luego de efectuar el 50% de los pagos es de $43,576.79. __________

20. $23,011.47 es el tamaño del crédito que se amortiza con 25 rentas semanales que crecen aritméticamente, la primera es por $1,275.00, la última por $675.00 y los cargos son del 26% nominal semanal. __________

En los problemas 21 a 31 seleccione la opción correcta justificando su respuesta.

21. La primera renta mensual que amortiza un crédito de $681,787.00 es de $25,000. ¿Cuántos se necesitan si crecen 1.3% sucesivamente y se cargan intereses del 10.2% anual convertible por meses?

a) 26 *b*) 23 *c*) 28 *d*) 25 *e*) Otra

22. ¿De cuánto es el último abono quincenal que amortiza un crédito de $75,000, considerando que son 18, se cargan intereses del 15.96% nominal quincenal y crecen 2% sucesivamente?

a) $5,009.32 *b*) $5,201.65 *c*) $5,238.68 *d*) $4,929.06 *e*) Otra

***23.** ¿Cuánto se pagó por intereses en el problema 22?

a) $5,328.35 *b*) $4,996.31 *c*) $5,109.24 *d*) $4,898.93 *e*) Otra

24. ¿Con cuánto dinero se cancela el crédito del problema 22 al hacer el abono número 14?

a) $25,473.31 *b*) $23,693.50 *c*) $24,033.47 *d*) $24,849.08 *e*) Otra

***25.** Encuentre el primer abono trimestral de los que amortizan en 2.5 años un crédito de $675,000, considerando intereses del 16.5% anual capitalizable por trimestres y crecen $750 sucesivamente.

a) $80,614.48 *b*) $83,098.42 *c*) $81,129.49 *d*) $80,388.32 *e*) Otra

26. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 25?

a) $168,421.08 *b*) $170,979.52 *c*) $164,894.79 *d*) $169,095.31 *e*) Otra

***27.** ¿Cuántos abonos bimestrales se necesitan para amortizar un crédito de $2'760,000, considerando que crecen 1.8% sucesivamente, el primero es por $45,000 y los intereses son del 13.20% anual capitalizable por bimestre? Haga un ajuste a las rentas, redondeando al entero mayor.

a) 68, la primera de $46,960.35
d) 72, la primera de $44,879.37
b) 70, la primera de $46,073.25
e) Otra
c) 71, la primera de $45,121.32

28. El primer abono mensual de un total de 30 que amortizan una deuda de $625,000 es de $20,320. ¿Cuál es la diferencia aproximada entre 2 pagos sucesivos, si se consideran intereses del 14.04% nominal mensual?

a) $295.38 *b*) $330.40 *c*) $325.06 *d*) –$345.92 *e*) Otra

29. ¿Cuánto se recibió en el préstamo que se amortiza con 14 rentas bimestrales que crecen 0.8% sucesivamente? Suponga que la primera renta es de $13,200 y se cargan intereses del 19.2% nominal bimestral.

a) $155,265.41 *b*) $142,093.08 *c*) $154,365.30 *d*) $152,368.87 *e*) Otra

***30.** Un crédito de $154,000 se amortiza con 15 rentas quincenales que crecen $520 de forma sucesiva. ¿De cuánto es la primera renta, si hace 7 quincenas después de conseguido el préstamo y se cargan intereses del 13.8% anual capitalizable por quincenas?

a) $8,224.86 *b*) $7,160.90 *c*) $7,063.47 *d*) $7,529.35 *e*) Otra

31. En el problema 30, ¿cuánto se paga por intereses?

a) $9,023.18 *b*) $8,013.50 *c*) $8,497.23 *d*) $8,596.31 *e*) Otra

6.6 Problemas de aplicación

Si bien es cierto que la mayoría de los ejemplos resueltos en este capítulo son verdaderas aplicaciones, a continuación plantearemos otros que, por su grado de dificultad o porque representan situaciones muy específicas, no se trataron antes. Se incluyen las **anualidades de rentas que varían en grupos** y no de manera sucesiva, una por una, como se vio en la sección que precede. Un ejemplo de lo anterior lo constituyen los créditos del Infonavit,* que en México financian y administran recursos económicos para que el trabajador adquiera una vivienda, así como el **traspaso de terrenos** y otros bienes inmuebles cuando no se han amortizado totalmente.

Traspaso de un bien considerando su plusvalía

Porque la situación económica es apremiante, o simplemente para cambiarla por otra más amplia, es común que una persona traspase o trasfiera su vivienda o terreno, antes de pagarla totalmente; pero ¿cuánto debería pedir por ella? Se proponen 2 maneras de saberlo y, en ambos casos, debe suponerse que el comprador y futuro propietario seguirá pagando el resto de las mensualidades.

- Evaluando el porcentaje, sobre el precio del bien que se traspasa, que ya ha sido transferido al deudor original, considerando alguna utilidad adicional y la plusvalía del propio bien.
- Calculando el monto en que se traspasa, como si todos los abonos se hubieran hecho en una cuenta bancaria, por ejemplo.

Ejemplo 1

Ⓕ

Traspaso de un terreno



El ingeniero Uribe adquiere un terreno de $360,000 y lo paga con un anticipo del 25% que amortiza con 8 mensualidades, y el 75% restante lo paga en un plazo de 5 años contados desde que lo compró (también con rentas mensuales). ¿Cuánto deberá pedir por el terreno, si lo traspasa 2 años antes de concluir el plazo? Suponga intereses del 13.20% anual capitalizable por meses, el valor del terreno ha aumentado por la inflación y otros factores en un 4.71% en promedio cada trimestre, y los gastos fijos al comprarlo fueron de $45,000.

solución

En la figura 6.3, están los 405,000 del precio del terreno y los 45,000 de gastos fijos, al inicio del plazo, 8 rentas R_1 que son mayores que las rentas R porque incluyen el pago del enganche. El traspaso se realiza luego de hacer la renta número 36 cuando faltan 24 por efectuar.

*Para mayor información sobre el Instituto consulte la dirección www.infonavit.gob.mx

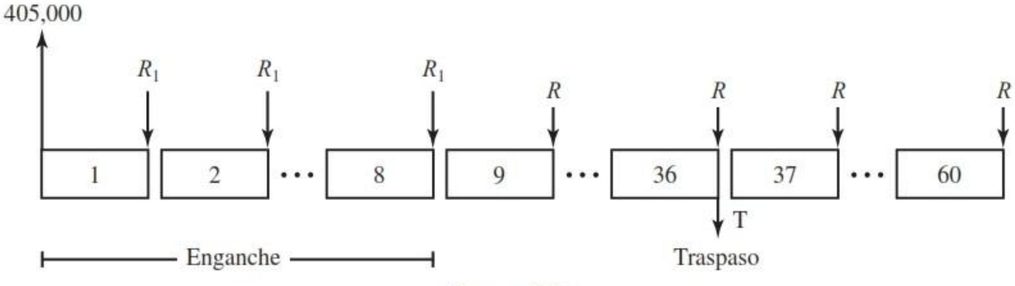


FIGURA 6.3

El valor presente de las 60 mensualidades al iniciar el plazo es igual al 75% del precio.

$$0.75(360{,}000) = 270{,}000$$

Entonces, cada renta mensual es R de la siguiente ecuación:

$$270{,}000 = R\left[\frac{1-(1+0.132/12)^{-60}}{0.011}\right] \qquad C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

o bien, $$270{,}000 = R(43.75298012)$$

de donde:

$$R = 270{,}000/43.75298012$$

o bien, $$R = \$6{,}171.01$$

El saldo insoluto luego de efectuar el pago 36, cuando aún faltan 24, los que corresponden a los 2 años, es:

$$C = 6{,}171.01\left(\frac{1-(1.011)^{-24}}{0.011}\right)$$

$$C = 6{,}171.01(20.99260683)$$

o bien, $$C = 129{,}545.59$$

y los derechos adquiridos por el deudor son:

$$D = 270{,}000 - 129{,}545.59$$

o bien, $$D = \$140{,}454.41$$

Lo que ya pertenece al comprador es la suma de estos derechos, el enganche y los gastos fijos.

$$140{,}454.41 + 0.25(360{,}000) + 45{,}000 = 275{,}454.41$$

El porcentaje en relación con el precio y los gastos fijos es:

$$275{,}454.41/405{,}000 = 0.680134346$$

$$360{,}000 + 45{,}000 = 405{,}000$$

El valor futuro de precio más gastos fijos 3 años después de la compra, considerando que crecen 4.71% cada trimestre, es:

$$M = 405{,}000(1.0471)^{12}$$

o bien,

$$M = \$703{,}579.11$$

Consecuentemente, el señor Uribe deberá pedir por su terreno el 68.0134346% de este valor futuro:

$$T = (0.680134346)703{,}579.11 = \$478{,}528.3176$$

o bien,

$$T = \$478{,}528.32$$

sin contar, claro, alguna utilidad adicional por deshacerse de su propiedad y sabiendo que el comprador pagará las 24 mensualidades restantes.

Ejemplo 2

Traspaso de un bien como inversión

Resuelva el ejemplo 1, considerando el problema como una inversión a interés compuesto con la tasa dada.

solución

El valor futuro de los gastos, \$45,000, y del enganche 3 años después es:

$$M_1 = 135{,}000(1.011)^{36}$$

o bien,

$$M_1 = \$200{,}159.11$$

ya que el enganche es 0.25(360,000) = 90,000, el 25% del precio, el de los 36 abonos que ya se realizaron es:

$$M_2 = 6{,}171.01(1.011)\left[\frac{(1.011)^{36}-1}{0.011}\right] \qquad M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

$$M_2 = 6{,}171.01(1.011)(43.87819118)$$

o bien,

$$M_2 = \$273{,}751.26$$

y la suma de los 2 es:

$$M_1 + M_2 = \$473{,}910.37,$$

y en esto deberá traspasarse el terreno con este criterio.

Ejemplo 3

Inversión para disposiciones que varían geométricamente

¿Cuánto debe depositar el señor Díaz en una cuenta bancaria que bonifica intereses del 7.2% anual capitalizable por cuatrimestre, 4 años antes de que su hija comience sus estudios profesionales que duran 9 cuatrimestres? Suponga que la colegiatura actual es de $45,000 por cuatrimestre, que aumenta 4.8% cada 4 meses y que debe pagarse al inicio de cada periodo escolar. Obtenga los intereses y la tasa de interés global total, global mensual y la global cuatrimestral.

solución

a) El diagrama de tiempo de la figura 6.4 puede ayudarnos a entender mejor el planteamiento y solución del ejercicio.

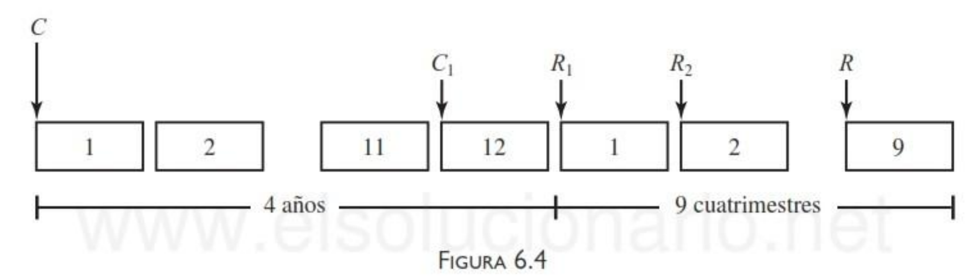


FIGURA 6.4

Si C_1 el capital de las 9 disposiciones cuatrimestrales se localiza un periodo antes de la primera, entonces se tendrá una anualidad vencida con rentas que crecen geométricamente y por eso C_1 puede evaluarse con la ecuación del teorema 6.4.

$$C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right]$$

El valor de la primera renta R_1 puesto que habrán habido 11 incrementos del 4.8% es:

$$R_1 = 45{,}000(1 + 0.048)^{11}$$
$$R_1 = 45{,}000(1.674843026)$$
$$R_1 = 75{,}367.93617 \text{ o bien, } R_1 = \$75{,}367.94$$

y los otros números que se sustituyen en la ecuación 6.4 son:

$f = 0.048$, la tasa de crecimiento en la colegiatura
$i/p = 0.072/3 = 0.024$, la tasa de interés por periodo cuatrimestral
$n = 3$, los años de la carrera, 9 cuatrimestres
$p = 3$, la frecuencia de rentas y de capitalización de intereses y
$np = 9$, el número de periodos, de disposiciones.

Entonces,

$$C_1 = \frac{75,367.94}{0.048 - 0.024}\left[\left(\frac{1.048}{1.024}\right)^9 - 1\right]$$

$$C_1 = \frac{75,367.94}{0.024}(1.231833283 - 1)$$

$$C_1 = (3'140,330.83)(0.231833283)$$

o bien, $C_1 = \$728,033.21$

Capital que con la fórmula del interés compuesto, se traslada hasta 11 cuatrimestres antes, que es cuando el señor Díaz hace el depósito.

$$C = 728,033.21(1.024)^{-11} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C = 728,033.21(0.770371978)$$

$$C = 560,856.3839 \text{ o bien, } C = \$560,856.38$$

b) Los intereses son la diferencia entre este capital y la suma de las 9 disposiciones que forman una serie geométrica con un primer término $a_1 = 75,367.94$, la primera disposición cuatrimestral, $r = 1.048$, la razón constante porque crecen 4.8 de forma sucesiva y $m = 9$ el número de términos, entonces,

$$S = 75,367.94\frac{1-(1.048)^9}{1-1.048} \qquad S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S = 75,367.94(10.93616129)$$

$$S = \$824,235.9479 \text{ o bien, } S = \$824,235.95$$

Así, los intereses son:

$$I = 824,235.95 - 560,856.38$$

$$I = \$263,379.57$$

c) La tasa de interés global total es simplemente la división de intereses entre capital, esto es:

$$g = 263,379.57/560,856.38$$

$$g = 0.469602517$$

o bien, 46.96025%

la mensual porque el plazo total es de 4 años y 9 cuatrimestres, esto es 84 meses:

$$g/84 = 0.005590506$$

o bien, 0.5590506%

y la cuatrimestral es $g/21 = 0.022362025$

o bien, 2.2362025%

Ejemplo 4

Inversión periódica para disposiciones que varían aritméticamente

¿Cuánto debe depositar al inicio de cada mes el señor Díaz del ejemplo 3 durante los 4 años, suponiendo que la colegiatura se incrementa $2,450 cada cuatrimestre?

solución

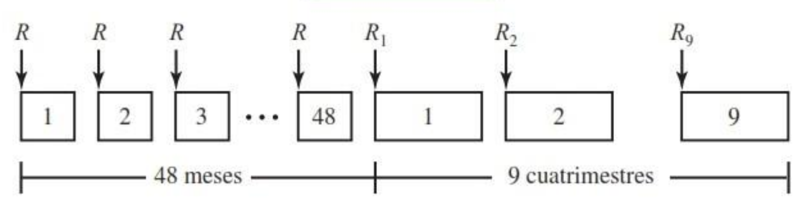


FIGURA 6.5

Ahora la primera disposición cuatrimestral puesto que han habido 11 incrementos de $2,450 es:

$$R_1 = 45{,}000 + 11(2{,}450)$$
$$R_1 = 71{,}950.00$$

En las ecuaciones del teorema 6.3 se reemplazan también los números siguientes

$i/p = 0.024$ la tasa de interés por cuatrimestre

$d = 2{,}450$ el incremento en las rentas cuatrimestrales

$n/p = 9$, el número de disposiciones

$p = 3$, la frecuencia de conversión

Entonces,

$$T = \frac{1-(1+0.024)^{-9}}{0.024} \qquad T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

o bien, $T = 8.008601379$

$$V = \frac{1-(1+9(0.024))(1+1.024)^{-9}}{(0.024)^2} \qquad V = \frac{1-(1+np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

$$V = \frac{1-(1.216))(0.807793567)}{0.000576} \text{ o bien, } V = 30.76913646$$

El capital al inicio del plazo está dado por $C = TR_1 + Vd$

$$C = 8.008601379(71{,}950) + 30.76913646(2{,}450)$$
$$C = 576{,}218.8692 + 75{,}384.38433$$
$$C = \$651{,}603.25$$

Éste está un cuatrimestre antes de la primera disposición ¿por qué? y deberá llevarse hasta 4 meses después porque ahí se ubicará el valor acumulado de las 48 rentas mensuales anticipadas, entonces,

$$M_1 = 651,603.25(1.024) \qquad M = C(1 + i/p)^{np} \quad np = 1\text{, un cuatrimestre}$$
$$M_1 = 667,241.7316$$

Ahora bien, el monto acumulado de las 48 rentas mensuales anticipadas se evalúa con la ecuación del teorema 5.1, pero antes se obtiene la tasa de interés nominal mensual equivalente al 7.2% capitalizable por cuatrimestres,

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.072/3)^3$$
$$1 + i/12 = \sqrt[4]{1.024} \text{ o bien, } 1 + i/12 = 1.005946744$$

Por lo tanto:

$$667,241.7316 = R(1.005946744)\,\frac{(1.005946744)^{48} - 1}{0.005946744}$$
$$667,241.7316 = R(1.005946744)(55.36273497)$$
$$667,241.7316 = R(55.69196298)$$

de donde $R = 667,241.7316/55.69196298$

o bien, $R = 11,980.93399$

Esto quiere decir que el señor Díaz depositará \$11,980.93 al comienzo de cada mes, durante los 4 años anteriores al inicio de los estudios de su hija.

b) Ahora para los intereses el monto es:

$$M = 9/2[2(71.950) + 8(2,450)] \qquad S = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$
$$M = 4.5(163,500)$$

o bien, $M = 735,750.00$

ya que las disposiciones varían aritméticamente.

El capital total invertido es:

$$C = 11,980.93(48)$$
$$C = 575,084.64$$

y los intereses:

$$I = 735,750.00 - 575,084.64$$
$$I = \$160,665.36$$

Solución alterna

El valor actual de las 9 disposiciones cuatrimestrales es $C = 651,603.25$ que se localiza, se dijo, un cuatrimestre antes de la primera y consecuentemente está a 44 meses de la primera renta mensual y por eso al llevarlo hasta esa fecha se convierte en:

$$C_1 = 651,603.25(1.005946744)^{-44}$$
$$C_1 = 501,976.8815$$

y esto debe ser igual al valor presente de las 48 rentas anticipadas y por eso se sustituye en el teorema 5.3 para el valor presente de las anualidades anticipadas:

$$501{,}976.8815 = R(1.005946744)\left(\frac{1-(1.005946744)^{-48}}{0.005946744}\right)$$

$$501{,}976.8815 = R(1.005946744)(41.65029209)$$

$$501{,}976.8815 = R(41.89797571)$$

de donde $R = 501{,}976.8815/41.89797571$

o bien, $R = \$11{,}980.93$ que es igual al de antes.

Renta variable en bloques

Ejemplo 5

Reestructuración de un crédito hipotecario con renta variable en bloques

a) Para ampliar sus instalaciones, la Maquiladora del Noreste consigue un crédito y endosa 2 documentos: el primero por $875,000 que vence el 21 de junio y el segundo por 1.18 millones con vencimiento al 1º de octubre. ¿Qué día se consiguió el crédito suponiendo que se hizo por $1'946,710 con intereses del 9.36% anual capitalizable por días?

b) Si los 2 pagos se reemplazan por 20 mensualidades que crecen en 3.2% cada 4, ¿de cuánto será cada una si la primera se hace el 21 de junio?

c) ¿Cuánto dinero costó a la maquiladora el haber cambiado el plan de amortización?

solución

a) El diagrama de la figura 6.6, donde las entidades están en millones de pesos, nos auxilia; *C* es el préstamo.

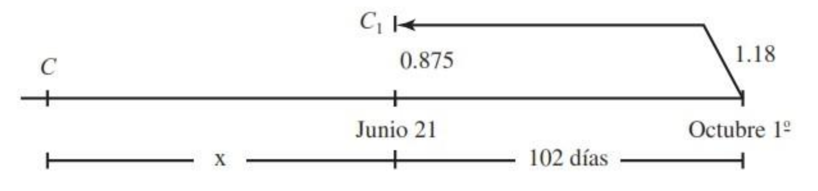


FIGURA 6.6

El valor presente de los 1.18 millones al 21 de junio es:

$$C_1 = 1.18(1 + 0.0936/360)^{-102} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C_1 = 1.18(0.9738319214)$$

o bien, $C_1 = 1.14912167$

y al sumarlo con el primer pago arroja el monto

$$M_A = 1.14912167 + 0.875$$

o bien, $$M_A = 2.02412167 \text{ millones de pesos}$$

que deberá ser igual al valor futuro del crédito C, \$1.94671 millones, x días después, y por eso:

$$2.02412167 = 1.94671(1.00026)^x \qquad 0.936/360 = 0.00026$$

de donde:

$$(1.00026)^x = 2.02412167/1.94671$$
$$(1.00026)^x = 1.039765384$$

Ecuación que se resuelve tomando logaritmos naturales a los 2 lados, los 2 son positivos.

$$\ln(1.00026)^x = \ln(1.039765384)$$
$$x = \ln(1.039765384)/\ln(1.00026) \qquad \ln(M^n) = n\ln(M)$$
$$x = 150.0006328$$

o sea, 150 días, que se cumplen el 22 de enero: este día se logró el crédito.

b) Para obtener el valor de los primeros pagos mensuales y con ellos, el valor de todos los demás, tenemos 5 bloques de 4 cada uno como se aprecia en la figura 6.7, donde también se ve que el primero está en la fecha donde se encuentran los 2.02412167 millones que absorben, digámoslo así, los 2 pagos originales.

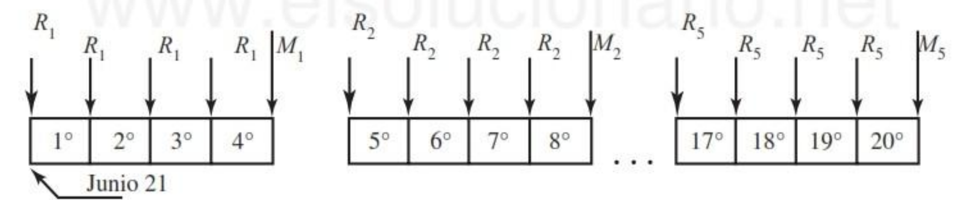


Figura 6.7

La tasa de interés capitalizable por meses es i de la siguiente ecuación:

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.0936/360)^{360}$$
$$1 + i/12 = (1.00026)^{30} \quad \text{o bien,} \quad 1 + i/12 = 1.007829477$$

El valor futuro M_1 de los primeros 4 pagos R_1 al final del cuarto mes es:

$$M_1 = R_1(1.007829477)\left(\frac{(1.007829477)^4 - 1}{0.007829477}\right) \qquad M = R_1(1 + i/p)\left(\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = R_1(1.007829477)(4.047222567)$$
$$M_1 = R_1(4.078910203) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = R_1(k) \quad \text{donde} \quad k = 4.078910203$$

Para el segundo monto lo que cambia es la renta porque ahora es:

$R_2 = R_1 + 0.032R_1$ o bien, $R_2 = (1.032)R_1$ porque crecen 3.2% y, por lo tanto $M_2 = R_1(1.032)k$, ya que k es invariable.

Confirmando de igual manera, se verá que el monto del último bloque de rentas es

$M_5 = R_1(1.032)^4(k)$, ya que la renta mensual ha tenido 4 incrementos del 3.2%.

Estos 5 montos forman una anualidad de 5 rentas que varían aritméticamente y, por ello, la primera renta $M_1 = R_1(k)$ se evalúa con la fórmula del teorema 6.4, pero antes se obtiene la tasa de interés capitalizable por cuatrimestre equivalente al 0.0936 nominal diario.

$$(1 + i/3)^3 = (1 + 0.0936/360)^{360}$$

$$1 + i/3 = (1.00026)^{120}$$

o bien, $$1 + i/3 = 1.031687638$$

Entonces al sustituir este valor, el monto M_A, que debe ser igual al capital o valor presente C al 21 de junio, de las 20 rentas mensuales, y los otros valores en la igualdad:

$$C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right] \qquad \text{Teorema 6.4}$$

queda: $$2.02412167 = \frac{R_1(k)}{0.032 - 0.031687638}\left[\left(\frac{1.032}{1.031687638}\right)^5 - 1\right]$$

$$2.02412167 = (R_1(k)/0.000312362)(1.001514757 - 1)$$

$$2.02412167 = R_1(k)4.849363879$$

$$2.02412167 = R_1(19.7801198) \text{ porque } k = 4.078910203$$

de donde: $$R_1 = 2.02412167/19.7801198$$

$R_1 = 0.102331113$ millones, es decir, que las primeras 4 rentas mensuales son de \$102,331.11.

Las 4 rentas del segundo bloque son un 3.2% más grandes.

$R_2 = R_1(1.032)$ o bien, $R_2 = \$105,605.71$ y así sucesivamente.

c) Para evaluar el costo para la maquiladora por haber cambiando el plan de pagos, deben hallarse los intereses en los 2 planes. En el primero, los intereses son la diferencia entre lo que se iba a pagar y el valor presente del crédito, esto es:

$I_1 = 875,000 + 1'180,000 - 1'946,710$ o bien, $I_1 = \$108,290.00$

El monto de las 20 rentas que crecen forman una progresión geométrica, donde los términos crecen de 4 en 4, y por eso estará dado por:

$M = 4(M_A)$, donde $M_A = R_1 + R_2 + \ldots + R_5$

$$M_A = 102,331.11\left(\frac{1-(1.032)^5}{1-1.032}\right) \qquad S = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$M_A = 102,331.11(5.330404875)$ o bien, $M_A = 545,466.2476$

y $M = 4(545,466.2476)$ o bien, $M = 2'181,864.99$

y los intereses en este caso son, por lo tanto,

$$I_2 = 2'181{,}864.99 - 1'946{,}710 \quad \text{o bien,} \quad I_2 = 235{,}154.99$$

El costo para la maquiladora es entonces:

$$\text{Costo} = 235{,}154.99 - 108{,}290.00 \quad \text{o bien,} \quad \$126{,}864.99$$

Amortización de un crédito del Infonavit

Un ejemplo de créditos que se amortizan con pagos que crecen geométricamente en bloques son los que el Infonavit otorga a los trabajadores, ya que los pagos periódicos, mensuales o quincenales, dependen del salario mínimo y éste se incrementa cada año.

Si bien, para tener derecho a esta clase de crédito, el trabajador debe acumular un cierto número de puntos, o número de semanas que cotiza en el Instituto, en el ejemplo siguiente se considera que los pagos se realizan a partir de que se otorga tal financiamiento, y se procede como en el ejemplo anterior, con montos parciales de rentas vencidas.

Ejemplo 6



¿De cuánto es un crédito Infonavit que se amortiza en 15 años con pagos quincenales que crecen 5.3% cada año? Suponga cargos o intereses del 6.96% anual capitalizable por quincenas y el primero es por $870.

solución

El monto acumulado de los primeros 24 pagos vencidos al final del primer año es:

$$M_1 = 870\left(\frac{(1+0.0696/24)^{24}-1}{0.0696/24}\right) \qquad M = R_1\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = 870(24.81768414) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = 870(k), \text{ donde } k = 24.81768414$$

ya que se trata del monto de una anualidad vencida. ¿Por qué?

El monto acumulado al final del segundo grupo de pagos, al final del segundo año, porque ahora la renta es $R_2 = R_1(1.053)$, y la constante k no cambia es:

$$M_2 = R_1(1.053)(k)$$

Se continúa hasta el último grupo, el que corresponde al decimoquinto año, y resulta que ahora el monto es:

$$M_{15} = R_1(1.053)^{14}(k) \qquad a_n = a_1 r^{n-1}, \text{ ya que se trata de una progresión geométrica.}$$

Note que el valor de k no cambia porque todos los bloques tienen el mismo número de abonos.

Los 15 montos parciales anuales constituyen una anualidad con rentas vencidas que crecen $f = 0.053$ sucesivamente. Para el capital, es decir, para el valor del crédito, en la ecuación 6.4 se sustituye la tasa de interés anual capitalizable por años, que es la tasa efectiva equivalente al 6.96% capitalizable por quincenas.

$$e = (1 + 0.0696/24)^{24} - 1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

o bien, $e = 0.071971284$ o bien, 7.1971284%

También,

$n = 15$, el plazo en años

$p = 1$, la frecuencia de rentas, es decir, de montos anuales, y

$R'_1 = 870(k) \qquad R'_1 = M_1$, la primera renta anual

Entonces,

$$C = \frac{870(k)}{0.053 - 0.071971284}\left[\left(\frac{1.053}{1.071971284}\right)^{15} - 1\right]$$

$$C = 45,858.78321(k)(-0.234970304)$$

o bien, $C = 267,421.7704$ ya que $k = 24.81768414$

Quiere decir que el crédito que se amortiza en las condiciones dadas es de $267,421.77.

Ejemplo 7

Cuadro de amortización de renta variable en grupos, intereses

Se compra una casa de $1'750,000 con un enganche del 25% que se liquida, junto con los gastos fijos, con $127,500 el día de la firma del contrato y 12 mensualidades fijas de $35,000 cada una.

El resto se amortiza con 48 rentas mensuales que crecen 4.8% cada semestre, haciendo la primera después de pagar el enganche, es decir, al final del mes 13. Suponiendo cargos o intereses del 13.8% anual capitalizable por meses, determine:

a) El capital que se paga por los gastos fijos.

b) El tamaño de las 48 rentas.

c) El cargo total por concepto de intereses.

d) El cuadro de amortización de las 48 rentas variables en sus primeros renglones y el último.

solución

En la figura 6.8 se aprecian las 12 mensualidades para amortizar el enganche y los gastos fijos, y después 8 grupos de 6 rentas mensuales vencidas cada uno. También están los 8 montos parciales cada uno al final de un bloque de 6 rentas.

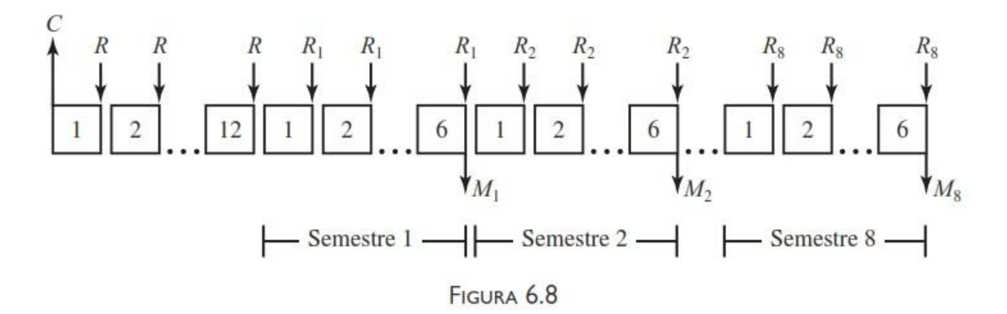


FIGURA 6.8

a) Para saber de cuánto fueron los gastos fijos, note que al sumarlos con el enganche resulta

$$\text{GASTOS FIJOS + ENGANCHE} = 127{,}500 + C$$

donde C es el valor presente de las 12 mensualidades de \$35,000.

$$C = 35{,}000\left[\frac{1-(1+0.138/12)^{-12}}{0.0115}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C = 35{,}000(11.14913698)$$

o bien, $C = \$390{,}219.7943$

El enganche es igual al 25% del precio de la casa:

$$0.25(1'750{,}000) = 437{,}500$$

Entonces,

$$\text{GASTOS} + 437{,}500 = 127{,}500 + 390{,}219.79$$

de donde los gastos fijos son:

$$517{,}719.79 - 437{,}500 = \$80{,}219.79$$

b) Las 48 rentas vencidas se distribuyen en 8 bloques de 6 cada uno, y por eso se obtienen 8 montos parciales vencidos que crecen de forma geométrica, el primero de los cuales es:

$$M_1 = R_1\left(\frac{(1.0115)^6-1}{0.0115}\right) \qquad M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = R_1(6.175167913)$$

o bien, $M_1 = R_1(k)$, donde $k = 6.175167913$ $\quad R_1$, es incógnita

Para el monto del segundo grupo de abonos sólo cambia la renta $R_2 = R_1 + 0.048R_1$ o $R_2 = (1.048)R_1$ y, por ello, $M_2 = (1.048)R_1(k)$, ya que k no cambia al no cambiar el número de rentas iguales en cada grupo. R_3 tiene otro incremento del 4.8% y por eso $R_3 = R_2(1.048)$ o $R_3 = R_1(1.048)^2$ porque $R_2 = R_1(1.048)$. Continuando de forma semejante se llegará a la renta R_8 del último bloque que será igual a $R_8 = R_1(1.048)^7$ ya que el exponente es uno menos que el subíndice de R.

En consecuencia los 8 montos uno, al final de cada semestre, forman una anualidad de rentas vencidas que crecen 4.8% de forma sucesiva y su valor presente, al inicio del mes 13, se evalúa con la ecuación del teorema 6.4, pero antes es necesario obtener la tasa equivalente compuesta por semestres:

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.138/12)^{12}$$

$$1 + i/2 = (1.0115)^6 \quad \text{o bien,} \quad 1 + i/2 = 1.071014431$$

El valor presente de las 8 rentas, es decir, de los 8 montos es, entonces:

$$C = \frac{M_1}{0.048 - 0.071014431}\left[\left(\frac{1.048}{1.071014431}\right)^8 - 1\right] \text{ porque } C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right]$$

$$C = M_1(-43.4509982)(-0.159519426)$$

$$C = 6.931278292(R_1)(6.175167913) \qquad M_1 = R_1(k)$$

o $C = 42.8018073R_1$

Este capital debe ser igual al valor futuro, 12 meses después de la fecha inicial, del valor del crédito que fue del 75% del precio.

$$M = (0.75)(1'750{,}000)(1.0115)^{12} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

o bien, $M = 1'505{,}531.885$

entonces,

$$42.8018073R_1 = 1'505{,}531.885 \qquad C = M$$

de donde:

$$R_1 = 1'505{,}531.885/42.8018073 \quad \text{o bien,} \quad R_1 = \$35{,}174.493$$

las demás se obtienen multiplicando sucesivamente por 1.048.

c) Los intereses son la diferencia entre el total que se paga y el precio de la casa, incluyendo los gastos fijos.

Lo que se paga por las 12 rentas fijas es:

$$M_1 = 12(35{,}000) \quad \text{o bien,} \quad M_1 = \$420{,}000$$

y las 48 rentas variables forman una serie geométrica, cuya razón es 1.048; entonces, la suma es la siguiente que se multiplica por 6 porque cada grupo tiene 6 rentas mensuales:

$$M_2 = 35{,}174.49\left(\frac{1-(1.048)^8}{1-1.048}\right)(6) \qquad S = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$M_2 = 35{,}174.49(9.481069938)(6)$$

o bien, $M_2 = 2'000{,}950.987$

El total que se paga es, entonces:

$$M = M_1 + M_2 + 127{,}500$$

o bien, $M = \$2'548{,}450.99$

Y el capital es:

$$C = 1'750{,}000 + 80{,}219.79$$

o bien, $C = \$1'830{,}219.79$

Recuerde que los gastos fijos fueron \$80,219.79.

Los intereses son, por lo tanto:

$$I = 2'548,450.99 - 1'830,219.79$$

o bien, $C = \$718,231.20$

d) El cuadro de amortización se inicia con el valor presente de las 48 rentas, como primer saldo insoluto en la última columna.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	1'505,531.88
1	35,174.49	17,313.62	17,860.87	1'487,671.01
2	35,174.49	17,108.22	18,066.27	1'469,604.73
3	35,174.49	16,900.45	18,274.04	1'451,330.70
4	35,174.49	16,690.30	18,484.19	1'432,846.51
5	35,174.49	16,477.73	18,696.76	1'414,149.76
6	35,174.49	16,262.72	18,911.77	1'395,237.99
7	36,862.87	16,045.24	20,817.63	1'374,420.36
⋮				
47				(*x*)48,282.63
48	48,837,88	555.25	(*x*)48,282.63	0

Para las primeras filas de este cuadro vea la sección 6.3 y para los últimos recuerde que la última amortización *x*, debe ser igual al penúltimo saldo insoluto, y la suma de tal amortización y los intereses es igual a la última renta R_{48} que resulta ser:

$$R_{48} = 35,174.49(1.048)^7 \text{ porque hubo 7 incrementos}$$

$$R_{48} = 35,174.49(1.388445952) \quad \text{o bien,} \quad R_{48} = 48,837.88$$

Entonces,

$$x + (0.0115)x = 48,837.88$$

$$(1.0115)x = 48,837.88$$

de donde:

$$x = 48,837.88/1.0115$$

o bien, $x = \$48,282.63$

y los intereses son $0.0115x = 555.25$, que se escriben en la última fila.

Ejercicios 6.6

*1. ¿De cuánto es un crédito que se amortiza con 15 pagos bimestrales de $10,750 con intereses del 15.3% nominal bimestral, seguidos de 20 mensualidades que crecen 2.8% cada mes, y el primero de éstos es por $11,300?

*2. Resuelva el problema 1 considerando que las mensualidades crecen $425 cada mes.

3. Para instalar un nuevo laboratorio de análisis clínicos, el Hospital del Noroeste consigue un crédito de 2.03 millones de pesos que amortiza gradualmente con intereses del 13.8% nominal mensual, con un periodo de gracia de 3 años. ¿De cuánto es cada uno de los 25 pagos mensuales?

4. ¿De cuánto serían los primeros 3 abonos mensuales que amortizan de manera constante el crédito del problema 3?

5. ¿Por cuánto dinero consiguió un crédito de Infonavit el profesor Delgado, si lo amortiza con abonos mensuales e intereses del 8.64% anual capitalizable por meses, en 15 años de plazo? El primer pago fue por $4,350 y crecen 4.1% cada año.

6. ¿Cuánto pagará el profesor del problema 5 por concepto de intereses?

7. Para ampliar sus instalaciones, la compañía Aceros de Occidente, adquiere un crédito bancario por $2.1 millones que amortiza con abonos bimestrales que crecen 4% cada bimestre. ¿Cuánto pagará por bimestre, si el plazo es de 2.5 años y les cargan intereses del 15.6% convertible bimestralmente?

*8. Para estudiar un posgrado de 8 cuatrimestres la licenciada Adriana deposita $9,200 al inicio de cada mes, durante 20 meses antes de comenzar el posgrado. ¿De cuánto dispondrá al inicio de cada periodo cuatrimestral, si la cuota se incrementa 4.5% cada cuatrimestre y le bonifican el 8.4% de interés anual capitalizable por meses?

*9. En el problema 8, ¿cuánto debe depositar cada mes la licenciada si la cuota cuatrimestral se incrementa $4,200 y al comenzar sus ahorros fue de $35,000.

*10. El 13 de mayo la Empacadora de Carnes Selectas consigue un préstamo endosando 2 documentos que vencen el 8 de julio y el 10 de noviembre, con valor nominal de $75,000 y $135,000, respectivamente. Poco antes del primer pago acuerdan con sus acreedores liquidar sus compromisos con 13 mensualidades que crecen 0.7% cada mes, haciendo la primera el mismo 8 de julio. Considerando intereses del 13.92% nominal mensual, determine:

a) El capital que recibió en préstamo.

b) El tamaño de las rentas mensuales.

c) El costo en intereses por haber cambiado el plan de financiamiento.

*11. Elabore el cuadro de amortización en el problema 10 en sus primeras filas.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***12.** Para aumentar su producción, una fábrica de tenis obtiene un crédito por $1'200,000 que amortizará con 18 mensualidades, que crecen 3% cada trimestre con cargos del 9.3% anual capitalizable por trimestre. ¿Cuánto dinero paga por concepto de intereses? ¿Con cuánto liquida su deuda al efectuar el pago número 12?

En los problemas del 13 al 25 seleccione la opción correcta, justificando la elección.

13. El 35% de precio de un terreno de $872,000 se amortiza con 13 rentas mensuales fijas, haciendo la primera el día de la compra. Para el 65% restante se hacen 54 pagos mensuales que crecen 5.7% cada semestre, comenzando un mes después del último pago del anticipo. ¿De cuánto es cada pago que amortiza el enganche, si los intereses son del 16.5% efectivo?

a) $23,896.43 *b*) $24,670.10 *c*) $25,010.04 *d*) $25,311.15 *e*) Otra

***14.** En el problema 13, ¿de cuánto es la primera renta variable que amortiza el 65% restante?

a) $9,629.35 *b*) $8,963.41 *c*) $10,049.40 *d*) $9,019.46 *e*) Otra

15. Una inversión de US$225,000 al 5.02% nominal trimestral se recupera en 5 años con rentas trimestrales que crecen 6.5% cada trimestre. Determine el tamaño de la última renta.

a) US$23,282.15 *b*) US$22,365.88 *c*) US$23,429.61 *d*) US$22,425.42 *e*) Otra

16. En el problema 15 diga cuánto se tiene en la inversión luego de la séptima renta.

a) US$187,125.82 *b*) US$184,095.31 *c*) US$184,923.40 *d*) US$185,884.13 *e*) Otra

17. La profesora Laura Verónica compra un departamento con un anticipo del 25% y 60 mensualidades que crecen 4.3% cada año. ¿De cuánto son las primeras si se cargan intereses del 13.44% compuesto por meses y el precio fue de $765,000?

a) $8,587.89 *b*) $8,093.48 *c*) $8,163.41 *d*) $8,439.87 *e*) Otra

18. En el problema 17 determine de cuánto son los derechos adquiridos por la profesora, luego de hacer el pago 24.

a) $420,880.90 *b*) $432,421.03 *c*) $422,429.33 *d*) $402,158.05 *e*) Otra

***19.** La compañía aceitera Las Juntas contrata un crédito y lo amortiza con rentas mensuales de $35,000, durante 3 años a una tasa del 13.2% convertible mensualmente. Las ventas mejoran y deciden incrementar sus pagos cada mes, a partir del décimo. ¿En cuánto los incrementan si pretenden liquidar el préstamo en 24 meses como plazo total?

a) $3,097.25 *b*) $3,291.35 *c*) $3,450.03 *d*) $2,429.65 *e*) Otra

20. En el problema 19, ¿por qué cantidad se contrató el crédito?

a) $1'428,521.35 *b*) $1'035,798.22 *c*) $1'125,428.62 *d*) $1'373,402.55 *e*) Otra

21. ¿Cuánto debe invertirse al 10.5% nominal bimestral, para realizar 16 disposiciones bimestrales que crecen $1,250 de manera sucesiva y la primera es por $25,650?

a) $496,475.88 *b*) $502,421.36 *c*) $478,739.23 *d*) $490,602.71 *e*) Otra

22. ¿Cuánto se devenga por concepto de intereses en el problema 21?

a) $81,660.70 *b*) $86,029.32 *c*) $82,473.91 *d*) $80,797.29 *e*) Otra

***23.** ¿Cuál es el monto que se tiene luego de hacer la disposición 10 en el problema 21?

a) $272,429.35 *b*) $232,805.14 *c*) $233,175.16 *d*) $231,788.29 *e*) Otra

24. ¿Cuántas disposiciones quincenales pueden hacerse si se depositan $585,000 con intereses del 9.84% nominal quincenal, la primera es por $10,706 y crecen 0.7% cada quincena?

a) 51 *b*) 54 *c*) 50 *d*) 49 *e*) Otra

***25.** ¿Cuántos pagos semanales se necesitan para amortizar una deuda de US$100,000, si crecen 3% sucesivamente, se cargan intereses del 13% nominal semanal, y el primero por US$3,500 se realiza 3 meses después de lograr el préstamo? Ajustar al entero más cercano.

a) 21 de US$3,505.03 *b*) 22 de US$3,482.47 *c*) 23 de US$3,325.32
d) 20 de US$3,622.41 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Definir y explicar el concepto de amortización de créditos.
- Distinguir y expresar las características de los principales sistemas para amortizar créditos.
- Establecer la diferencia fundamental entre abono y amortización.
- Calcular la *renta,* el *plazo,* el *valor presente* y los *intereses* en amortizaciones de renta fija con la fórmula

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

- Obtener el plazo, la renta, el valor presente y los intereses en deudas con amortización constante con las fórmulas

$$R_1 = A(1 + ni) \text{ y } R_N = R_1 - (N - 1)d$$

donde: $A = C/np$ y $d = A(i/p)$

Y los intereses con la fórmula

$$I = (Ci/2p)(np + 1)$$

- Encontrar el *plazo*, la *renta* el *valor presente* y los *intereses* en las amortizaciones de renta variable:

a) Aritméticamente, con las fórmulas

$$C = T(R_1) + V(d) \quad \text{donde,} \quad T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

y

$$V = \frac{1-(1+np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

b) Geométricamente, con la fórmula

$$C = \frac{R_1}{f-i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right]$$

- Determinar el *saldo insoluto* de un crédito en cualquier periodo de la amortización, de renta fija o variable, de un crédito.
- Hacer el cálculo de los derechos transferidos al deudor sobre el bien que se amortiza.
- Calcular el monto con el que se transfiere o se traspasa un bien inmueble que se está amortizando, considerando el efecto inflacionario.
- Elaborar el *cuadro de amortización* de un crédito con renta fija o renta variable.

Conceptos importantes

Amortización constante
Amortización de renta variable
Amortización de un crédito
Amortización gradual, de renta fija
Cuadro de amortización
Derechos transferidos al deudor en la amortización de una deuda
Renta, plazo, valor presente y tasa de interés en la amortización de créditos amortización e intereses en cada abono
Saldo insoluto en la amortización de un crédito

Problemas propuestos para examenes

1. ¿Qué característica tiene el sistema de amortización gradual?

2. ¿De cuánto es el pago mínimo mensual para amortizar gradualmente un crédito de $75,000 con intereses del 15.27% compuesto por meses?

3. ¿Cuántos pagos bimestrales de $9,685 se necesitan para amortizar un crédito de $80,000, con intereses a una tasa del 10.5% nominal bimestral? ¿A cuánto ascienden los intereses?

4. ¿Calcule el tamaño de un crédito que se amortiza con 30 rentas quincenales de $2,785, con intereses del 12.24% anual compuesto por quincenas?

***5.** Se compra una casa y se paga con un enganche del 42% y un crédito a 5 años, a una tasa de interés del 12.96% capitalizable por meses. Suponiendo que crecen 0.6% cada mes, obtenga:

a) El cuadro de amortización en sus primeras 4 filas y la última. Los pagos son mensuales y el primero es de $7,000.

b) Los intereses que se devengan en total.

c) El saldo insoluto luego de hacer el abono 36.

d) Monto del traspaso de la casa, poco después de efectuar la mitad de los abonos, considerando que su valor haya aumentado con la inflación del 0.92% bimestral y que los gastos fijos fueron de $35,000.

***6.** Obtenga el tamaño de los pagos quincenales que se necesitan para amortizar constantemente un crédito de $147,000, considerando 7 meses de plazo e intereses del 12% capitalizable por quincenas. Encuentre los intereses y haga el cuadro de amortización.

7. Elabore el cuadro de amortización en sus primeros renglones y el último, si un crédito se amortiza con 15 rentas bimestrales que crecen $250 sucesivamente. Suponga intereses del 18.72% nominal bimestral y el primer abono de $6,725.

***8.** Resuelva el problema 7, considerando que los abonos se incrementan 1.12% sucesivamente.

9. ¿Cuánto dinero se carga por intereses en el problema 7?

***10.** ¿Por cuántos pesos son las primeras rentas trimestrales que amortizan un crédito de $1'275,000, con cargos del 14.16% nominal trimestral si crecen 1.15% sucesivamente? Suponga que el plazo es de 4 años que incluye un periodo de gracia de 9 meses.

11. El primer pago bimestral para amortizar un crédito con intereses del 13.8% nominal bimestral es de $10,720. ¿Por cuánto dinero fue el crédito si son 18 rentas y crecen $225 sucesivamente?

12. La entidad gubernamental encargada de los caminos y puentes federales hace una inversión al 8.4% anual capitalizable por trimestres, para disponer de retiros trimestrales que crecen 1.3% cada trimestre durante 4 años. El primero será de $750,000 y se hará a 3 años de realizar la inversión. Determine el capital que invierte.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

En los problemas 13 al 20 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

13. El abono y la amortización son conceptos iguales. _____________

14. En la amortización gradual, el primer abono puede ser menor que los intereses del periodo. _____________

15. En la amortización de renta fija, las amortizaciones crecen con el tiempo. _____________

16. En la amortización constante los abonos crecen con el tiempo. _____________

17. En amortizaciones de renta variable, el primer abono debe ser mayor que los intereses del primer periodo. _____________

18. La suma de los intereses y la amortización en cada pago es igual a la renta. ____________

19. Los derechos transferidos al deudor y el saldo insoluto son numéricamente iguales. _____________

20. Si un crédito se amortiza gradualmente, los abonos son constantes. _____________

Seleccione la opción correcta en los problemas del 21 al 31, justificando su elección.

***21.** ¿Cuánto debe invertirse ahora para disponer de 25 rentas mensuales que crecen $180, la primera es de $11,560 y los intereses son del 7.8% nominal mensual?

a) $323,088.90 *b*) $301,495.36 *c*) $314,243.18 *d*) $310,987.40 *e*) Otra

22. Resuelva el problema 21, considerando que las rentas crecen sucesivamente en 1.5%.

a) $302,425.05 *b*) $318,206.84 *c*) $319,352.17 *d*) $328,425.03 *e*) Otra

23. El señor Ramírez consigue un crédito de $875,000, con intereses del 15.3% anual capitalizable por bimestres. ¿De cuánto es el primer abono bimestral si son 12 y crecen 1.25% sucesivamente?

a) $80,133.64 *b*) $80,875.23 *c*) $81,209.73 *d*) $82,429.61 *e*) Otra

24. ¿Cuánto paga por concepto de intereses el señor Ramírez del problema 23?

a) $154,682.32 *b*) $155,547.57 *c*) $160,401.32 *d*) $153,923.28 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago mensual 25 por $6,300, en la amortización gradual de un crédito con intereses del 19.6% anual, compuesto por meses, en un plazo de 4 años?

a) $120,981.34 *b*) $118,063.41 *c*) $117,322.82 *d*) $119,988.42 *e*) Otra

***26.** ¿De cuánto son 2 pagos iguales que cancelan el resto de la deuda del problema 25, considerando que se hacen al final de los meses 14 y 21? Considere que se habían realizado los primeros 13.

a) $88,284.52 *b*) $86,421.04 *c*) $89,637.70 *d*) $92,347.67 *e*) Otra

***27.** En el problema 25, ¿de cuánto fue el ahorro por intereses, al sustituir los 25 pagos mensuales que restan por solo 2 iguales?

a) $39,695.32 *b*) $42,428.71 *c*) $41,224.60 *d*) $40,784.64 *e*) Otra

28. ¿Cuántos pagos mensuales se requieren para amortizar un crédito de $118,240, considerando que crecen 1% sucesivamente, el primero es de $7,285 y los cargos son del 15.9% nominal mensual? Haga un ajuste a las rentas redondeando al entero más cercano.

a) 15 con r_1 de 7,353.20
b) 20 con r_1 de 6,908.75
c) 17 con r_1 de 7,230.03
d) 16 con r_1 de 7,521.45
e) Otra

***29.** En el problema 28, ¿con cuánto se cancela la deuda al hacer el abono 11?

a) $50,029.35 *b*) $45,369.85 *c*) $48,048.21 *d*) $47,502.94 *e*) Otra

***30.** Para ampliar sus instalaciones, Llantas y Servicios obtiene un crédito de $620,000 que amortiza con 25 mensualidades que se reducen sucesivamente en 0.8%, e intereses del 14.52% nominal mensual. ¿Por cuánto es el último abono?

a) $27,909.12 *b*) $26,059.27 *c*) $28,968.42 *d*) $25,121.83 *e*) Otra

31. ¿Cuánto debe invertirse en una cuenta que bonifica intereses del 7% efectivo, para disponer de 25 rentas mensuales que crecen 0.9% cada mes? Suponga que la primera es por $8,275.

a) $256,321.03 *b*) $214,138.13 *c*) $210,116.49 *d*) $275,609.28 *e*) Otra



Capítulo 7

Constitución de fondos

Contenido de la unidad

El material de este capítulo constituye otra interesante aplicación de las anualidades anticipadas relacionando una serie de rentas con su valor futuro al final del plazo.

Si todas las rentas son iguales, se utiliza la ecuación 5.1, pero si son variables se emplean las ecuaciones del capítulo anterior, ya sea que varíen aritmética o geométricamente, en todo caso cada renta se considera al iniciar un periodo.

7.1 Conceptos generales y definiciones

Puede suceder que al otorgar un préstamo, al acreedor por simple comodidad no le interese recibir su dinero en partes, sino el total equivalente al finalizar el plazo. De igual manera, al deudor puede serle difícil o imposible liquidarlo con un desembolso único al final, por lo que entonces tendrá la opción de realizar pagos parciales en una cuenta que por esa característica se denomina *fondo de amortización*.

Es evidente que se constituyen fondos con otros propósitos, como por ejemplo para la reposición de maquinaria y equipo que actualmente está en servicio, como prevención para los gastos de jubilación de un empleado, para la construcción y el mantenimiento de puentes y carreteras, para comprar a futuro un automóvil o cualquier otro bien, etcétera. Así, nos encontramos con fondos de jubilación, de ahorro, de investigación, vacacionales, etcétera, cuyo calificativo es acorde con el fin que se persigue al constituir el fondo.

Algunas ventajas de constituir un fondo para adquirir un bien son:

- Al pagar de contado puede conseguirse un descuento considerable.
- Se elude el pago de altos intereses y cargos por comprar a crédito, aunque en la actualidad muchos comerciantes ofrecen sus artículos a crédito y supuestamente sin intereses, aunque lo más importante es que el deudor se acostumbra y adquiere el hábito del ahorro.
- La mayoría de las personas liquida sus obligaciones más fácilmente con abonos parciales que con un pago único al hacer la compra.

Definición 7.1

Fondo es la cantidad de dinero que se acumula con pagos periódicos devengando intereses para lograr un monto acumulado, previamente preestablecido generalmente.

Por supuesto que puede darse que el capital o depósito inicial al constituir el fondo, sea mayor que los subsecuentes, y también es posible que haya varias disposiciones creando un flujo de caja con entradas y salidas de capital. Asimismo, es cierto que cuando el fondo es para amortizar un crédito, la tasa de interés es independiente de la tasa con la que se consiguió el mismo.

7.2 Fondo de renta fija

Como se dijo antes, en esta clase de fondos se utiliza la ecuación para el monto de las anualidades anticipadas.

$$M = R(1 + i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right] \quad \text{Teorema 5.1}$$

Ejemplo 1




Monto acumulado en un fondo de ahorro

Para comprar un automóvil al terminar sus estudios, dentro de 3 años, un estudiante constituye un fondo de ahorro con depósitos quincenales anticipados de $1,850 e intereses del 10.32% nominal quincenal. ¿Cuánto dinero faltará si sabe que el precio actual del pretendido automóvil es de $135,000, mismo que se incrementará un 9% anual en promedio por efectos de la inflación y otros factores?

solución

Para el monto acumulado en el fondo durante 3 años, 72 rentas, sereemplazan en la ecuación 5.1.

$R = 1{,}850$, la renta quincenal

$i = 0.1032$, la tasa nominal quincenal

$n = 3$, el plazo en años

$p = 24$, la frecuencia de conversión, además

$i/p = 0.0043$ y $np = 72$, el número de rentas, entonces:

$$M = 1{,}850(1 + 0.1032/24)\left[\frac{(1.0043)^{72} - 1}{0.0043}\right] \qquad M = R(1 + i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = 1{,}850(1.0043)(84.18036233)$$

o bien, $M = \$156{,}403.33$

El precio del automóvil con el incremento anual dado será de:

$$P = 135{,}000(1 + 0.09)^3$$

o bien, $P = \$174{,}828.92$

la diferencia $P - M$ es lo que faltará para comprarlo:

$$174{,}828.92 - 156{,}403.33 = \$18{,}425.59$$

Ejemplo 2



¿Cuánto debe depositar cada trimestre el ingeniero Carlos Ignacio en un fondo de reposición de maquinaria de construcción pesada para acumular US$950,000 en 2.75 años? Suponga que se ganan intereses del 9.2% anual capitalizable por trimestres, y obtenga los intereses.

solución

a) La incógnita es R, que se obtiene al sustituir en la ecuación 5.1 los valores dados.

$$950{,}000 = R(1 + 0.092/4)\left[\frac{(1.023)^{11} - 1}{0.023}\right] \qquad C = R(1 + i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$950{,}000 = R(1.023)(12.35643243)$$

de donde:

$$R = 950{,}000/12.64063038$$

o bien, $R = \text{US\$}75{,}154.48$

b) Los intereses son la diferencia entre el monto y las 11 rentas

$$I = 950{,}000 - 11(75{,}154.48)$$

o bien, $I = \text{US\$}123{,}300.72$

Ejercicios 7.2

1. Explique qué son los fondos de renta fija y cómo se calculan sus elementos.

***2.** Con el propósito de contar con $18,000 para comprar muebles para su casa, el matemático Alavez crea un fondo de ahorro con abonos quincenales de $2,537. ¿Cuándo debe empezar si gana intereses a una tasa del 8.1% compuesto por quincenas?

3. Para los gastos de su graduación dentro de 5 semestres, una estudiante de administración de empresas crea un fondo con rentas mensuales de $650. ¿Cuánto acumulará si empieza ahora y gana el 9.3% de interés nominal mensual?

***4.** Un empresario consigue un crédito de $950,000, que pagará al final de 2 años con intereses a una tasa del 12.6% nominal bimestral. Simultáneamente constituye un fondo de amortización en un banco que le reditúa el 9% de interés capitalizable por meses. Obtenga la renta mensual y los intereses del fondo.

5. La señora Aguilar pone a disposición de una casa de empeño un televisor, por el que le prestan $3,500, incluyendo los intereses de 6 meses de plazo, ¿cuánto deberá depositar cada quincena en un fondo que le genera intereses a una tasa del 7.2% compuesto por quincenas durante los 6 meses?

6. Para recuperar un pagaré con valor nominal de $142,500, una mueblería crea un fondo con 9 pagos quincenales previos al vencimiento, con intereses a una tasa del 9.08%. ¿De cuánto es cada uno de los depósitos?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

7. La compañía Siderúrgica del Centro crea un fondo de jubilación con 15 rentas trimestrales de $50,000, ganando intereses a una tasa del 8.28% compuesto por trimestres. ¿De qué monto dispondrá 5 años después de haber comenzado?

8. Para construir su nuevo estadio de béisbol, el Club Social y Recreativo de Occidente necesita $10'575,000 en 10 meses, contados a partir de ahora. Con tal fin, se constituye un fondo con depósitos mensuales desde ahora a una tasa de interés del 10.68% compuesto por meses. ¿De cuánto es la renta mensual?

9. Para construir un centro vacacional, la compañía Desarrollos Turísticos de la Riviera constituye un fondo con 15 rentas mensuales de 1.8 millones de pesos. ¿Cuánto acumula si devenga una tasa de interés del 7.2% nominal mensual?

10. La concesionaria de una autopista crea un fondo con reservas bimestrales de 9.11 millones de pesos cada una, ganando intereses a una tasa del 6.96% compuesto por bimestres. ¿En cuánto tiempo iniciará un nuevo proyecto si se estima que requerirá de 150 millones de pesos?

En los problemas 11 a 17 diga si la afirmación es falsa o verdadera, justificando su respuesta.

11. Con 14 rentas mensuales de US$325 se acumulan US$4,736.87 en un fondo que paga intereses del 6.42% nominal mensual. __________

***12.** El señor Valencia consigue un crédito por $47,250, con un plazo de 8 meses y cargos del 9.66% de interés simple anual. Simultáneamente crea un fondo de amortización con rentas quincenales anticipadas de $2,950.00 e intereses del 8.4% nominal quincenal, al final le faltan $1,663.82 para recuperar el pagaré correspondiente. __________

13. Los intereses que en total desembolsa el señor Valencia en el problema 12 son de $1,429.08. __________

14. Con abonos mensuales de $5,850.00 en el problema 12, al final del plazo faltarán $3,643.02 para recuperar el documento. __________

***15.** Con 18 depósitos bimestrales de $216,512.84 en un fondo para la instalación y financiamiento de un moderno laboratorio de análisis clínicos, el Hospital Civil de la ciudad dispondrá de $1'750,000, 3 años después de la creación del fondo y de $20,210.00 al final de cada mes por tiempo ilimitado a partir de esa fecha, considerando intereses del 8.84% nominal mensual. __________

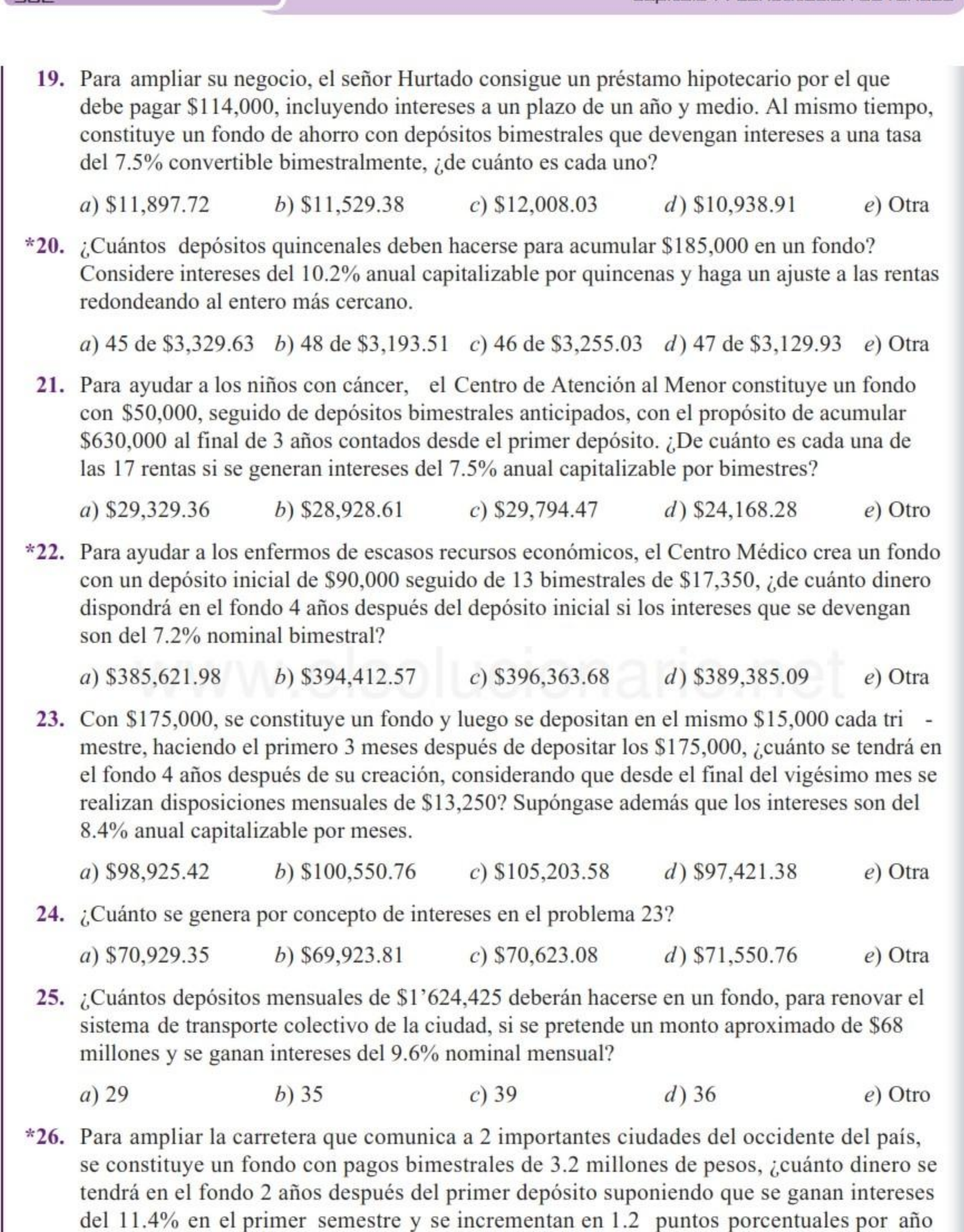
16. Con 25 depósitos quincenales de $17,500 se acumulan $451,415.73 en un fondo que bonifica intereses del 5.76% nominal quincenal. __________

***17.** Para disponer de $10,511.26 al final de cada mes por tiempo ilimitado desde 2 años después de iniciar con 8 depósitos bimestrales de $165,300 se necesita ganar con el 8.49% de interés anual convertible por bimestres. __________

En los problemas del 18 al 29, seleccione la opción correcta, justificando su elección.

18. Para pagar un crédito de $175,000 la compañía Refacciones y Servicios crea un fondo con depósitos mensuales que devengan intereses del 9.36% nominal mensual. ¿De cuánto es cada renta si en el préstamo se cargan intereses del 10.8% simple anual y el plazo es de 8 meses?

a) $22,640.68 *b*) $21,709.38 *c*) $22,923.42 *d*) $21,963.09 *e*) Otro



19. Para ampliar su negocio, el señor Hurtado consigue un préstamo hipotecario por el que debe pagar $114,000, incluyendo intereses a un plazo de un año y medio. Al mismo tiempo, constituye un fondo de ahorro con depósitos bimestrales que devengan intereses a una tasa del 7.5% convertible bimestralmente, ¿de cuánto es cada uno?

a) $11,897.72 *b*) $11,529.38 *c*) $12,008.03 *d*) $10,938.91 *e*) Otra

***20.** ¿Cuántos depósitos quincenales deben hacerse para acumular $185,000 en un fondo? Considere intereses del 10.2% anual capitalizable por quincenas y haga un ajuste a las rentas redondeando al entero más cercano.

a) 45 de $3,329.63 *b*) 48 de $3,193.51 *c*) 46 de $3,255.03 *d*) 47 de $3,129.93 *e*) Otra

21. Para ayudar a los niños con cáncer, el Centro de Atención al Menor constituye un fondo con $50,000, seguido de depósitos bimestrales anticipados, con el propósito de acumular $630,000 al final de 3 años contados desde el primer depósito. ¿De cuánto es cada una de las 17 rentas si se generan intereses del 7.5% anual capitalizable por bimestres?

a) $29,329.36 *b*) $28,928.61 *c*) $29,794.47 *d*) $24,168.28 *e*) Otro

***22.** Para ayudar a los enfermos de escasos recursos económicos, el Centro Médico crea un fondo con un depósito inicial de $90,000 seguido de 13 bimestrales de $17,350, ¿de cuánto dinero dispondrá en el fondo 4 años después del depósito inicial si los intereses que se devengan son del 7.2% nominal bimestral?

a) $385,621.98 *b*) $394,412.57 *c*) $396,363.68 *d*) $389,385.09 *e*) Otra

23. Con $175,000, se constituye un fondo y luego se depositan en el mismo $15,000 cada trimestre, haciendo el primero 3 meses después de depositar los $175,000, ¿cuánto se tendrá en el fondo 4 años después de su creación, considerando que desde el final del vigésimo mes se realizan disposiciones mensuales de $13,250? Supóngase además que los intereses son del 8.4% anual capitalizable por meses.

a) $98,925.42 *b*) $100,550.76 *c*) $105,203.58 *d*) $97,421.38 *e*) Otra

24. ¿Cuánto se genera por concepto de intereses en el problema 23?

a) $70,929.35 *b*) $69,923.81 *c*) $70,623.08 *d*) $71,550.76 *e*) Otra

25. ¿Cuántos depósitos mensuales de $1'624,425 deberán hacerse en un fondo, para renovar el sistema de transporte colectivo de la ciudad, si se pretende un monto aproximado de $68 millones y se ganan intereses del 9.6% nominal mensual?

a) 29 *b*) 35 *c*) 39 *d*) 36 *e*) Otro

***26.** Para ampliar la carretera que comunica a 2 importantes ciudades del occidente del país, se constituye un fondo con pagos bimestrales de 3.2 millones de pesos, ¿cuánto dinero se tendrá en el fondo 2 años después del primer depósito suponiendo que se ganan intereses del 11.4% en el primer semestre y se incrementan en 1.2 puntos porcentuales por año cada semestre?

a) $40'375,421.08 *b*) $44'143,624.87 *c*) $42'860,045.33 *d*) $43'968,953.42 *e*) Otra

***27.** ¿De cuánto debe ser el depósito inicial seguido de 35 depósitos mensuales de $18,000, con intereses del 9.63% nominal mensual en el fondo que el Instituto de Investigaciones Oncológicas constituye para disponer de $27,000 trimestrales por tiempo ilimitado a partir de los 5 años contados desde el depósito inicial?

a) $141,833.08 *b*) $140,036.61 *c*) $141,356.02 *d*) $140,735.03 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero se devenga por concepto de intereses en el fondo del problema 23 durante los 5 años?

a) $358,329.95 *b*) $324,157.13 *c*) $321,783.94 *d*) $341,187.25 *e*) Otra

29. ¿Cuánto dinero se tiene en el fondo del problema 27, 4 años después de que se constituyó?

a) $1'036,423.83 *b*) $1'095,428.71 *c*) $983,293.65 *d*) $1'010,790.78 *e*) Otra

7.3 Cuadro de constitución de fondos

Como en la amortización de un crédito, en la constitución de fondos es útil hacer un cuadro donde se refleja la manera en que crece el monto y varían los intereses cada vez que se hace un depósito.

En los ejemplos siguientes se explica el procedimiento para hacer tal cuadro, comenzando con el caso más simple, cuando todos los depósitos y la frecuencia con que se realizan son iguales.

Ejemplo 1

Monto y cuadro en un fondo de ahorro

Para sus vacaciones dentro de 7 meses, un padre de familia crea un fondo de ahorro con depósitos mensuales de $3,600. Halle el monto acumulado y haga el cuadro del fondo, considerando que la inversión reditúa el 8.28% de interés capitalizable por meses.

solución

Recuerde que al no especificar lo contrario, los depósitos se realizan al comenzar cada periodo y el monto se calcula con la ecuación 5.1 con:

R = $3,600, la renta mensual

$i = 0.0828$, la tasa de interés anual compuesta por meses

$p = 12$, la frecuencia de conversión y de pagos

$np = 7$, el número de rentas

$i/p = 0.0828/12 = 0.0069$, la tasa por periodo, entonces

$$M = 3{,}600(1.0069)\left[\frac{(1.0069)^7 - 1}{0.0069}\right]$$

$$M = 3{,}600(1.0069)(7.146577826) \quad \text{o bien,} \quad M = \$25{,}905.20$$

El cuadro es el siguiente, que es útil para comprobar los resultados y se inició anotando la renta mensual en todos los renglones de la segunda columna y en el primero de la tercera.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	3,600.00	3,600.00	24.84	3,624.84
2	3,600.00	7,224.84	49.85	7,274.69
3	3,600.00	10,874.69	75.04	10,949.73
4	3,600.00	14,549.73	100.39	14,650.12
5	3,600.00	18,250.12	125.93	18,376.05
6	3,600.00	21,976.05	151.63	22,127.68
7	3,600.00	25,727.68	177.52	25,905.20

Note que:

Para hacer este cuadro:

- Los intereses del primer periodo son el resultado de multiplicar el capital, es decir, la primera renta, por la tasa de interés por periodo i/p

$$I_1 = 3{,}600.00(0.0069)$$

o bien, $I_1 = 24.84$

- El monto al final de este primer periodo es la suma del capital más los intereses

$$M_1 = 3{,}600 + 24.84 \quad \text{o bien,} \quad M_1 = 3{,}624.84$$

- Este monto se suma con la segunda renta, para obtener el segundo capital

$$C_2 = 3{,}624.84 + 3{,}600 \quad \text{o bien,} \quad C_2 = 7{,}224.84$$

que se multiplica por la tasa de interés de un periodo, para obtener así los intereses del segundo renglón

$$I_2 = 7{,}224.84(0.0069) \quad \text{o bien,} \quad I_2 = 49.85$$

- El monto al final del segundo periodo mensual es igual a la suma del capital más estos intereses.

$$M_2 = C_2 + I_2$$
$$M_2 = 7{,}224.84 + 49.85 = 7{,}274.69$$

Se continúa con este proceso hasta la terminación del cuadro, insistiendo en que el valor de la segunda columna es el capital al inicio del periodo, luego de hacer el depósito correspondiente, mientras que en la última columna está el monto al final del mismo periodo incluyendo los intereses.

Ejemplo 2

Renta bimestral y cuadro en un fondo de reservas

La Urbanizadora de Oriente, S. A., compra maquinaria con valor de 2.4 millones de pesos mediante un crédito bancario a una tasa de interés del 20% simple anual, que liquidará con un pago único a los 2 años. Simultáneamente constituye un fondo con reservas bimestrales que ganan una tasa del 18% de interés nominal bimestral. ¿De cuánto es cada una? Haga el cuadro del fondo en sus primeros 3 renglones y el último.

solución

El monto acumulado en el fondo debe ser igual al valor futuro del crédito, el cual se obtiene con la fórmula del interés simple.

$$M = 2.4(1 + 2(0.20)) \qquad M = C\,(1 + ni)$$

$$M = 3.36 \text{ millones de pesos}$$

En la ecuación 5.1 se reemplazan, además:

$n = 2$, el plazo en años

$p = 6$, el número de pagos por año

$np = 12$, el total de pagos

$i = 0.18$, la tasa anual

$i/p = 0.18/6 = 0.03$, la tasa por bimestre

R es la incógnita; por lo tanto con la renta y el monto en millones, queda:

$$3.36 = R(1.03)\left(\frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03}\right)$$

$$3.36 = R(1.03)(14.19202957)$$

$$3.36 = R(14.61779046)$$

de donde: $R = 3.36/14.61779046$

$R = 0.2298569$ millones o bien, $R = \$229{,}856.90$

Con esta renta en todos los renglones de la segunda columna, se comienza el cuadro del fondo, cuyos primeros 3 y último renglones son:

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	$229,856.90	$229,856.90	$6,895.707	$236,752.607
2	$229,856.90	$466,609.507	$13,998.285	$480,607.792
3	$229,856.90	$710,464.692	$21,313.940	$731,778.633
⋮				
11				
12	$229,856.90	$3’262,135.922	$97,864.078	$3’360,000.000

Para el último renglón, note que la suma del capital C y los intereses debe ser igual al último monto; esto es:

$$C + 0.03C = 3'360,000$$

de donde: $$C(1 + 0.03) = 3'360,000$$

$$C = 3'360,000/1.03 \quad \text{o bien,} \quad C = \$3'262,135.922$$

y los intereses son:

$$I_{12} = 3'262,135.922(0.03) = \$97,864.078$$

que se anotan en la cuarta columna.

Ejercicios 7.3

1. ¿Qué usos tiene un cuadro de constitución de fondos?

*2. ¿Cuánto debe depositar cada trimestre en un fondo una constructora que pretende tener 1.5 millones de pesos en 2.5 años para reposición de maquinaria, suponiendo que gana un interés a una tasa del 7.2% anual compuesta por trimestres? Elabore el cuadro del fondo en sus primeros 3 y último renglones.

3. Para ampliar su planta de producción, la Fábrica de Zapatos Sandrita crea un fondo con reservas mensuales de $65,000 e intereses del 8.76% anual capitalizable por meses. Haga el cuadro en sus 3 primeros renglones y el último suponiendo que son 20 mensualidades.

4. La Empacadora Popular constituye un fondo de jubilación con depósitos mensuales de $25,000 en una institución que le bonifica el 9.54% nominal mensual, ¿de cuánto dinero puede disponer en el fondo 5 años después del primer pago? Haga un cuadro del fondo en sus primeras 3 filas y la última.

5. Elabore las primeras 3 filas y la última del cuadro del fondo que se constituyó con depósitos trimestrales de $27,500 durante 3 años, devengando intereses a una tasa del 7.23% compuesto por trimestres.

6. Para jubilar a sus empleados, la administración de la compañía Aluminios del Sur, S. A ., crea un fondo en una institución que le reditúa una tasa de interés del 6.3% efectivo. Halle la magnitud de los depósitos bimestrales, si pretende acumular $675,000 en 3 años y haga el cuadro correspondiente.

7. Un empresario sabe que necesitará $800,000, dentro de año y medio. ¿De cuánto será el depósito mensual que deberá hacer en un fondo que le dé a ganar el 8.24% convertible mensualmente? Haga el cuadro del fondo.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***8.** ¿Cuántos depósitos mensuales de $69,865 deberá hacer una institución educativa para lograr un monto de $1'250,000 en un fondo de investigación que reditúa el 7% de interés efectivo? Haga el cuadro del fondo en sus primeros 3 renglones y el último. ¿Cuánto dinero se tendrá en el fondo luego de hacer el decimoprimer depósito?

Justificando su respuesta diga si la afirmación es falsa o verdadera en los problemas 9 a 12.

9. Son los primeros renglones del cuadro del fondo con 15 depósitos quincenales de $4,325 e intereses del 6.9% nominal quincenal. __________

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	4,325.00	4,325.00	12.4344	4,337.4344
2	4,325.00	8,662.4344	24.9045	8,687.3389
3	4,325.00	13,012.3389	37,4105	13,049.7493

10. La última fila del cuadro en el problema 9 es la que sigue: __________

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
⋮				
15	4,325.00	66,197.0168	190.3164	66,387.3332

11. El monto que se acumula con 20 rentas mensuales en el fondo del cuadro siguiente es $477,270.25. __________

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	21,750.00	21,750.00	190.3125	21,940.3125
2	21,750.00	43,690.3125	382.2902	44,072.6027
⋮				

12. El siguiente es el décimo primer renglón del cuadro del fondo con 18 rentas mensuales de $7,325.00 con intereses del 7.5% anual compuesto por meses. __________

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
⋮				
10				
11	7,325.00	83,140.7757	519.6298	83,660.4056

Seleccione la opción correcta en los problemas del 13 al 26, justificando su elección.

***13.** ¿Cuánto dinero se acumula en un fondo, 8 años después de que un grupo de futbolistas profesionales crearon con US$475,000, seguidos de 40 depósitos mensuales de US$30,000 cada uno con intereses del 7.2% anual capitalizable por meses? Elabore el cuadro en sus primeras filas y la última.

a) 2'685,586.68 *b*) 2'733,101.77 *c*) 2'598,629.31 *d*) 2'804,628.07 *e*) Otra

14. Al continuar el cuadro del fondo del problema 13, se observa que el monto, después de 6 pagos, incluyendo el de apertura es de:

a) US$641,398.35 *b*) US$661,386.40 *c*) US$645,080.26 *d*) US$597,398.63 *e*) Otra

15. Los intereses que se generan en el sexto periodo en el fondo del problema 13, según el cuadro, son:

a) $4,625.33 *b*) $3,695.41 *c*) $3,847.40 *d*) $4,329.63 *e*) Otra

***16.** Haga el cuadro del fondo, los primeros renglones y el último, que se constituye con un depósito inicial y 25 mensuales de $13,720 devengando intereses del 9.93% anual capitalizable por meses. Considere que se acumulan $450,000 al final de 2.5 años y obtenga el depósito de apertura.

a) $40,628.35 *b*) $41,786.05 *c*) $42,735.07 *d*) $42,129.86 *e*) Otra

17. El primer depósito quincenal de un total de 36, en un fondo de ahorro, es por $4,500 y los intereses que se generan en el primer periodo son de $26.0625, ¿cuál es el monto acumulado? Elabore el cuadro en sus primeros renglones y el último.

a) $180,590.50 *b*) $197,728.42 *c*) $185,961.42 *d*) $190,968.78 *e*) Otro

18. ¿Cuál es la tasa efectiva en el problema 17?

a) 15.7019% *b*) 16.4130% *c*) 15.0962% *d*) 14.8663% *e*) Otra

***19.** ¿De cuánto es el monto que se acumula con 35 depósitos mensuales, incluyendo el primero, en el fondo que se inicia con el siguiente cuadro, considerando que no cambian la tasa de interés ni los depósitos.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	72,000.00	72,000.00	577.80	72,577.80
2	9,500.00	82,077.80	658.67	82,736.47
3	9,500.00	92,236.47	740.20	92,976.67

a) $445,721.91 *b*) $456,901.32 *c*) $467,877.89 *d*) $501,791.01 *e*) Otra

***20.** El 25 de marzo de 2012 se crea un fondo de restitución de maquinaria obsoleta con $47,500, el 8 de junio siguiente se depositan otros $61,350 y a partir del 15 de agosto, 7 depósitos bimestrales de $28,300 cada uno, ¿cuánto se tendrá el 15 de octubre de 2013 considerando intereses del 10.32% anual capitalizable por bimestres? Haga el cuadro del fondo y compruebe el resultado.

a) $338,429.18 *b*) $360,121.02 *c*) $315,961.36 *d*) $348,068.37 *e*) Otra

21. En el problema 20, ¿cuánto dinero se ganó por concepto de intereses?

a) $35,206.47 *b*) $34,709.21 *c*) $36,168.91 *d*) $31,479.19 *e*) Otra

22. La administración de Empaques del Centro constituye un fondo de amortización con reservas mensuales de $30,800, ¿cuánto le faltará para liberar un documento de $600,000 si le bonifican intereses del 8.46% nominal mensual? Escriba los primeros renglones y el último del cuadro del fondo, y suponga que el plazo es de 3 semestres.

a) $7,600.00 *b*) $6,942.95 *c*) $6,368.35 *d*) $8,960.00 *e*) Otra

23. ¿Cuánto gana por intereses la compañía del problema 22?

a) $40,629.36 *b*) $39,025.08 *c*) $38,657.05 *d*) $42,923.95 *e*) Otra

24. La Asociación Ganadera constituye un fondo para servicios médicos y hospitalarios, con depósitos semestrales de $150,000 y $45,000 en los meses intermedios. ¿De cuánto dispondrá al término de 5 años si le pagan intereses del 10.5% anual capitalizable por meses? Haga el cuadro en las primeras filas y la última.

a) $3'750,429.05 *b*) $4'820,923.21 *c*) $4'977,563.88 *d*) $4'536,098.83 *e*) Otra

***25.** Resuelva el problema 24 considerando que desde el vigésimo mes se realizan disposiciones trimestrales anticipadas de $53,000.

a) $3'725,496.03 *b*) $4'537,216.81 *c*) $4'219,159.36 *d*) $4'146,281.98 *e*) Otra

26. ¿Cuántas aportaciones quincenales de $1,832 se necesitan para disponer al final de $56,000 aproximadamente en un fondo de jubilación que bonifica intereses del 8.4% nominal quincenal? Haga el cuadro del fondo en sus primeras filas.

a) 26 *b*) 30 *c*) 28 *d*) 29 *e*) Otra

7.4 Fondos de renta variable

Estos fondos son más usuales cuando los índices inflacionarios son considerablemente altos, ya que la variación en las rentas se mantiene al ritmo de crecimiento o decrecimiento, del valor del dinero con el paso del tiempo.

De manera similar a las amortizaciones, las rentas varían aritméticamente, con una diferencia común o varían geométricamente, con una razón constante, aunque también es posible que varíen una por una o por grupos.

Variación aritmética

Con las fórmulas del teorema 6.3 para el capital de una anualidad ordinaria con rentas que varían aritméticamente, se desarrollan otras para el monto acumulado en un fondo con np rentas. Se ilustra en las figuras 7.1 y 7.2 donde se suponen 10 rentas.

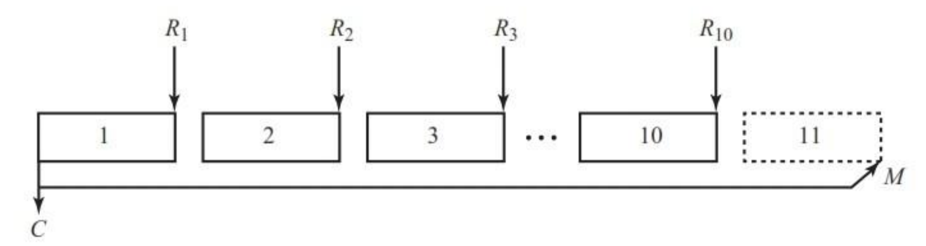


Figura 7.1

Figura 7.2

Puesto que cada renta al final de un periodo es lo mismo que al inicio del siguiente las figuras 7.1 y 7.2 con equivalentes, dado que la segunda corresponde al valor futuro de las mismas 10 rentas anticipadas.
El monto M es entonces:

$$M = C(1 + i/p)^{11} \text{ o bien, } M = C(1 + i/p)^{np+1} \text{ en general.}$$

Como $C = TR_1 + Vd$ este monto es expresable como:

$$M = (TR_1 + Vd)(1 + i/p)^{np+1} \qquad \textbf{(A)}$$

donde recuérdese

$$T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

y

$$V = \frac{1-(1-np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación **(A)** y luego de algunos pasos algebraicos en las leyes de exponentes, principalmente, se llegará a las ecuaciones del teorema siguiente.

Teorema 7.1

El monto M del fondo constituido con np pagos anticipados que varían con una diferencia común d está dado por:

$$M = (1 + i/p)(A + B)$$

donde:
$$A = R_1\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

además
$$B = d\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1-(np)(i/p)}{(i/p)^2}\right)$$

R_1 es el primer depósito en el fondo, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año y n es el plazo en años.

Note que:

- Si las rentas son vencidas, este monto se anticipa un periodo dividiéndolo entre $(1 + i/p)$, es decir, que siendo así el monto será simplemente

$$M = A + B$$

- La fórmula para A en este teorema es semejante a la que se utiliza para hallar el valor acumulado de las anualidades ordinarias como si R_1 fuera la renta fija.
- También es cierto que el término $(np)(i/p)$ puede simplificarse como ni, pero por el contexto en este libro es más práctico no simplificarlo.

Ejemplo 1

Ⓕ



Para construir y poner en servicio una nueva sucursal, la cadena de tiendas de autoservicio Vipart constituye un fondo con 8 rentas mensuales que crecen $200,000 cada una, siendo la primera por 2.5 millones de pesos, ganando intereses a una tasa del 12.9% anual capitaliza - ble por meses, ¿cuánto acumula?

solución

Los valores a sustituir en las ecuaciones del teorema 7.1 son:

$R_1 = 2.5$ millones, la primera renta

$n = 8/12$, el plazo en años

$p = 12$, la frecuencia de conversión y de pagos

$d = 0.2$ millones, la diferencia entre los pagos

Además; la tasa de interés anual es $i = 0.129$, la mensual es $i/p = 0.01075$ y el número de rentas $np = 8$

Entonces:

$$A = 2.5\left[\frac{(1.01075)^8 - 1}{0.01075}\right] \qquad A = R_1\left[\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$A = 2.5(8.307559256) \quad \text{o bien,} \quad A = 20.76889814$$

$$B = 0.2\left[\frac{(1.01075)^8 - 1 - (8)(0.01075)}{(0.01075)^2}\right] \qquad B = d\left[\frac{(1+i/p)^{np} - 1 - (np)(i/p)}{(i/p)^2}\right]$$

$$B = 0.2(28.61016333) \quad \text{o bien,} \quad B = 5.722032666$$

Por lo tanto, el monto en el fondo es:

$$M = (1.01075)(20.76889814 + 5.722032666)$$

$$M = 26.77570832 \quad \text{o bien,} \quad M = \$26'775,708.32$$

Solución alterna

Otra forma de obtener este resultado consiste en aplicar las ecuaciones del teorema 6.3. Ver las figuras 7.1 y 7.2.

$$T = \frac{1-(1.01075)^{-8}}{0.01075} \text{ o bien, } T = 7.626467879$$

$$V = \frac{1-(1+8(0.01075))(1.01075)^{-8}}{(0.01075)^2} \text{ o bien, } V = 26.26456939$$

El valor presente de las 8 rentas, en millones de pesos, es entonces:

$$C = 7.626467879(2.5) + 26.26456939(0.2)$$

$$C = 19.0661697 + 5.252913878$$

$$C = 24.31908358$$

y 9 meses después será:

$$M = 24.31908358(1.01075)^9$$

$$M = 24.31908358(1.101016304)$$

o bien, $M = 26.77570752$

millones, que es igual al de antes.

Sirva el ejemplo siguiente también para comprobar este resultado y la funcionabilidad de las fórmulas del último teorema.

Ejemplo 2

Hacer el cuadro del fondo del ejemplo 1.

solución

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	2.5	2.50000000	0.026875000	2.526875000
2	2.7	5.22687500	0.056188906	5.283063906
3	2.9	8.183063906	0.087967937	8.271031843
4	3.1	11.37103184	0.122238592	11.49327043
5	3.3	14.79327943	0.159027657	14.95229809
6	3.5	18.45229809	0.198362205	18.65066029
7	3.7	22.35066029	0.240269598	22.59092989
8	3.9	26.49092989	0.284777496	26.77570739*

* La diferencia con el resultado anterior se debe al redondeo y es insignificante.

Las cantidades se han escrito en millones de pesos y la tabla se comienza anotando las rentas en la segunda columna.

Ejemplo 3

Depósitos en un fondo de reposición de maquinaria, determinación de los intereses y elaboración de un cuadro de fondo de amortización

La compañía Cerámicas del Noreste prevé la necesidad de renovar parte de su equipo de producción en un plazo de 1.5 años, con un estimado de 1.75 millones de pesos para esas fechas.

a) Obtenga los primeros 3 y el último de los 18 depósitos mensuales en un fondo, que reditúa con intereses a una tasa del 19.2% compuesto por meses, considerando que crecen con una diferencia común igual al 25% del primer pago.

b) Calcule también los intereses.

c) Elabore el cuadro del fondo en sus primeros 3 renglones y el último.

solución

a) Los valores para reemplazar en las ecuaciones del último teorema son:

$$M = 1.75 \text{ millones},\ p = 12,\ n = 1.5 \text{ años},\ np = 18 \text{ e } i/p = 0.192/12 = 0.016$$

La diferencia común es el 25% de la primera renta, por eso $d = 0.25\ R_1$ de donde $R_1 = d/0.25$ o $R_1 = 4d$. Entonces,

$$A = 4d\left(\frac{(1.016)^{18} - 1}{0.016}\right) \qquad A = R_1\left(\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$A = 4d(20.67001131) \quad \text{o bien,} \quad A = 82.68004524(d)$$

$$B = d\left(\frac{(1.016)^{18} - 1 - (18)(0.016)}{(0.016)^2}\right) \qquad B = d\,\frac{(1 + i/p)^{np} - 1 - (np)(i/p)}{(i/p)^2}$$

$B = d(166.8757071)$ y al sustituir en la primera ecuación del teorema 7.1 queda:

$$1.75 = (1.016)[82.68004524(d) + 166.8757071(d)] \qquad M = (1 + i/p)(A + B)$$

$$1.75 = (1.016)[(249.5557523(d)]$$

$$1.75 = 253.5486443(d)$$

de donde $d = 1.75/253.5486443$

$$d = 0.006902029 \text{ millones} \quad \text{o bien,} \quad d = \$6,902.03$$

El primer depósito en el fondo es, por lo tanto,

$$R_1 = 4d = \$27,608.11, \text{ redondeando.}$$

Para el segundo y los siguientes se suma sucesivamente la diferencia, en tanto que para el último se suma 17 veces la misma diferencia.

$$R_2 = 27,608.11 + 6,902.03 = \$34,510.14$$

$$R_3 = 34,510.14 + 6,902.03 = \$41,412.17 \text{ y}$$

$$\vdots$$

$$R_{18} = 27,608.11 + 17(6,902.03) = \$144,942.62$$

b) Los intereses son la diferencia entre el monto acumulado y el capital que se invierte con las 18 rentas. Este capital constituye una serie aritmética; por lo tanto, la suma es:

$$S_n = (18/2)(27,608.11 + 144,942.62), \text{ ya que } S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \$1'552,956.57$$

Entonces, los intereses son:

$$I = 1'750,000 - 1'552,956.57$$

$$I = \$197,043.43$$

c) Los primeros renglones del cuadro del fondo son los siguientes. Se inicia anotando las primeras rentas en la segunda columna y se continúa como en el ejemplo 1 de la sección 7.3.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	27,608.11	27,608.11	441.73	28,049.84
2	34,510.14	62,559.98	1,000.96	63,560.94
3	41,412.17	104,973.11	1,679.57	106,652.68
⋮				
18	144,962.62	1’722,440.94	27,559.06	1’750,000.00

Importante

- Si se incrementa el primer depósito en el fondo, sin cambiar los otros valores, entonces la diferencia se reduce y puede llegar a ser negativa: en ese caso, más que incrementarse, los pagos se reducirían con el paso del tiempo. Esto significa que las ecuaciones del teorema 7.1 son válidas también para fondos con rentas decrecientes.
- Por supuesto que si la diferencia es negativa y grande, entonces los últimos depósitos pueden llegar a ser negativos, lo cual no tiene sentido práctico.

El ejemplo siguiente ilustra las 2 posibilidades.

Ejemplo 4

Resuelva la primera parte del ejemplo 3 considerando que:

a) La primera renta es de $100,000.
b) La primera renta es de $200,000.

solución

a) El valor de B no cambia porque no depende del primer pago, es decir

$$B = (166.8757071)d$$

pero el de A porque la diferencia es $d = 0.100$ es:

$$A = 0.100(20.67001131)$$
$$A = 2.067001131$$

Entonces,

$$1.75 = (1.016)(2.067001131 + 166.8757071(d))$$

de donde $(1.75/1.016) - 2.067001131 = 166.8757071(d)$

$$-0.344560186 = 166.8757071(d)$$
$$d = -0.344560186/166.8757071$$
$$d = -0.002064771 \text{ millones o bien, } d = -\$2{,}064.77$$

Significa que si los depósitos comienzan con R_1 = \$100,000, se reducen en \$2,064.77 y el último es:

$$R_{18} = 100{,}000 - 17(2{,}064.77)$$
$$R_{18} = \$64{,}898.91$$

b) Si la primera renta fuera de \$200,000:

$$A = 0.200(20.67001131) \quad \text{o bien,} \quad A = 4.134002262$$
$$1.75 = (1.016)[4.134002262 + 166.8757071(d)]$$

de donde:

$$d = -2.411561317/166.8757071$$
$$d = -0.014451243 \quad \text{o bien,} \quad d = -\$14{,}451.24$$

En este caso, la última renta es:

$$R_{18} = 200{,}000 + 17(-14{,}451.24)$$
$$R_{18} = -\$45{,}671.08$$

Más que un depósito, esto representa un retiro del fondo, ya que es negativo. Y esto no tiene sentido práctico.

Variación geométrica

El teorema 6.4 establece que el capital C al inicio de np rentas que crecen geométricamente es:

$$C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\frac{(1+f)^{np}}{(1+i/p)} - 1\right]$$

y para trasladarlo hasta el final del periodo $(np + 1)$ aplicando la fórmula del interés compuesto se multiplica por $(1 + i/p)^{np+1}$ tal como se hizo cuando la variación es aritmética, después se multiplica por $(1 + i/p)^{np}$ dentro de los corchetes:

$$M = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right](1 + i/p)^{np+1}$$

$$M = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np}(1+i/p)^{np} - (1+i/p)^{np}\right](1 + i/p) \qquad a^{np+1} = a^{np}(a)$$

Simplificando y reacomodando factores, lo que se deja como ejercicio, se obtiene la fórmula del siguiente:

Teorema 7.2

El monto acumulado M en un fondo con depósitos anticipados que crecen geométricamente es:

$$M = R_1\left(\frac{1+i/p}{f - i/p}\right)[(1 + f)^{np} - (1 + i/p)^{np}]$$

donde R_1 es el primer depósito, f es la tasa con la que crecen los depósitos, es decir, es el *gradiente geométrico*, y como antes: n es el plazo en años, p la frecuencia de conversión y de pagos e i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.

Con el ejemplo siguiente se comprueba la validez de esta ecuación.

Ejemplo 5

¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 10 aportaciones mensuales que crecen a una tasa del 3%, la primera es por $8,000 y la tasa de interés es del 10.8% anual compuesto por meses? Haga el cuadro del fondo.

solución

a) En la ecuación del teorema último se reemplazan:

$R_1 = 8{,}000$, el primer depósito

$f = 0.03$, la tasa de crecimiento en los pagos

$np = 10$, el número de rentas

$i = 0.108$, de donde $i/p = 0.009$ ya que $p = 12$

Entonces, el monto es:

$$M = 8{,}000\left(\frac{1.009}{0.03 - 0.009}\right)[(1.03)^{10} - (1.009)^{10}]$$

$$M = 8{,}000(48.04761904)(0.250182506)$$

$$M = 96{,}165.38992 \quad \text{o bien,} \quad M = \$96{,}165.39 \text{ redondeando.}$$

b) El cuadro es el siguiente que se inicia anotando las rentas en la segunda columna y se continúa como en los anteriores de esta sección.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	8,000	8,000	72	8,072.00
2	8,240	16,312	146.81	16,458.81
3	8,487.20	24,946.01	224.51	25,170.52
4	8,741.82	33,912.34	305.51	34,217.55
5	9,004.07	43,221.62	388.99	43,610.62
6	9,274.19	52,884.81	475.96	53,360.77
7	9,552.42	62,913.19	566.22	63,479.41
8	9,838.99	73,318.40	659.87	73,978.27
9	10,134.16	84,112.42	577.01	84,869.44
10	10,438.19	95,307.62	857.77	96,165.39

Ejemplo 6

Renta variable geométricamente en un fondo



Para el mantenimiento de un tramo de carretera de cuota que hoy se pone en servicio, la entidad gubernamental encargada constituye un fondo de reservas bimestrales que crecen 4%. ¿De cuánto deberán ser las primeras 3 para acumular 90 millones de pesos en 3 años y 4 meses, si se ganan intereses a una tasa del 15% compuesto por bimestres?

solución

Los valores que se reemplazan en la ecuación del teorema 7.2 son:

El monto $M = 90$ millones de pesos.
La tasa de interés $i = 0.15$, compuesto por bimestres.
La frecuencia de conversión y de pagos, $p = 6$.
El plazo en años es $n = 20/6$.
La razón con la que crecen los pagos es $f = 0.04$.
Además, $i/p = 0.025$, $np = 20$ y $1 + f = 1.04$.

Entonces:

$$90 = R_1\left(\frac{1.025}{0.04 - 0.025}\right)\left[(1.04)^{20} - (1.025)^{20}\right]$$

de donde:

$$90 = R_1(1.025)(36.8337802)$$

$R_1 = 90/(1.025)(36.83337802)$ o bien, $R_1 = 2.383813922$ millones.

Es decir que la primera reserva es:

$$R_1 = \$2'383{,}813.92$$

La segunda es un 4% más grande:

$R_2 = 2'383{,}813.92(1.04)$ o bien, $R_2 = \$2'479{,}166.48$

y la tercera es:

$R_3 = 2'479{,}166.48(1.04)$ o bien, $R_3 = \$2'578{,}333{,}14$

Ejemplo 7

Plazo para un monto de renta variable geométricamente

¿En cuánto tiempo acumula \$10,000 un empleado que constituye un fondo de ahorro con intereses a una tasa del 20.4% compuesto por quincenas, pagos quincenales que crecen un 2% y el primero es por \$550?

solución

En la ecuación 7.2 se sustituyen:

$R_1 = \$550$, el primer pago en el fondo
$M = \$10{,}000$, el monto acumulado
$p = 24$, porque son rentas quincenales
$i = 0.204$ de donde $i/p = 0.204/24 = 0.0085$ la tasa quincenal compuesta por quincenas
$f = 0.02$ porque crecen 2%

La incógnita es $x = np$, el número de rentas.
Entonces,

$$10{,}000 = 550\left(\frac{1.0085}{0.02 - 0.0085}\right)[(1.02)^x - (1.0085)^x]$$

$$10{,}000 = 550(87.69565217)[(1.02)^x - (1.0085)^x]$$

de donde $(1.02)^x - (1.0085)^x = 0.207328616$

$$\text{o bien, } (1.02)^x - (1.0085)^x - 0.20732816 = 0$$

Esta ecuación, novedosa por su forma, se resuelve también con el método de *prueba y error*, asignando a x valores arbitrarios:

con $x = 20$:

$$(1.02)^{20} - (1.0085)^{20} - 0.207328616 = 0.094165184$$

con $x = 15$:

$$(1.02)^{15} - (1.0085)^{15} - 0.207328616 = 0.003166785$$

con $x = 14$:

$$(1.02)^{14} - (1.0085)^{14} - 0.207328616 = -0.01365346$$

El cambio de signo en el resultado indica que el valor de x debe estar entre 14 y 15, probablemente más cerca del segundo, y puesto que x debe ser entero, se hace que x sea igual a 15 pagos quincenales. Se ajusta el monto para que quede como sigue:

$$M = 550(87.69565217)[(1.02)^{15} - (1.0085)^{15}]$$

$$M = 550(87.69565217)(0.210495401) \quad \text{o bien,} \quad M = \$10{,}152.74$$

Ejercicios 7.4

1. ¿Qué característica tienen los fondos presentados en esta sección?

2. ¿En qué forma varían los depósitos en un fondo de los que aquí se han estudiado?

*3. Para ampliar su planta de producción al cabo de 3 años, la Troqueladora Occidental crea un fondo con reservas mensuales que crecen 3%, la primera mensualidad es por $50,000 y los intereses se devengan a una tasa del 7.08% nominal mensual. ¿Cuánto acumula en los 3 años? ¿Cuánto tiene en el fondo 2 años después de que comenzó?

4. La universidad pretende acumular $750,000 en un fondo de investigación, con depósitos trimestrales que crecen $2,000 y devengan intereses a una tasa del 7.2% compuesto por trimestres. Haga el cuadro del fondo si el plazo es de 3 años.

*5. La Lotería Nacional constituye un fondo de ayuda con depósitos bimestrales que crecen un 2%, siendo el primero de $125,000, y devengan intereses a una tasa del 8.64% compuesto por bimestres. ¿Cuánto acumula en 3 años? ¿Cuánto gana por intereses?

6. Para comprar una computadora y sus periféricos, una estudiante crea un fondo con 10 pagos quincenales que crecen $120, el primero es por $1,550, ganando intereses a una tasa del 7.2% compuesto por quincenas. ¿Cuánto acumula?

*7. Para construir su nueva planta embotelladora dentro de 3 años, una conocida compañía refresquera constituye un fondo de reservas bimestrales que inicia hoy con 4.5 millones de pesos. Calcule el monto acumulado si se generan intereses a una tasa del 11.1% convertible bimestralmente, considerando que las rentas crecen:

   a) $25,000 cada bimestre.

   b) 1.8%, sucesivamente.

*8. El cuarto depósito quincenal en un fondo esde $1,123.60 y el segundo es de $1,000. ¿Cuánto se acumula en 10 meses si se ganan intereses a una tasa del 9% compuestos por quincenas? Suponga que los abonos crecen:

   a) Aritméticamente.

   b) Geométricamente.

9. Se constituye un fondo para el mantenimiento de puertos y vías navegables de la nación, con depósitos trimestrales que crecen 1.8% y devengan intereses a una tasa del 7.76% nominal trimestral. Obtenga los 3 primeros si el plazo es de 3 años y el monto es de 1.5 millones de pesos. Haga el cuadro del fondo correspondiente, en sus primeras filas y la última.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

En los problemas 10 a 14 conteste verdadero o falso justificando su solución.

***10.** Se necesitan 35 depósitos quincenales para acumular $350,000 en un fondo que bonifica intereses del 7.56% nominal quincenal suponiendo que el primero es por $6,901.284 y crecen 1.8% sucesivamente. __________

11. El monto que se acumula en un fondo con 15 aportaciones mensuales que crecen $250 de forma sucesiva es de $323,985.67 cuando la primera es de $18,700 y se generan intereses del 8.4% nominal mensual. __________

12. Si la quinta aportación bimestral a un fondo educativo que bonifica intereses del 7.26% nominal bimestral es de $10,620.00 y la sexta es por $10,800.54, entonces en un plazo de 3.5 años se acumulan $286,572.18 suponiendo que crecen de forma geométrica. __________

13. Para reponer sus unidades en un plazo de 4 años, la concesionaria del transporte colectivo de la unidad, constituye un fondo de reservas trimestrales que crecen 1.2%, logrando un monto acumulado de $14'823,080.21. Considere el 6.3% de interés nominal trimestral y la primera aportación es por $725,000. __________

14. Si la primera aportación cuatrimestral a un fondo es de $42,000 y la última es por $37,000, en un plazo de 3 años y con intereses del 10.5% nominal trimestral entonces el monto que se logra es de $520,000 suponiendo que se incrementan aritméticamente. __________

Justificando su elección, seleccione la opción correcta en los problemas del 15 al 27.

***15.** ¿Cuántos depósitos mensuales que comienzan con $10,000, crecen $150 cada mes y ganan intereses del 10.5% nominal mensual deberán realizarse para acumular $265,000 aproximadamente?

a) 18 *b*) 21 *c*) 23 *d*) 27 *e*) Otra

16. La primera aportación bimestral a un fondo de jubilación es de $20,000, ¿cuánto se acumula en 3 años si se bonifican intereses del 8.4% anual capitalizable por bimestres y crecen 0.9% cada bimestre?

a) $456,231.48 *b*) $443,487.10 *c*) $471,920.58 *d*) $469,363.91 *e*) Otra

17. Obtenga el primer depósito mensual en un fondo que bonifica intereses del 12.72% nominal mensual, considerando que decrecen $85 sucesivamente, el monto es de $170,000 y el plazo es de 5 trimestres.

a) $12,045.38 *b*) $13,163.42 *c*) $11,698.05 *d*) $10,984.01 *e*) Otra

18. Resuelve el problema 17, considerando que las rentas crecen 2.3%, sucesivamente.

a) $10,429.68 *b*) $9,781.61 *c*) $9,061.41 *d*) $8,871.38 *e*) Otra

19. ¿En cuánto se incrementa cada depósito quincenal en un fondo de ahorro si el primero es de $950, el monto que se pretende es de $22,600 y se generan intereses del 12% anual capitalizable por quincenas? Suponga 8 meses de plazo.

a) $60.0321 *b*) $54.5727 *c*) $48.9895 *d*) $56.3207 *e*) Otra

20. ¿De cuánto es la primera aportación bimestral en un fondo, suponiendo que crece $125 y se generan intereses del 7.38% nominal bimestral? Suponga que el plazo es de 3.5 años y se pretende disponer de $70,800 al final.

a) $1,745.13 *b*) $1,568.28 *c*) $1,329.28 *d*) $1,494.93 *e*) Otra

21. ¿A cuánto ascienden los intereses en el fondo del problema 20?

a) $20,408.37 *b*) $18,943.91 *c*) $19,496.16 *d*) $18,845.53 *e*) Otra

22. La primera aportación en un fondo es de $6,206. ¿Con qué porcentaje aproximado se incrementan? Considere que el monto que se acumula en los 2 años del plazo es de $195,000 y los intereses son del 9% anual capitalizable por meses.

a) 1.53% *b*) 1.85% *c*) 2.05% *d*) 1.76% *e*) Otra

23. ¿Con cuánto debe constituirse un fondo para acumular $235,000 con intereses del 7.2% nominal mensual, si la segunda aportación es de $4,500 y se hace 3 meses después del depósito de apertura? Suponga que son 35 aportaciones quincenales y crecen 1.05%, sucesivamente.

a) $32,521.36 *b*) $30,873.69 *c*) $31,781.66 *d*) $32,693.60 *e*) Otra

24. ¿Cuánto se acumula con 30 depósitos mensuales en un fondo que bonifica intereses del 9.6%, si la diferencia con la que se incrementan es igual al 1.8% de la primera renta y ésta es de $13,000?

a) $565,961.36 *b*) $529,665.03 *c*) $553,015.59 *d*) $498,696.98 *e*) Otra

***25.** ¿Cuánto se tendrá en un fondo de investigación, después de 4 años de haber realizado la primera aportación bimestral por $17,250, considerando intereses del 11.5% nominal mensual? Suponga que crecen 1.85% cada bimestre y que se hacen disposiciones mensuales anticipadas de $12,725.00 a partir del decimoprimer mes.

a) $56,531.72 *b*) $59,629.04 *c*) $63,221.84 *d*) $60,968.73 *e*) Otra

***26.** La quinta aportación a un fondo educativo, que bonifica intereses del 14.16% nominal quincenal, es de $10,620.00 y la sexta es por $10,800.54. ¿Cuánto dinero se acumula en 3.5 años, considerando que son quincenales y crecen geométricamente?

a) $1'463,921.03 *b*) $1'562,425.32 *c*) $1'654,075.26 *d*) $1'732,477.87 *e*) Otra

27. Las primeras filas del cuadro de un fondo de amortizaciones, son las siguientes.

¿Cuál es el monto acumulado con 30 aportaciones mensuales, suponiendo que crecen geométricamente?

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	7,250.000	7,250.000	68.875	7,318.875
2	7,329.750	14,648.625	139.162	7,458.037

a) $305,421.63 *b*) $310,196.03 *c*) $295,144.63 *d*) $318,421.61 *e*) Otra

7.5 Problemas de aplicación

Rentas que varían aritméticamente en bloques

Ejemplo 1

¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 78 rentas semanales si la primera es de \$830, la última es de \$1,500, crecen aritméticamente cada 13 y la tasa de interés es del 9.1% anual capitalizable por semanas?

solución

Puesto que crecen cada 13, se tienen 6 grupos de pagos, los del primero tienen un valor de $R_1 = \$830$, los del último valen $R_6 = \$1{,}500$ y como entre ambos hay una diferencia que es igual a 5 veces la diferencia común, se cumple que:

$$R_6 = R_1 + 5d$$

de donde:

$$d = (R_6 - R_1)/5 \quad \text{o bien,} \quad d = 134$$

En la figura 7.3 se aprecian los 6 grupos de 13 pagos cada uno.

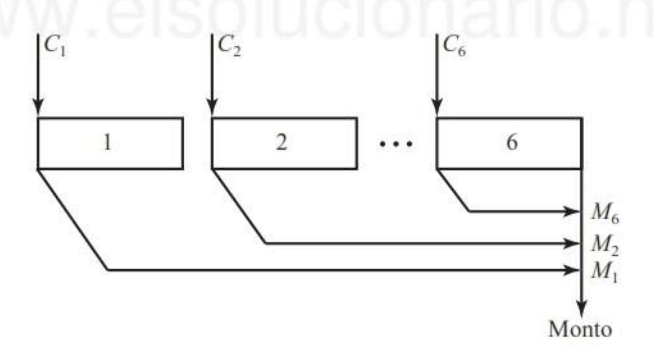


Figura 7.3

El procedimiento consiste en hallar el valor futuro al final del plazo de cada uno de los capitales $C_1, C_2, \ldots, C_6$ que hacen las veces de 6 rentas crecientes, para luego sumarlos.

El primero de estos capitales, el que corresponde a los 13 depósitos del primer bloque, notando que es el valor presente de una anualidad anticipada, con $R = 830$, $np = 13$ e $i/p = 0.00175$, es:

$$C_1 = 830(1.00175)\left(\frac{1-(1.00175)^{-13}}{0.00175}\right) \qquad C = R(1 + i/p)\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C_1 = 830(12.86460744)$$

o bien, $C_1 = 10{,}677.62418$

Para el monto del segundo y los otros grupos de rentas, sólo cambia la renta, ya que el factor que está entre paréntesis permanece constante. Entonces el primer capital puede expresarse como:

$$C_1 = 830(k)$$

donde:

$$k = 12.86460744$$

La renta en el segundo bloque es 134 mayor que la del primero y por eso:

$$C_2 = (830 + 134)k$$

y el capital del último bloque es:

$$C_6 = [830 + 5(134)]k$$

Para llevarlos al final del plazo con la fórmula del interés compuesto, se necesita la tasa capitalizable por trimestres, 13 semanas, equivalente al 9.1% nominal semanal.

$$(1 + i/4)^4 = (1 + 0.091/52)^{52}$$

de donde:

$$1 + i/4 = (1.00175)^{13} \quad \text{o bien,} \quad 1 + i/4 = 1.022990415$$

El valor futuro, 6 trimestres después, del primer capital es entonces:

$$M_1 = 830(k)(1.022990415)^6 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

o bien, $M_1 = \$12,237.81876$

Del segundo capital es:

$$M_2 = (830 + 134)(k)(1.022990415)^5$$

o bien, $M_2 = \$13,894.13$

y de los otros 4 es:

$$M_3 = (830 + 268)k(1.022990415)^4$$

o bien, $M_3 = \$15,469.81559$

$$M_4 = 16,967.65947,\ M_5 = 18,390.36575 \text{ y } M_6 = \$19,740.55515$$

La suma de los 6 es igual al monto acumulado en el fondo

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$$

o bien, $M = 96,700.35$, redondeando.

Solución alterna

Es evidente que si el número de grupos de pagos es relativamente grande, el método anterior es poco práctico, por lo que en su lugar se utilizan las ecuaciones del teorema 7.1. Los valores que se sustituyen son:

$R_1 = 830(k)$, la primera renta, es decir, el primer monto

$d = 134(k)$, la diferencia entre 2 rentas sucesivas

$d = (830 + 134)k - 830k$ o $d = 134(k)$, puesto que $d = R_2 - R_1$

$np = 6$, el número de rentas crecientes, es decir, de capitales o grupos de pagos.

Entonces:

$$A = 830(k)\left(\frac{(1.022990415)^6 - 1}{0.02299415}\right) \qquad A = R_1\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

$$A = 830(k)(6.355611371)$$

o bien, $A = 5{,}275.157438(k)$

Puesto que:

$$B = d\frac{(1+i/p)^{np} - 1 - np(i/p)}{(i/p)^2}, \text{ en este caso:}$$

$$B = 134(k)\frac{(1.022990415)^6 - 1 - 6(0.022990415)}{(0.022990415)^2}$$

$$B = 134(k)(15.46781)$$

o bien, $B = 2{,}072.68654(k)$

Entonces, el monto está dado por $M = (1 + i/p)(A + B)$ esto es:

$$M = (1.022990415)(5{,}275.157438 + 2{,}072.68654)k$$

$$M = 7{,}516.77396(k)$$

o bien, $M = \$96{,}700.35$

que es igual al de antes.

Note que otra manera de resolver este ejercicio consiste en evaluar el monto de cada uno de los 6 bloques de pagos, para después encontrar el monto de la anualidad vencida sumando los 6 montos parciales o con la fórmula del mismo teorema 7.1 con alguna adecuación.

Intereses en un fondo de renta variable

Ejemplo 2

Intereses en un fondo

¿A cuánto ascienden los intereses que se generan en el fondo del ejemplo 1?

solución

Los intereses son la diferencia entre el monto acumulado en el fondo y la suma de las 78 aportaciones. Estas aportaciones forman una serie aritmética de 13 en 13 y al considerar la primera de cada bloque la suma, puesto que $a = 830$, $d = 134$ y $n = 6$, es:

$$S = (6/2)[2(830) + 5(134)] \qquad S = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S = 3(2{,}330)$$

o bien, $S = \$6{,}990$

el total aportado es el capital y es igual a 13 veces esta suma ¿por qué?

$$C = 13(S) \quad \text{o bien,} \quad C = \$90{,}870$$

y los intereses son, por lo tanto:

$$I = 96{,}700.35 - 90{,}870.00$$
$$I = \$5{,}830.35$$

Solución alterna

El capital, es decir, la suma de las 78 aportaciones al fondo, puesto que cada apoyo es de 13 está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Suma} &= 830(13) + 964(13) + \ldots + 1{,}500(13) \qquad C_6 = 830 + 5(134) = 1{,}500 \\ &= 13(830 + 964 + \ldots + 1{,}500) \\ &= 13[(6/2)(830 + 1{,}500)] \qquad S_n = (n/2)(a_1 + a_n) \\ &= 13(3)(2{,}330) \text{ o bien, Suma} = \$90{,}870 \end{aligned}$$

Fondo de renta variable considerando inflación

Ejemplo 3

Monto con renta variable geométricamente

Para comprar una computadora portátil dentro de un año, Claudia Guadalupe constituye un fondo de ahorro con depósitos mensuales que crecen 1.75% cada cuatrimestre, ¿cuánto deposita cada mes si le dan intereses del 13.2% nominal mensual y se considera que la computadora aumenta su precio en 1.28% cada bimestre por efectos de la inflación y otros factores y ahora cuesta $20,350?

solución

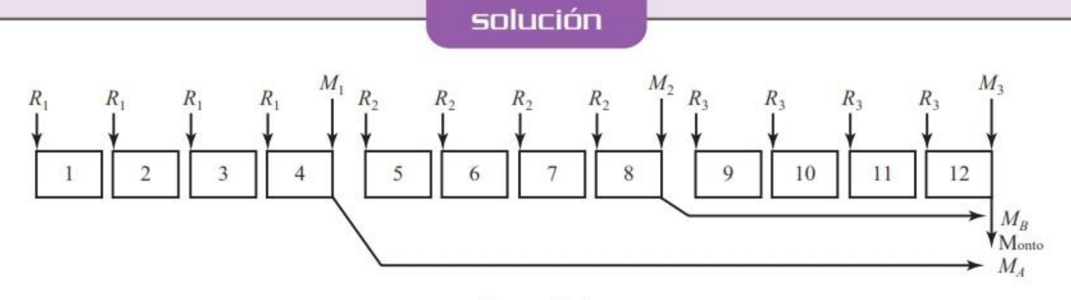


Figura 7.4

Como se aprecia en la figura 7.4 se tienen ahora 3 grupos de 4 rentas mensuales cada uno. El monto en el primero es:

$$M_1 = R_1(1 + 0.132/12)\left[\frac{(1.011)^4 - 1}{0.011}\right] \qquad M = R_1(1 + i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$M_1 = R_1(1.011)(4.066485364)$$

$$M_1 = R_1(4.111216703)$$

Puesto que el factor entre los paréntesis no cambia, este monto se escribe como $M_1 = R_1(k)$, donde $k = 4.111216703$ y el segundo monto, puesto que $R_2 = R_1 + 0.0175(R_1)$ o bien, $R_2 = (1.0175)R_1$ es:

$$M_2 = (1.0175)R_1(k)$$

El monto del tercer grupo de rentas es:

$$M_3 = (1.0175)^2 R_1(k)$$

El valor futuro del primer monto, 2 cuatrimestres, es decir, 8 meses después es:

$$M_A = R_1(k)(1.011)^8 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

o bien, $M_A = R_1(k)(1.09146357)$

El del segundo monto, 4 meses después es:

$$M_B = (1.0175)R_1(k)(1.011)^4$$

o bien, $M_B = R_1(k)(1.063014137)$

El tercero no se traslada y entonces el monto acumulado en el fondo con 12 rentas, luego de factorizar R_1k, es:

$$M = M_A + M_B + M_3$$

$$M = R_1(k)(1.09146357 + 1.063014137 + (1.0175)^2) \qquad R_3 = (1.0175)^2\, R_1\, k$$

$$M = R_1(k)(3.189783957)$$

o bien, $M = (R_1)(13.11389308)$

Este monto debe ser igual al precio futuro de la computadora

$$P = 20{,}350(1.0128)^6$$

$$P = 20{,}350(1.079299948)$$

$$P = 21{,}963.75394$$

Entonces:

$$R_1(13.11389308) = 21.963.75394$$

de donde al despejar resulta que la primera renta es:

$$R_1 = 21{,}963.75394/13.11389308$$

$$R_1 = 1{,}674.846196$$

o bien, $R_1 = \$1{,}674.85$

Las del segundo bloque son $R_2 = 1{,}674.85(1 + 0.0175)$ o $R_2 = \$1{,}704.16$ y las del tercero son $R_3 = 1{,}733.98$.

Ejemplo 4

Intereses en un fondo de rentas que varían geométricamente

¿Cuánto dinero le dieron a Claudia, del ejemplo 3, por concepto de intereses en el fondo de ahorro?

solución

El capital es igual a la suma de las 12 aportaciones al fondo, es decir,

$$C = 4R_1 + 4R_2 + 4R_3$$
$$C = 4(1{,}674.85 + 1{,}704.16 + 1{,}733.98)$$
$$C = 4(5{,}112.99) \text{ o bien, } C = 20{,}451.96$$

Entonces los intereses que gana Claudia son:

$$I = 21{,}963.75 - 20{,}451.96$$

o bien, $I = \$1{,}511.79$

Fondo de ahorro para el retiro, Afore*

En julio de 1997 se creó un nuevo sistema de pensiones para que todo trabajador afiliado al Instituto Mexicano del Seguro Social sea propietario de una cuenta personal para su retiro laboral, con aportaciones del gobierno, del patrón y del propio trabajador.

Al mismo tiempo se formaron organismos privados, principalmente de la banca mexicana, para administrar tales cuentas, constituyéndose en Administradoras de Fondos para el Retiro, es decir, las Afores.

Si bien es cierto que cada trabajador tiene libertad para elegir la Afore que administre sus ahorros, es recomendable elija la mejor alternativa tomando en cuenta básicamente 2 cosas:

- Las comisiones que cada una cobra por administrar los recursos del trabajador.
- El rendimiento o los intereses que la Afore le ofrece.

Por supuesto que adicionalmente debe considerar el prestigio, la solvencia y la calidad en el servicio que cada Afore le ofrece, sabiendo que actualmente puede cambiarse de una a otra, aunque esto no es lo deseable.

Cabe agregar, además, que el dinero de las Afores es administrado a su vez por las Siefore, es decir, por las Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro, y son supervisadas por la Consar o Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, órgano descentralizado de la Secretaría de Hacienda del gobierno federal.

También es cierto que el trabajador tiene por lo menos 3 opciones al jubilarse estando asegurado en el IMSS.

*Recibir el monto total acumulado en su fondo con una sola exhibición al jubilarse.

*Con una pensión o renta periódica, cuyos tamaño, frecuencia y duración dependen del acumulado en su cuenta para el retiro, ya que en este caso se agota, es decir, queda en ceros con la última pensión.

*Con rentas vitalicias que consisten en recibir también pagos periódicos, desde el día de su jubilación y hasta el día de su deceso. Éstas, como ya se dijo, se consideran y se denominan anualidades contingentes.

En el capítulo 10** se abordarán las rentas vitalicias y en el ejemplo siguiente se ilustran las rentas periódicas, desde la jubilación hasta que el dinero en el fondo se acaba. Este fondo se constituye con aportaciones bimestrales que crecen conforme aumenta el salario mínimo del trabajador, es decir, cada año.

Tales aportaciones dependen del salario base de cotización, SBC, del trabajador y se evalúan de la forma siguiente:

Un 2% del SBC por parte del patrón y un 4.5% por cesantía y vejez, que es aportado por el patrón, el gobierno y también el trabajador, correspondiendo el mayor porcentaje, al patrón.

También el gobierno federal aporta otro porcentaje por lo que llama *cuota social* por cada bimestre cotizado.

Ejemplo 5

Disposiciones de un fondo para el retiro

¿De cuánto podrá disponer cada mes el señor Castillo, durante 8 años, luego de jubilarse a los 65 años de edad, considerando que ahora su salario base de cotización es de $9,250 mensuales, tiene 54 años de edad, cotiza desde los 46 y su salario se ha incrementado, y se incrementará, 4.08% en promedio anual? Suponga que la Afore le cobra el 1.01% de comisión bimestral y la aportación total gobierno-patrón-trabajador es del 6.50% del salario bimestral. Considere también que su Afore le reditúa intereses del 9.12% anual capitalizable por bimestre.

solución

El salario base bimestral del señor Castillo, cuando tenía 46 años de edad, 8 antes de ahora es S_1 tal que

$$S_9 = S_1\,(1 + 0.0408)^8$$
$$S_9 = S_1\,(1.377013723)$$

de donde:

$$S_1 = S_9/1.377013723$$

o bien,

$$S_1 = 0.726209171(S_9)$$

Esto es:

$$S_1 = 0.726209171(18{,}500)$$
$$S_1 = 13{,}434.87$$

porque ahora gana 18,500 por bimestre.

*Para mayor información sobre las Afores, puede consultar la dirección electrónica www.consar.gob.mx.

**Los capítulos 9 y 10 pueden consultarlos en http://www.pearsoneducacion.net/villalobos

Desde los 46 hasta los 65 años de edad quedan comprendidos 20 años o 120 bimestres que se dividen en 20 grupos de 6 bimestres cada uno.

El tamaño de las primeras 6 aportaciones es igual al 6.5% del salario bimestral, es decir:

$$A_1 = 0.065(13{,}434.87) \quad \text{o bien,} \quad A_1 = 873.27, \text{ redondeando.}$$

La comisión que le cobra la Afore es del 1.01% del salario bimestral

$$0.0101(13{,}434.87) = 135.69$$

Por lo tanto, las primeras 6 aportaciones, descontando esta comisión, son de:

$$R_1 = 873{,}27 - 135.69 \quad \text{o bien,} \quad R_1 = 737.58$$

Note que aunque la comisión la cobra la Afore y el rendimiento lo ofrece la Siefore, para efectos prácticos esta aportación neta puede obtenerse restando las tasas, esto es:

$$R_1 = (0.065 - 0.0101)(13{,}434.87) \quad \text{o bien,} \quad R_1 = 737.58$$

Se considera que las aportaciones están al comenzar cada bimestre del año y el valor presente de las primeras 6, dado que constituyen una anualidad anticipada, están dadas por:

$$C_1 = 737.58(1 + 0.0912/6)\left(\frac{1-(1.0152)^{-6}}{0.0152}\right) \qquad C = R(1+i/p)\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C_1 = 737.58(1.0152)(5.693308836)$$

$$C_1 = 737.58(5.77984713) \quad \text{o bien,} \quad C_1 = 737.58(k)$$

donde:

$$k = 5.77984713, \text{ es constante.}$$

Para el capital del segundo bloque, la renta es 4.08% más grande, es decir,

$$R_2 = R_1 + 0.0408R_1 \text{ o bien, } R_2 = (1.0408)R_1$$

Entonces el valor presente de las 6 del segundo bloque es:

$$C_2 = [(1.0408)R_1](k)$$

Cada uno de los siguientes, se obtiene multiplicando el anterior por la razón común 1.0408 y los 20 capitales forman una anualidad de renta variable al inicio de cada periodo anual, como se observa en la gráfica de la figura 7.5, donde cada rectángulo representa un periodo anual

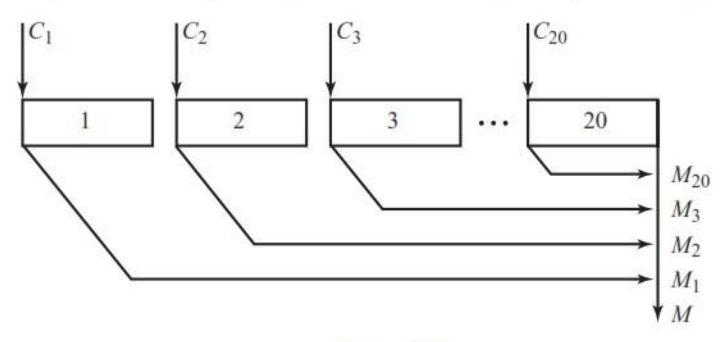


Figura 7.5

Los valores que se reemplazan en la ecuación 7.2 para el monto de una anualidad de rentas que crecen de forma geométrica son:

$R_1 = 737.58(k)$, la primera renta, $R_1 = C_1$

$f = 0.0408$, la tasa de crecimiento en las aportaciones

$np = 20$, el número de rentas es decir de capitales

$i/p = 0.094736642$, la tasa de interés anual, capitalizable por años, esto es la tasa efectiva equivalente al 9.12% nominal bimestral, ya que:

$$e = (1 + 0.0912/6)^6 - 1$$

o bien,
$$e = 0.094736642$$

Entonces el monto con el que contará el señor Castillo a los 65 años según el teorema 7.2 es:

$$M = 737.58(k)\left(\frac{1.094736642}{0.0408 - 0.094736642}\right)[(1.0408)^{20} - 1.094736642)^{20}]$$

$$M = 737.58(k)(-20.29671484)(-3.887056964)$$

$$M = 58{,}190.99555(k) \quad \text{o bien,} \quad M = \$336{,}335.06$$

Para saber de cuánto dinero podrá disponer cada mes durante los 8 años, se utiliza la ecuación 5.2, para el capital de una anualidad anticipada, pero antes se obtiene la tasa de interés capitalizable por meses.

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.0912/6)^6 \quad \text{o bien,} \quad 1 + i/12 = 1.007571337$$

Entonces:

$$336{,}335.06 = R\left(\frac{1-(1.007571337)^{-96}}{0.007571337}\right)$$

$$336{,}335.06 = R(68.05197809)$$

$$R = 336{,}335.06/68.05197809 \quad \text{o bien,} \quad R = 4{,}942.33 \text{ redondeando.}$$

Note usted que los intereses que se devengan en los 8 años son:

$$I = 4{,}942.33(96) - 143{,}277.50 \quad \text{o bien,} \quad I = \$341{,}582.11$$

ya que el total aportado a la Afore está dado por $Suma = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r}$

$$C = 737.58\left(\frac{1-(1.0408)^{20}}{1-1.0408}\right)(6) = 737.58(30.02647574)(6) \quad \text{o bien,} \quad C = 132{,}881.57$$

Ejercicios 7.5

1. ¿De qué manera pueden variar las rentas en los fondos estudiados en esta sección?

***2.** ¿En cuánto tiempo se acumulan $250,000 en un fondo de jubilación, con abonos mensuales que comienzan con $6,150, crecen 12% cada trimestre y devengan intereses a una tasa del 10.5% compuesto por meses? Ajuste el valor de los depósitos.

3. Para construir otra sucursal, Farmacias de León, S.A., crea un fondo con depósitos trimestrales que crecen 3% cada semestre. ¿Cuánto acumula en 2 años si el primero es por $825,000 y se ganan intereses a una tasa del 5.6% capitalizable por trimestres? ¿Cuánto se devenga por intereses?

***4.** El decimonoveno depósito quincenal en un fondo es de $13,250 y el decimoctavo es de $12,500. Calcule el monto acumulado en 1.5 años si se ganan intereses a una tasa del 12.3% nominal trimestral y si los depósitos crecen cada trimestre con:

a) Una diferencia constante, aritméticamente.

b) Una razón constante, geométricamente.

***5.** ¿Cuánto se acumula en un fondo con 28 depósitos semanales que de 4 en 4 crecen $75, si el primero es de $1,500 y se ganan intereses a una tasa del 6.5% nominal semanal?

***6.** Se constituye un fondo con reservas mensuales para acumular $1'750,000 en 3 años, ganando intereses a una tasa del 9.12% convertible mensualmente. Luego de hacer el pago número 24, se decide incrementar los siguientes en $1,250 cada cuatrimestre. ¿Cuánto se acumula en los 3 años?

***7.** El gerente de una compañía consigue un crédito de US$15,000 pagaderos en un año, con cargos a una tasa del 15% efectivo. Simultáneamente, constituye un fondo de amortización, con depósitos quincenales que incrementa 6% cada bimestre ganando intereses a una tasa del 12.42% convertible quincenalmente. ¿Cuánto faltará o sobrará para liquidar el crédito y los intereses al final del año, si el primer depósito es de US$500.

8. Los depósitos mensuales del primer cuatrimestre en un fondo educativo son de $20,000 y los del tercero son de $22,472. ¿Cuánto se acumula en 3 años si devengan una tasa de interés del 6.96% compuesto por meses y crecen en forma geométrica?

***9.** ¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 20 aportaciones mensuales que crecen $450 cada cuatro, la primera es de $6,500 y la tasa de interés es del 9.63% anual capitalizable por meses?

***10.** ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 9?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***11.** Obtenga el valor de los primeros depósitos quincenales que crecen $200 cada trimestre, para acumular $150,000 en 1.5 años en un fondo de jubilación con intereses a una tasa del 8.32% compuesto por quincenas. ¿A cuánto ascienden los intereses?

En los problemas 12 a 16 diga si la afirmación es verdadera o falsa.

***12.** Si la universidad crea un fondo de jubilación con 36 rentas bimestrales que crecen $1,200 cada bimestre, ganando intereses del 8.4% nominal bimestral y la primera es por $45,000, entonces 10 años después de la última aportación podrá disponer de $6'578,494.73.

____

13. El monto que se acumula en un fondo de inversión que genera intereses a una tasa del 9.9% nominal mensual, en 3 años de plazo con mensualidades que crecen $250 cada semestre y la primera es por $3,850, es de $336,654.20. __________

14. Los intereses que se generan en el fondo del problema 13 ascienden a $40,554.20. ______

***15.** Se deben depositar $64,316.88, 7 meses antes de la primera aportación mensual de un total de 25 que crecen 0.8% cada mes con intereses del 12.6% nominal mensual para lograr un monto de $950,000, 2 años después del último depósito que fue por $35,000.

____

16. Si con 60,000 se constituye un fondo seguido de 27 depósitos trimestrales que crecen $750 cada trimestre, el primero es por $8,250 y se ganan intereses del 8.46% nominal trimestral, entonces el monto acumulado es de $733,222.96. __________

En los problemas del 17 al 25 selecciona la opción correcta justificándola.

17. ¿De cuánto dinero podrá disponer cada quincena durante 10 años de su fondo deahorro para el retiro un empleado que cotizó durante 23 años, la primera aportación bimestral neta fue de $530, misma que ha crecido en un 6.03% cada año? Suponga que le bonifican 10.26% nominal bimestral.

a) $3,473.20 *b*) $4,209.36 *c*) $3,163.71 *d*) $4,863.70 *e*) Otra

18. ¿De cuánto podrá disponer el empleado del problema 17, cada mes, durante 8 años?

a) $9,328.43 *b*) $7,981.01 *c*) $10,429.35 *d*) $7,429.39 *e*) Otro

19. ¿Cuántas disposiciones mensuales de $15,450 puede hacer el empleado del problema 18?

a) 35 *b*) 48 *c*) 40 *d*) 43 *e*) Otro

20. Para construir una carretera de cuota que une a 2 importantes ciudades del país e incluye uno de los puentes más altos del mundo, se tiene un presupuesto actual de 8,500 millones de pesos. Se constituye un fondo con 20 aportaciones mensuales que crecen 4% cada cua - trimestre, ¿de cuánto será la primera si se ganan intereses del 12.3% anual capitalizable por meses y se considera que el costo total de la construcción se incrementará un 2.5% cada semestre por efectos de la inflación y otros factores?

a) $367'977,029.90 *b*) $358'063,398.43 *c*) $348'729,043.12 *d*) $325'728.930.42 *e*) Otra

***21.** Una constructora constituye un fondo con intereses del 13.2% nominal bimestral y aportaciones bimestrales que crecen 7% cada semestre, ¿cuánto acumulará un año después de la última si la primera fue por $125,000 y son 21?

a) $5'729,521.87 *b*) $4'923,728.41 *c*) $5'422,200.68 *d*) $3'065,778.09 *e*) Otra

***22.** ¿Con qué capital como primera renta debe comenzar el señor López sus depósitos quincenales, en un fondo de ahorro que reditúa el 8.28% de interés nominal bimestral si pretende acumular $85,000 en 2 años y si los incrementa en $180 cada bimestre?

a) $725.33 *b*) $687.42 *c*) $763.98 *d*) $671.38 *e*) Otra

***23.** ¿De cuánto dinero dispondrá el empleado del problema 17 en el momento de su jubilación si simultáneamente hizo depósitos semanales en un banco que le bonifica el 8.32% nominal semanal? Considere que el primero fue de $40 y los incrementos en $5 cada semestre.

a) $630,209.42 *b*) $725,429.08 *c*) $683,345.45 *d*) $625,998.83 *e*) Otra

24. ¿Cuánto se tendrá en un fondo luego de 40 aportaciones quincenales que crecen 3.5% cada bimestre, la primera fue por $3,650 y se ganan intereses del 7.20% anual capitalizable por quincenas?

a) $183,806.04 *b*) $201,409.63 *c*) $198,191.75 *d*) $187,923.03 *e*) Otra

25. ¿De cuánto será la primera aportación quincenal en un fondo de ahorros si se generan intereses del 10.32% nominal quincenal? Suponga que son 44, crecen 3% cada cuatrimestre y se pretende acumular un monto de $ 1'250,000, 3 años después de la última.

a) $8,429.35 *b*) $10,940.51 *c*) $7,431.52 *d*) $7,921.78 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Explicar los fondos de renta fija y sus fines.
- Mencionar y describir los fondos de renta variable, sus finalidades y las formas en que pueden variar los depósitos.
- Encontrar el monto, la renta, el plazo y los intereses en los fondos de renta fija.
- Calcular el monto, los intereses, la renta y el plazo en los fondos de renta variable.
- Hacer los cuadros de los fondos de renta fija y de renta variable.

Conceptos importantes

Cuadro de un fondo
Fondo de renta fija
Fondo de rentas variables
Fondos de renta variable en grupos
Los fondos como anualidades anticipadas de renta variable
Variación aritmética y geométrica en la renta de los fondos

Problemas propuestos para exámenes

***1.** Una fábrica de muebles consigue un crédito en mercancía de $435,000 a pagar con intereses a una tasa del 14% simple anual al final de 8 meses. Simultáneamente crea un fondo de amortización con depósitos mensuales que devengan intereses a una tasa del 8.52% anual compuesto por meses, ¿de cuánto es cada uno?

2. ¿Cuánto acumula un empleado en un fondo de ahorro con 25 depósitos quincenales de $750 si le pagan intereses a una tasa del 7.28% compuesto por quincenas? ¿Cuánto gana por concepto de intereses?

***3.** ¿Cuánto se acumula en un fondo de reposición de maquinaria y equipo durante 3 años, si las primeras 6 rentas bimestrales son de $75,000 y a partir de la séptima se incrementan 12% cada 3? Suponga intereses a una tasa del 11.22% nominal bimestral.

***4.** ¿Cuánto tiempo falta para que un empleado se retire si sabe que su Afore le reditúa un interés a una tasa del 8.4% anual compuesto por meses, su primera aportación mensual fue de $220, sus aportaciones crecen 9% cada semestre y recibirá $6 1,120 en su retiro? Suponga que comenzó hace 2 años.

***5.** ¿De qué cantidad dispondrá el profesor González en su fondo para el retiro, cuando se jubile, si la Afore a la que se afilió le reditúa un interés a la tasa del 10.5% anual compuesto por meses? Su primera aportación mensual fue de $498 y después las aumentó en 3.8 % cada semestre? Suponga que faltan 5 años para el retiro del profesor González y comenzó hace 2 años.

6. En el problema 5, ¿de qué monto dispondrá el profesor al final de los 7 años, si incrementa sus aportaciones un 6.6% cada año?

7. ¿Cuánto acumula el señor Pérez en un fondo con 20 aportaciones mensuales de $1,500 si le bonifican intereses del 10.5% anual capitalizable por meses?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***8.** Suponga que deposita hoy $5,000 en un fondo que genera intereses del 10.56% nominal mensual, ¿cuánto tendrá al final de 18 años, suponiendo que continúa con 40 aportaciones mensuales que crecen sucesivamente $7.00, la primera de las cuales es por $1,320 y la realiza dentro de un mes?

***9.** ¿Cuánto se acumula en un fondo de jubilación si durante 13 años se hacen depósitos mensuales que crecen $3 cada mes, se ganan intereses del 8.88% capitalizables por mes y el primero es por $3,323?

***10.** ¿Cuánto dinero se acumula en el fondo del problema 9 si las aportaciones crecen 1.8% cada mes?

11. ¿A cuánto ascienden los intereses del problema 9?

Conteste si las afirmaciones en los problemas 12 a 19 son falsas o verdaderas.

12. Los depósitos en un fondo de esta sección son anticipados, es decir, se hacen al inicio de cada periodo __________.

13. La tasa de interés en un fondo de amortización es igual a la que se carga a la deuda que es el objeto del fondo __________.

14. El monto acumulado M en un fondo de renta variable geométricamente está dado por:

$$M = R_1\left(\frac{1+i/p}{f-i/p}\right)\left[(1+f)^{np} - (1+i/p)^{np}\right]$$

donde f es la razón de crecimiento en los pagos.

15. Se crean fondos sólo para amortizar un crédito __________.

16. En un fondo, generalmente los pagos se relacionan con su valor futuro al final del plazo __________.

17. Los intereses en un fondo se obtienen restando del monto la suma de todas las aportaciones. __________

18. Para acumular $800,000 en un fondo que genera intereses a una tasa del 6.9% nominal mensual, se requieren 15 rentas mensuales de $50,335.00. __________

19. El monto acumulado con 20 rentas quincenales que crecen $50, siendo la primera renta de $2,365 y la tasa de interés del 7.8% compuesto por meses, es $58,664.06. __________

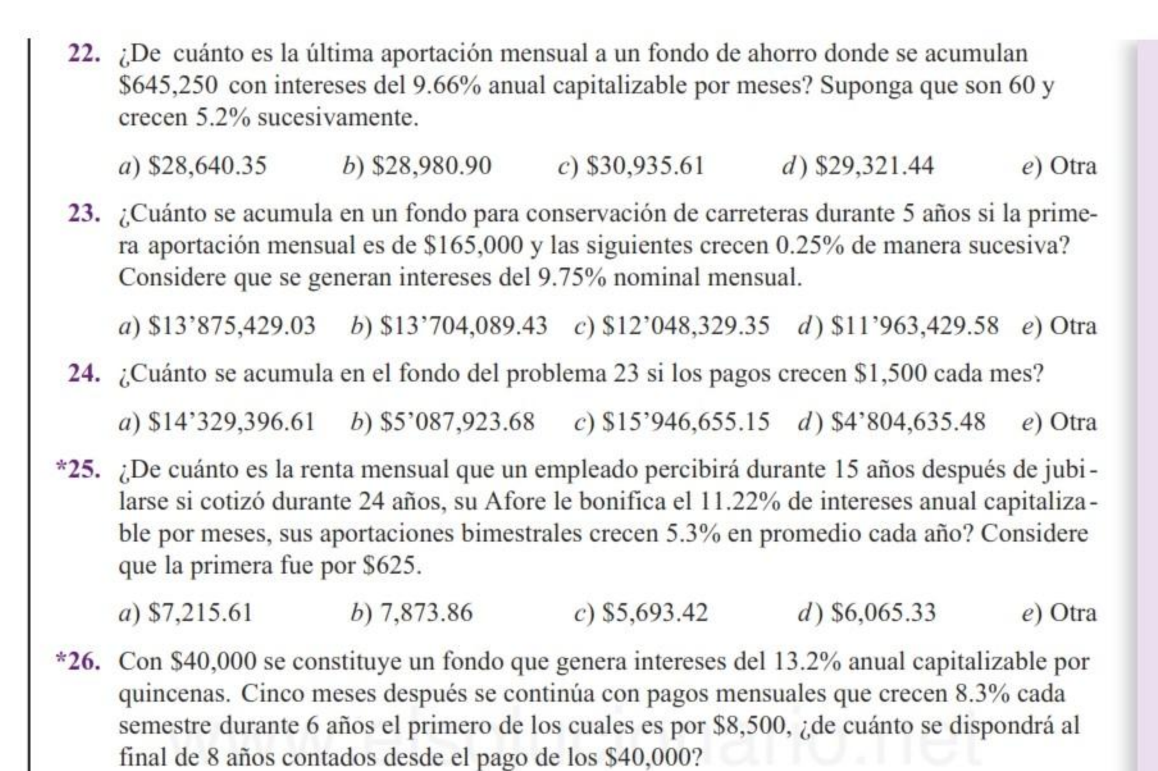
En los problemas 20 al 28 seleccione la opción correcta justificándola.

***20.** ¿Cuánto debe depositarse cada quincena en un fondo de amortización gradual, para recuperar un pagaré que se endosó por mercancía con valor de $72,750? Suponga que los intereses del fondo son del 11.4% anual capitalizable por quincenas, el plazo es de 8 meses y los intereses del crédito son del 14% simple anual.

a) $6,250.08 *b*) $4,425.36 *c*) $6,963.41 *d*) $4,773.85 *e*) Otra

***21.** En el problema 20, ¿de cuánto será la primera renta si crecen $150 de manera sucesiva?

a) $3,663.95 *b*) $4,929.32 *c*) $3,425.35 *d*) $4,003.84 *e*) Otra


22. ¿De cuánto es la última aportación mensual a un fondo de ahorro donde se acumulan $645,250 con intereses del 9.66% anual capitalizable por meses? Suponga que son 60 y crecen 5.2% sucesivamente.

a) $28,640.35 *b*) $28,980.90 *c*) $30,935.61 *d*) $29,321.44 *e*) Otra

23. ¿Cuánto se acumula en un fondo para conservación de carreteras durante 5 años si la primera aportación mensual es de $165,000 y las siguientes crecen 0.25% de manera sucesiva? Considere que se generan intereses del 9.75% nominal mensual.

a) $13'875,429.03 *b*) $13'704,089.43 *c*) $12'048,329.35 *d*) $11'963,429.58 *e*) Otra

24. ¿Cuánto se acumula en el fondo del problema 23 si los pagos crecen $1,500 cada mes?

a) $14'329,396.61 *b*) $5'087,923.68 *c*) $15'946,655.15 *d*) $4'804,635.48 *e*) Otra

***25.** ¿De cuánto es la renta mensual que un empleado percibirá durante 15 años después de jubilarse si cotizó durante 24 años, su Afore le bonifica el 11.22% de intereses anual capitalizable por meses, sus aportaciones bimestrales crecen 5.3% en promedio cada año? Considere que la primera fue por $625.

a) $7,215.61 *b*) 7,873.86 *c*) $5,693.42 *d*) $6,065.33 *e*) Otra

***26.** Con $40,000 se constituye un fondo que genera intereses del 13.2% anual capitalizable por quincenas. Cinco meses después se continúa con pagos mensuales que crecen 8.3% cada semestre durante 6 años el primero de los cuales es por $8,500, ¿de cuánto se dispondrá al final de 8 años contados desde el pago de los $40,000?

a) $1'843,208.95 *b*) $1'725,615.03 *c*) $1'861,269.70 *d*) $1'845,269.70 *e*) Otra

27. ¿Cuánto se genera por concepto de intereses en el problema 26?

a) $765,329.45 *b*) $836,045.88 *c*) $823,321.03 *d*) $778,429.63 *e*) Otra

28. La aportación anual neta actual de un obrero a su Afore es por $723, ¿de cuánto podrá disponer cuando se retire, evento que sucederá dentro de 7 años, si le pagan intereses del 7.2% anual capitalizable por años y estará cotizando durante 26 años en total? Suponga que crecen 5.36% cada año.

a) $35,923.84 *b*) $38,641.33 *c*) $40,105.23 *d*) $29,369.91 *e*) Otra





Depreciación de activos

Contenido de la unidad

Con excepción de los terrenos y algunos otros bienes, el valor de casi todos los activos se reduce con el tiempo desde el momento cuando son adquiridos o se ponen en servicio. Esta pérdida del valor se conoce como *depreciación* y es causada principalmente por el uso, la insuficiencia o la obsolescencia del propio bien.

Desde el punto de vista fiscal o impositivo, los cargos por depreciación son determinados por el gobierno, pero no obsta para que las empresas destinen partidas de dinero, de forma periódica, para no descapitalizarse en el momento de reponer sus activos, es decir, cuando dejan de ser útiles, o su mantenimiento y sus reparaciones resultan muy costosas al final de su *vida útil.* De aquí que es conveniente, y de gran utilidad, disponer de los diferentes métodos para depreciar activos y estimar su valor real en cualquier momento.

En este capítulo se exponen los métodos más usuales para calcular los cargos por depreciación, teniendo presente que generalmente se evalúa en periodos anuales.

En cada uno de los métodos de depreciación que aquí se estudian se ha involucrado el incremento que se da en el valor de los activos a causa de la inflación y otros factores que dan lugar a que, con el paso del tiempo, el bien se cotice a un precio más alto que el que se estipula en la factura, aun considerando los efectos de la depreciación.

Un claro ejemplo de lo anterior se presenta cuando compramos un automóvil de medio uso, es decir, seminuevo.

8.1 Definiciones y conceptos

Las siguientes son definiciones y conceptos importantes concernientes a la depreciación de activos.

Definición 8.1

La pérdida de valor de un activo fijo y tangible a consecuencia de su insuficiencia, uso u obsolescencia se denomina ***depreciación***.

La depreciación constituye un gasto periódico, generalmente anual, por lo que constituye una renta y se denota con R.

Definición 8.2

La ***vida útil*** de un activo es el tiempo que hay entre su compra y su retiro.

La vida útil se expresa con n y se mide en años, unidades de servicio o número de piezas producidas.

Definición 8.3

El ***valor de rescate*** de un activo es el que tendrá al final de su vida útil.

El valor de rescate, que también se conoce como *valor de desecho* o *valor de salvamento* se expresa como C_n.

Puede ser *positivo* cuando se vende para otros usos, por lo que representa alguna recuperación económica para el propietario; puede ser *negativo,* si requiere un gasto adicional para su remoción; por ejemplo, la inversión que se hace al demoler un edificio luego de haber

culminado su vida de servicio. También llega a ser *nulo*, si se convierte en un total y absoluto desperdicio.

Para los cálculos de la depreciación de algunos bienes específicos —los automóviles usados, por ejemplo— el valor de compraventa puede ser considerado como su valor de rescate para quien lo vende.

Otros conceptos y valores que participan con la depreciación de activos, con su respectiva nomenclatura, son los siguientes:

El ***precio original*** es el valor de arranque para la depreciación; se expresa con C.

La ***depreciación acumulada***, que se obtiene sumando la de un año cualquiera con la de los anteriores.

El ***valor contable*** o ***valor en libros*** es el que tiene el activo al final del año k-ésimo, luego de haberse hecho el cargo por depreciación. Se denota con C_k, donde $k = 1, 2, \ldots, n$.

Es evidente que al comenzar la vida útil del activo el valor en libros es igual a su precio y este cambia de acuerdo con la depreciación anual, hasta que en el último año de su vida útil coincide con el valor de rescate. El valor de rescate se denota con C_n.

El capital total en que se deprecia un activo se llama ***base de depreciación*** y es igual a la diferencia entre el precio original y el valor de rescate, es decir, $C - C_n$.

En algunos casos de depreciación, se utilizan 2 tasas, la tasa de inflación se denota i y la de depreciación d.

Como se mencionó, la depreciación se evalúa anualmente y si es necesario estimarla en alguna fecha intermedia dentro del periodo anual, bastará con encontrar la parte proporcional correspondiente, planteando una regla de 3. Por ejemplo, si se asume una depreciación lineal, la depreciación hasta el séptimo mes del año, se obtiene multiplicando el cargo por depreciación anual por la fracción 7/12.

Métodos

Los métodos más usuales para calcular la depreciación son los siguientes, que se clasifican en 3 grupos:

Con promedios

- De la línea recta o lineal.
- De horas de servicio o unidades de producción.

Con cargo decreciente

- De suma de dígitos.
- De tasa fija.

Con interés compuesto

- De fondo de amortización.
- De anualidad ordinaria.

Con excepción del último grupo, que es semejante al de *fondo de amortización,* en seguida se analizan cada uno de los otros 2 grupos. Dependiendo del método, y de si se considera la inflación, los cargos anuales pueden ser todos iguales o diferentes entre sí, pero en todo caso llega

a hacerse un ***cuadro de depreciación*** para ilustrar el comportamiento de dichos cargos en cada año y el ***valor contable,*** mismo que puede ser útil para el pago de impuestos.

8.2 Método de la línea recta

En este método, el cargo anual es el mismo para todos los años de la vida útil del activo, es decir, ofrece el mismo servicio durante cada uno de los periodos de operación. El cargo por año se obtiene dividiendo la *base de depreciación* entre el total de años de servicio, es decir:

Teorema 8.1

En el ***método* de la *línea recta*,** la depreciación anual está dada por:

$$R = \frac{C - C_n}{n} \text{ donde:}$$

C, es el precio original del activo, C_n el valor de rescate y n es la vida útil del activo en años.

Como en todas las fórmulas, pueden deducirse cualquiera de las 4 variables que aparecen en ésta; bastará con reemplazar las 3 que se conozcan y luego con álgebra básica, hallar el que falta.

Ejemplo 1



Depreciación con el método de la línea recta, cuadro

La Constructora del Sureste, S. A., compró una máquina para hacer block-ladrillo en \$121,000. Se estima que ésta tendrá 5 años de vida útil y \$13,200 como valor de rescate. Empleando el método de la línea recta, obtenga la depreciación anual y haga el cuadro de depreciación.

solución

Los valores para sustituir en el teorema 8.1 son:

C = \$121,000, el precio original

C_n = \$13,200, el valor de rescate

n = 5, la vida útil del activo en años

El cargo por depreciación para cada año es entonces:

$$R = \frac{121,000 - 13,200}{5} \quad \text{o bien,} \quad R = \$21,560$$

Significa que la máquina de hacer ladrillos disminuirá su valor en esta cantidad, en cada uno de los 5 años de su vida útil.

Cuadro de depreciación

La tabla de depreciación es la siguiente, que se inicia escribiendo la depreciación anual en todos los renglones de la segunda columna, y el precio original del activo, en el primer renglón de la última.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	$121,000
1	$21,560	$21,560	$99,440
2	$21,560	$43,120	$77,880
3	$21,560	$64,680	$56,320
4	$21,560	$86,240	$34,760
5	$21,560	$107,800	$13,200

Note que:

- En la tercera columna está la *depreciación acumulada*, que es igual a la suma de las depreciaciones anuales hasta ese periodo.
- En la cuarta columna se encuentra el valor contable, que se obtiene de restar la depreciación anual, del valor en libros anterior o restando del precio original la depreciación acumulada.
- El valor contable es el valor del activo al término de cualquier periodo; sería el precio de compraventa si en ese momento se vendiese, que, como se dijo, puede ser útil también para cargos fiscales.

Este valor contable al final del k-ésimo año, en el método de la línea recta, está dado por:

$$C_k = C - k(R)$$

Al término del tercer año, por ejemplo, es:

$$\begin{aligned} C_3 &= 121{,}000 - 3(21{,}560) \\ &= \$56{,}320 \end{aligned}$$

tal como se ve en el cuadro anterior.

También es cierto que la suma de los valores de las columnas 3 y 4, en cualquier renglón o periodo, es igual al precio original del activo.

Por otro lado, puede suceder que el valor de rescate del activo sea más bien un gasto y en ese caso será negativo tal como se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2

Depreciación anual en el método de la línea recta

¿De cuánto es la depreciación anual de una máquina que costó $150,000, si será utilizada durante 6 años, y al final se gastarán $18,600 en su remoción y cambio por otra más moderna?

solución

En la ecuación 8.1 se reemplazan:

C por $150,000, el precio original

n por 6 años, la vida útil de la máquina

C_n por – $18,600 el valor de rescate; negativo, porque es un gasto

Entonces, la depreciación por año es:

$$R = \frac{150,000 - (-18,600)}{6} = \frac{168,600}{6}$$

$$R = \$28,100$$

Depreciación con inflación en el método de la línea recta

Si bien es cierto que el valor en libros o valor contable de un activo es independiente de su valor comercial, este valor puede ser considerado para estimar los costos por depreciación anual del activo, manejándolo como su valor de rescate C_n.

Es posible que, por ejemplo, al comprar un automóvil seminuevo el precio de compraventa sea mayor que el consignado en la factura original, lo cual se debe a que la inflación y otros factores producen un efecto mayor que el que ocasiona la depreciación haciendo que el precio se incremente. A continuación se desarrolla una fórmula que puede ser utilizada en casos como el presente.

Ejemplo 3

Valor de rescate, deducción de fórmula

¿Cuál será el valor de rescate de un activo que costó $100,000, si se deprecia de manera constante en $9,500 cada año y durante 5 años, y su valor en libros aumenta 12% anual por inflación y otros factores?

solución

El procedimiento consiste en incrementar el valor del activo de acuerdo con la inflación del primer año de vida, para luego restar el valor de la depreciación, es decir, al finalizar el primer año de servicio el valor será:

$$C'_1 = 100{,}000 + 0.12(100{,}000)$$
$$C'_1 = 100{,}000(1.12) \qquad C + Ca = C(1 + a)$$
$$C'_1 = \$112{,}000$$

Con la depreciación de \$9,500 el valor neto o efectivo será:

$$C_1 = 112{,}000 - 9{,}500$$
$$C_1 = 102{,}500$$

Al término del segundo año, este valor crece un 12%

$$C'_2 = 102{,}500(1.12)$$
$$C'_2 = 114{,}800$$

Restando la depreciación del año, queda:

$$C_2 = 114{,}800 - 9{,}500$$
$$C_2 = 105{,}300$$

Al concluir el tercer periodo, el costo sin considerar la depreciación es:

$$C'_3 = 105{,}300(1.12)$$
$$C'_3 = 117{,}936$$

Con depreciación:

$$C_3 = 117{,}936 - 9{,}500$$
$$C_3 = 108{,}436$$

Al finalizar el cuarto se tiene:

$$C'_4 = 108{,}436(1.12)$$
$$C'_4 = 121{,}448.32$$

Entonces, $C_4 = 121{,}448.32 - 9{,}500$

$$C_4 = 111{,}948.32$$

Al término de los 5 años, el valor de rescate del activo será:

$$C'_5 = 111{,}948.32(1.12)$$
$$C'_5 = 125{,}382.1184$$

y por eso, $C_5 = 125{,}382.1184 - 9{,}500$

$C_5 = \$115{,}882.12$, redondeando.

Esto significa que, a pesar de haberse depreciado, el activo aumentó su valor original en \$15,882.12 durante los 5 años.

Para generalizar lo anterior, adviértase lo siguiente:
El valor al final del primer año es:

$$C'_1 = C + C(i)$$

$C'_1 = C(1 + i)$, donde i es la tasa de inflación anual.

Se resta la depreciación por año, R.

$$C_1 = C(1+i) - R$$

Al final del segundo año, esto crece otro 12%

$$C'_2 = C_1 + C_1(i)$$
$$C'_2 = C_1(1+i)$$
$$C'_2 = [C(1+i) - R](1+i) \quad \text{ya que} \quad C_1 = C(1+i) - R$$

Restando la depreciación correspondiente queda:

$$C_2 = [C(1+i) - R](1+i) - R$$

Considerando la inflación y luego la depreciación, se llega a que al final del tercer año el valor es:

$$C'_3 = ([C(1+i) - R](1+i) - R)(1+i)$$
$$C_3 = ([C(1+i) - R](1+i) - R)(1+i) - R$$

Para quitar los paréntesis, se efectúa la multiplicación por $(1+i)$ y luego el corchete.

$$C_3 = [C(1+i) - R](1+i)(1+i) - R(1+i) - R$$
$$C_3 = C(1+i)(1+i)(1+i) - R(1+i)(1+i) - R(1+i) - R \quad \text{o bien,}$$
$$C_3 = C(1+i)^3 - R(1+i)^2 - R(1+i) - R$$

Procediendo de manera semejante, se verá que al final del cuarto año el valor del activo será:

$$C_4 = C(1+i)^4 - R(1+i)^3 - R(1+i)^2 - R(1+i) - R \quad \text{o bien,}$$
$$C_4 = C(1+i)^4 - R[(1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i) + 1]$$
$$= C(1+i)^4 - R[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3] \quad a + b = b + a$$

Es evidente que al término del enésimo año el valor del activo será:

$$C_n = C(1+i)^n - R[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}]$$

La suma entre corchetes corresponde a una serie geométrica con $a_1 = 1$, el primer término, $r = 1 + i$, la razón común, y n términos. Puede evaluarse, por lo tanto, con la ecuación del teorema 2.4.

$$s_n = (1)\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \quad s_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$s_n = \frac{1-(1+i)^n}{-i} \quad \text{o bien,}$$

$$s_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad a - b = -(b-a)$$

Al sustituir esto por el contenido de los corchetes, resulta que el valor de rescate del activo estará dado por la ecuación del siguiente teorema.

Teorema 8.2

El valor del rescate o de compraventa de un activo que se deprecia con el *método de la línea recta* después de n años y considerando la inflación es:

$$C_n = C\,(1+i)^n - R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

donde: C es el precio original, i es la tasa de inflación anual, R la depreciación por año y es constante. Si n se sustituye por K, resulta el valor contable, o de compraventa, K años después de su adquisición.

Ejemplo 4

Ⓕ



Resuelva el ejemplo 3 con la ecuación del teorema 8.2.

solución

Los valores para sustituir son:

$C = \$100{,}000$, el precio original
$R = \$9{,}500$, la depreciación por año
$i = 0.12$, la tasa de inflación anual
$n = 5$, la vida útil en años

Entonces el valor de rescate es:

$$C_5 = 100{,}000(1.12)^5 - 9{,}500\left[\frac{(1.12)^5 - 1}{0.12}\right]$$

$$C_5 = 100{,}000(1.762341683) - 9{,}500(6.352847358)$$
$$C_5 = 176{,}234.17 - 60{,}352.05$$
$$C_5 = \$115{,}882.12$$

que es igual al que se obtuvo en el ejemplo 3.

Ejemplo 5

Depreciación anual, valor contable, cuadro de depreciación

Encontrar la depreciación anual de un edificio cuya construcción ha costado 84 millones de pesos, se considera que estará en servicio durante 40 años, que al final será necesario invertir un cierto capital para su demolición y limpieza del terreno. Se estima, además, que la inflación será del 8% anual en promedio y que las obras de demolición de un edificio semejante actualmente tienen un costo de 1.25 millones de pesos.

Calcular el valor contable al final del año 30 y hacer el cuadro en sus primeros 3 renglones y el último.

solución

a) El valor de rescate es el costo de la demolición, y 40 años después con incrementos del 8% anual, será:

$C_n = 1.25(1.08)^{40}$

$C_n = 1.25(21.7245215)$ o bien,

$C_n = 27.15565188$, que puede redondearse en 27.2 millones, dado que es un estimado.

La depreciación anual R se despeja de la igualdad siguiente, que resulta de sustituir en la ecuación 8.2 los valores:

$C = 84$ millones, el valor original

$C_n = -27.2$, el valor de rescate, negativo; es un gasto

$i = 0.08$, la tasa de inflación anual

$n = 40$, la vida útil del edificio

$$-27.2 = 84(1.08)^{40} - R\left[\frac{(1.08)^{40} - 1}{0.08}\right]$$

$$-27.2 = 84(21.7245215) - R(259.0565188)$$

de donde $R(259.0565188) = 1{,}824.859806 + 27.2$

$R = 1{,}852.059806/259.0565188$ o bien, $R = 7.149249957$ millones.

b) El valor en libros, al final del año 30, se obtiene sustituyendo n por 30 en la ecuación 8.2

$$C_{30} = 84(1.08)^{30} - 7.149249957\left[\frac{(1.08)^{30} - 1}{0.08}\right]$$

$$C_{30} = 84(10.06265689) - 7.149249957(113.2832111)$$

$$C_{30} = 845.2631788 - 809.8899921$$

$$C_{30} = 35.3731867$$

c) Con respecto al cuadro de depreciación del ejemplo 1, ahora se agrega la columna: *Valor con inflación* al inicio de cada periodo, que se obtiene multiplicando el valor en libros anterior por 1.08. El cuadro es el siguiente, con las cantidades en millones de pesos.

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	84.00000000
1	90.72000000	7.149249957	7.149249957	83.57075004
2	90.25641004	7.149249957	14.29849991	83.10716008
3	89.75573289	7.149249957	21.44774987	82.60648293
. . .				
39		7.149249957	278.8207483	–18.56550930
40	–20.05075004	7.149249957	285.9699983	–27.20000000

Para el último renglón, observe que:

- En la última columna está el valor de rescate: -27.2.
- En la cuarta, está la depreciación total $40(7.149249957) = 285.9699983$.
- La tercera contiene la depreciación anual, que es constante. Para el valor con inflación que va en la segunda columna, nótese que es igual a $(1.08)\,X$, donde X es el valor contable en el renglón 39; como se ve en los primeros renglones, debe cumplirse que:

Al restar la depreciación anual del valor con inflación en cualquier fila, resulta el valor contable de la última columna, es decir,

$$1.08(x) - 7.149249957 = -27.2$$

de donde al despejar x queda el valor contable del penúltimo periodo.

$$x = (-27.2 + 7.149249957)/1.08$$

$$x = -18.5655093$$

y en consecuencia $1.08(x) = -20.05075004$ es el último valor con inflación.

Ejercicios 8.2

1. ¿Qué entiende usted por *vida útil* de un activo?
2. ¿Cuáles son los métodos que aquí se mencionan para depreciar un activo?
3. ¿Qué es el *valor en libros* y qué relación tiene con la *depreciación acumulada* en el método lineal?

4. ¿Qué característica tiene el método lineal?

5. ¿Qué es la *depreciación* de un activo?

6. ¿Con qué otros calificativos se conoce el *valor de rescate?*

7. ¿Qué diferencias observa usted en el método lineal con y sin inflación?

8. Escriba la fórmula que se utiliza para depreciar un activo con el método de la línea recta.

En los siguientes problemas utilice el método lineal.

*9. Se compra una máquina en $325,000 con 7 años de vida útil, según el fabricante. ¿De cuánto es el valor de desecho si se deprecia $35,000 por año?

*10. ¿Cuánto se rescata por una lancha que costó $180,000, si se deprecia $8,000 anuales durante 5 años y aumenta su valor con la inflación del 5.4% anual?

11. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que 10 años antes costó $1'345,000, si se deprecia $130,000 cada año y aumentó su valor con la inflación y otros factores un 8.5% anual?

*12. ¿Cuál es el valor de desecho de un automóvil al final de 5 años si costó $165,000 y se depre cia $7,150 anuales?

13. Un edificio costó 2.5 millones de pesos, aumenta su valor con la inflación del 6% anual y se deprecia $160,000 cada año durante 30 años, ¿cuál es el valor de rescate?

*14. En el problema 13 encuentre el valor contable al final del año 20 y al final del quinto.

*15. Se estima que el valor de rescate de un activo que costó $120,000 será de $23,000, ¿cuánto se deprecia cada año si su valor crece con la inflación del 14% anual? Suponga 8 años de vida útil y haga el cuadro de depreciación.

En los problemas 16 a 21 conteste verdadero o falso justificando su respuesta.

16. Un automóvil que se deprecia $9,600 anuales durante 5 años costó $150,956.07 y se vende en $138,000 considerando que su valor crece 4.8% por año por inflación y otros factores. __________

17. Un activo que costó $127,500 y se deprecia $35,200 anuales se vende en $38,050 conside - rando que su precio aumenta con la inflación de 5.5% anual durante los 4 años de su vida útil. __________

18. En 8 años el valor de rescate de una máquina que se deprecia $17,850 cada año si su valor crece con el 6.8% anual será de $283,658.26 suponiendo que costó $275,000. __________

19. Un activo que costó $175,000 y se deprecia $18,300 cada año, de los 6 que tiene de vida útil, tiene un valor de rescate de $65,200. __________

20. Un agricultor compró un tractor en $425,000 y a los 6 años lo vende en $180,000, entonces la depreciación anual es de $40,833.33. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

21. La depreciación anual de una rotativa que costó $1.95 millones y al final de 7 años se vende en $750,000 es $171,428.57. __________

En los problemas del 22 al 30, seleccione la opción correcta justificando su elección.

***22.** ¿De cuántos años es la vida de un activo que costó $129,500, si se deprecia $8,150 cada año y al final se rescatan $48,000?

a) 11 *b*) 7 *c*) 10 *d*) 8 *e*) Otra

***23.** Se estima que el valor de rescate de una máquina de coser que costó $190,000 será de $69,300, luego de 7 años de su adquisición. ¿Cuál es la depreciación anual si su valor crece con la inflación del 9.3% anual?

a) $30,668.78 *b*) $35,049.03 *c*) $29,793.98 *d*) $32,908.63 *e*) Otra

24. ¿De cuánto es la depreciación anual de un activo durante 8 años si su valor de rescate es igual al 70% de su costo original de $275,000, suponiendo que su valor crece con el 7.28% anual?

a) $28,824.47 *b*) $26,429.35 *c*) $27,980.38 *d*) $30,202.25 *e*) Otra

25. Considerando que el valor de un molino crece con el 3.2% semestral, ¿cuál será su valor de desecho si costó $160,000 y se deprecia $15,000 anuales durante 5 años?

a) $98,709.63 *b*) $102,997.79 *c*) $107,527.09 *d*) $115,702.72 *e*) Otra

26. ¿En cuánto se venderá el molino del problema 25, 8 años después de que se compró, si después de los primeros 5 años se deprecia $18,350 anuales y su valor crece 2.8% por año?

a) $60,000.81 *b*) $96,429.33 *c*) $87,608.63 *d*) $70,003.08 *e*) Otra

27. ¿Obtenga el valor de compraventa, es decir, de rescate de un automóvil al final de 6 años si se compró en $190,500 y se deprecia $8,250 anuales?

a) $156,390.00 *b*) $148,088.75 *c*) $135,490.00 *d*) $141,000 *e*) Otra

28. ¿Cuál es la depreciación anual de un tractocamión que costó 1.53 millones de pesos, si tiene 7 años de vida útil y $520 como valor de rescate?

a) $144,285.14 *b*) $105,693.09 *c*) $93,229.78 *d*) $116,463.73 *e*) Otra

29. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que 9 años antes costó $965,000 y se deprecia $35,000 cada año? Considere que su valor aumentó con la inflación y otros factores 0.4% cada bimestre.

a) $849,811.85 *b*) $789,963.61 *c*) $910,793.45 *d*) $965,768.30 *e*) Otra

***30.** ¿En cuántos años el valor de rescate de un activo que costó $246,606.00 será de $35,000 si se deprecia $32,350 por año y se considera que su valor crece con el 6.8% anual?

a) 7 *b*) 10 *c*) 9 *d*) 8 *e*) Otra

8.3 Método de unidades de producción o de servicio

Este método es en realidad una variante del anterior, por eso se puede utilizar la fórmula del teorema 8.1, pero con n representando el número de unidades que se producen o las unidades que da servicio el activo que se deprecia.

Puede suceder que con este método la depreciación sea diferente para cada uno de los años de su vida útil. Generalmente la capacidad de producción o de horas de servicio es determinada por el fabricante del activo que se deprecia o con los datos históricos que se tengan de bienes semejantes.

Ejemplo 1

Depreciación con el método de las unidades producidas

Obtenga la depreciación anual de la máquina de ladrillos del ejemplo 1 de la sección 8.2, que costó \$121,000, al final de sus 5 años de vida útil tienen un valor de rescate de \$13,200 y se considera que se producen 10 millones de piezas distribuidas de la forma siguiente:

Año	Producción
1	1.80 millones
2	2.15 millones
3	2.50 millones
4	1.95 millones
5	1.60 millones
Total	10.00 millones

solución

En la ecuación 8.1 se reemplazan.

C por \$121,000, el precio original
C_5 por \$13,200, el valor de rescate
n por 10 millones, la producción total

Entonces por cada millón de piezas la depreciación es:

$$R = \frac{121,000 - 13,200}{10} \quad \text{o bien,}$$

$$R = \$10,780$$

Consecuentemente, la depreciación por año será igual a la multiplicación de este factor por la producción anual, es decir:

Año	Depreciación
1	1.80(10,780) = $19,404
2	2.15(10,780) = $23,177
3	2.50(10,780) = $26,950
4	1.95(10,780) = $21,021
5	1.60(10,780) = $17,248
	Total: $107,800

Note que la suma de los 5 valores es igual a la base de depreciación, es decir, la depreciación total, 121,000 – 13,200.

El cuadro de depreciación se comienza escribiendo la depreciación anual en la tercera columna y la producción por año en millones en la segunda.

Fin del año	Producción anual	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	121,000
1	1.80	19,404	19,404	101,596
2	2.15	23,177	42,581	78,419
3	2.50	26,950	69,531	51,469
4	1.95	21,021	90,552	30,448
5	1.60	17,248	107,800	13,200

Valor contable

La depreciación acumulada al final de cualquier año se obtiene sumando las depreciaciones anteriores, o multiplicando la producción hasta ese año por la depreciación unitaria, la que corresponde a un millón de piezas. Por ejemplo, la depreciación acumulada hasta el tercer año es:

$$(1.80 + 2.15 + 2.50)10{,}780 = \$69{,}531$$

El valor contable es igual a la diferencia entre el precio original del activo y la depreciación acumulada hasta ese año. En este caso, por ejemplo al final del tercer año, es:

$$\text{Valor en libros} = 121{,}000 - 69{,}531$$
$$= \$51{,}469$$

tal como se aprecia en el renglón correspondiente de la última columna del cuadro anterior.

Ejemplo 2

Depreciación anual, valor contable

Una compañía editorial adquirió en 1.9 millones de pesos una rotativa para producir 20 millones de ejemplares periodísticos durante 7 años, distribuidos de la forma siguiente, en miles: Primer año: 2,350; segundo: 2,500; tercero: 3,600; cuarto: 3,500; quinto: 3,450; sexto: 2,500 y séptimo: 2,100.

Se estima que luego de pagar por el desmantelamiento de la maquinaria, al final de los 7 años, se rescatan $400,000. Calcule la depreciación de cada año y el valor en libros al final del quinto periodo anual.

solución

a) La depreciación por cada ejemplar se obtiene sustituyendo, en la ecuación del teorema 8.1, los valores:

$$C = \$1'900{,}000, \text{ el costo original}$$
$$C_n = \$400{,}000, \text{ el valor de rescate}$$
$$n = 20'000{,}000 \text{ la producción total}$$

Entonces:

$$R = \frac{1'900{,}000 - 400{,}000}{20'000{,}000}$$
$$R = \$0.075 \quad \text{o bien,} \quad ¢7.5$$

Significa que cada ejemplar que se produce deberá tener un cargo de 7.5 centavos por "consumo" de la rotativa; por lo tanto, la depreciación anual en miles de pesos en cada uno de los 7 años es, respectivamente:

$$2{,}350(0.075) = 176.25$$
$$2{,}500(0.075) = 187.50$$
$$3{,}600(0.075) = 270.00$$
$$3{,}500(0.075) = 262.50$$
$$3{,}450(0.075) = 258.75$$
$$2{,}500(0.075) = 187.50$$
$$2{,}100(0.075) = 157.50$$

Total: $1,500 miles o bien, $1'500,000.

b) Para el valor en libros al final del quinto año, se resta del costo original, la depreciación acumulada hasta ese año, es decir:

$$C_5 = 1{,}900 - (176.25 + 187.50 + 270 + 262.50 + 258.75)$$
$$C_5 = 1{,}900 - 1{,}155 = 745 \text{ miles} \quad \text{o bien,} \quad C_5 = \$745{,}000$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado con el cuadro de depreciación.

Depreciación con inflación

La ecuación del teorema 8.2, contempla el efecto de la inflación en la depreciación de un activo, cuando ésta es igual para todos los años de vida del activo. En el ejemplo siguiente se analiza el efecto inflacionario donde la depreciación depende de las horas de servicio, es decir, es variable.

Ejemplo 3



Depreciación anual considerando inflación

Un taxista compra un automóvil en $185,000 y lo usa durante 4,000 horas el primer año, 4,300 el segundo, 4,100 el tercero, 4,000 el cuarto y 3,800 en el quinto. ¿De cuánto son los cargos por depreciación anual si al final lo vende en $75,000 y se considera que su valor aumenta con la inflación del 6.6% anual?

solución

Con la inflación del 6.6%, al final del primer año el valor del automóvil en miles de pesos, será:

$$185(1.066) = 197.21$$

La depreciación en este primer año es 4,000(X), donde X es la depreciación por hora; por lo tanto, el valor contable, en miles de pesos, es:

$$C_1 = 185(1.066) - 4(X)$$

Al terminar el segundo año, esto crece otro 6.6%

$$[185(1.066) - (4)X]1.066 = 185(1.066)^2 - 4(1.066)(X)$$

y el valor en libros, restando la depreciación de ese año, en miles de pesos es:

$$C_2 = [185(1.066)^2 - 4(1.066)X] - (4.3)X$$
$$C_2 = 185(1.066)^2 - 4(1.066)X - (4.3)X$$

Al final del tercer año, esto se incrementa otro 6.6%

$$[185(1.066)^2 - 4(1.066)X - (4.3)X]\ 1.066$$

el valor contable ahora es entonces:

$$C_3 = 185(1.066)^3 - 4(1.066)^2X - 4.3(1.066)X - (4.1)X$$

Es fácil verificar que, al final de los 5 años de vida útil, el valor en libros será:

$$C_5 = 185(1.066)^5 - 4(1.066)^4\,X - 4.3(1.066)^3\,X - 4.1(1.066)^2X - 4(1.066)X - (3.8)X$$

Efectuando los productos, esto es:

$$C_5 = 254.6582509 - (5.165219836)X - (5.20882863)X - (4.6590596)X - (4.264)X - (3.8)(X)$$

o bien, $C_5 = 254.6582509 - (23.09710807)X$

Esto es igual al valor de rescate, es decir, el valor de la compraventa del automóvil, \$75,000, en miles de pesos.

$$254.6582509 - (23.09710807)X = 75$$

de donde:

$$-(23.09710807)X = 75 - 254.6582509$$

$$(23.09710807)X = 179.6582509$$

$$X = 179.6582509/23.09710807$$

o bien, $X = \$7.778387249$ por hora de servicio.

La depreciación anual se obtiene multiplicando este resultado por el número de horas. Por ejemplo en el primero es:

$$R_1 = 4{,}000(7.778387249) = \$31{,}113.549$$

Esta depreciación y las siguientes se anotan en la tercera columna del cuadro de depreciación, manteniendo 4 cifras decimales.

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	185,000.0000
1	197,210.0000	31,113.5490	31,113.5490	166,096.4510
2	177,058.8168	33,447.0652	64,560.6142	143,611.7516
3	153,090.1272	31,891.3872	96,452.0014	121,198.7395
4	129,197.8563	31,113.5490	127,565.5508	98,084.3073
5	104,557.8716	29,557.8716	157,123.4220	75,000.0000

Note que:

Para este cuadro:

- El *valor con inflación* en cada periodo es igual al valor contable del año anterior, multiplicado por 1.066, que corresponde al índice inflacionario.
- El *valor contable* de cualquier periodo es igual al valor con inflación, menos la depreciación anual.
- La *depreciación acumulada* al final del último periodo, el quinto en este caso, es igual a la depreciación total, es decir:

$$(4{,}000 + 4{,}300 + 4{,}100 + 4{,}000 + 3{,}800)(7.778387249) = 20{,}200(7.778387249) = 157{,}123.422$$

Ejercicios 8.3

1. Describa el método de las unidades de producción o de servicio para depreciar un activo y cómo se calcula la depreciación anual.

*2. Una máquina suajadora costó $88,000, tiene una vida útil de 6 años, un rescate de $20,000 y la producción anual en miles de piezas es: 35 en el primero, 32 en el segundo, 29 en el tercero, 27 en el cuarto, 26 en el quinto y 21 en el último. Obtenga la depreciación anual.

*3. Una deshidratadora costó $84,000 y su valor de rescate al final de 8 años es de $10,000. ¿De cuánto es la depreciación anual si el primer año se producen 4 millones de piezas y se reduce 6% cada 2 años?

*4. Encuentre la depreciación anual de una fotocopiadora que costó $175,000 y tiene un valor de salvamento de $40,000. Considere que se obtienen 1.5 millones de copias distribuidas de la forma siguiente, durante los 6 años de vida útil.

Primero: 250 mil	Tercero: 300 mil	Quinto: 220 mil
Segundo: 270 mil	Cuarto: 260 mil	Sexto: 200 mil

5. ¿De cuánto es la depreciación anual de una computadora que costó $18,500, si se estima que dará servicio 2,750 horas cada año durante 4 años y al final se recuperarán $2,000?

6. El fabricante de una revolvedora de concreto para la construcción recomienda hacerla trabajar 2,000 horas en el primer año y reducir este número en 100 horas, sucesivamente, cada uno de los 7 años de vida útil. ¿De cuánto es la depreciación anual si al final se rescatan $34,125 y costó $231,000?

*7. Obtenga la depreciación acumulada y el valor en libros, al final de los 5 años, de una máquina que se compró en $130,000, la cual tiene 8 años de vida útil: si el primer año se producen 725,000 piezas y al final se recuperan $45,100 por la máquina. Suponga que la producción se reduce en 5,000 piezas por año.

8. Una pizzería compró una flotilla de motocicletas en $28,000 cada una. Se estima que las utilizará en 12 mil kilómetros cada año, durante los 4 años de vida útil. ¿Cuál es el valor de rescate si la depreciación por kilómetro recorrido es de 35 centavos.

9. Resuelva el problema 8, considerando que el kilometraje recorrido es de 13,000 kilómetros el primer año y éste se reduce en 5% anual.

10. El señor González compra un camión de pasajeros en 1.3 millones de pesos, lo usa durante 6 años y al final rescata $380,000. ¿Cuál es la depreciación anual si en el primer año le da 4,800 horas de servicio, 5,250 en el segundo, 4,350 en el tercero, 3,900 en el cuarto, 3,400 en el quinto y 3,300 horas en el sexto?

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

11. Obtenga la depreciación anual de un activo que costó $140,000, el cual tiene un valor de desecho de $23,000 y la producción en sus 5 años de vida útil en miles de piezas es: 13,500 en el primer año, 15,850 en el segundo, 13,750 en el tercero, 13,200 en el cuarto y 8,700 en el último.

En los problemas 12 a 17 responda si es verdadera o falsa la afirmación justificando su respuesta.

12. El valor de rescate de un activo que costó $75,000 se deprecia $4.00 por hora, el primer año da servicio durante 3,000 horas y este número se reduce 5% cada año durante 5, es de $20,707.42. __________

13. $84,728.19 es el valor de rescate de una máquina para hacer ladrillos, si su precio original fue de $265,000, tiene 7 años de vida útil y el primero se depreció $24,030 con 135,000 piezas producidas. Considere que esta producción se incrementa 2.3% cada año. __________

14. Si en el problema 13 la producción anual se reduce 0.8% cada año, entonces el valor de salvamento es de $100,773.64. __________

15. Si el propietario de un restaurante adquirió una flotilla de motocicletas para dar servicio a domicilio, con una inversión de $18,000 por unidad, estimando que cada una hará un recorrido de 11,000 kilómetros por año, durante los 3 años de vida útil, entonces el valor de rescate es de $7,440.00 considerando que la depreciación por kilómetro recorrido es de 32 centavos. __________

***16.** Si el valor de cada unidad en el problema 15 aumenta 3.98% por año por inflación y otros factores, entonces el valor de rescate es de $9,903.93. __________

***17.** $160,000.00 fue el precio de compra de una fotocopiadora que el primer año se depre - ció $6,440.66 habiendo generado $45,000 copias, número que se redujo un 2% cada año de los 4 de vida útil. Suponga que se vendió en $135,000. __________

Seleccione la opción correcta en los problemas del 18 al 25, justificando su elección.

***18.** ¿De cuánto es la depreciación en el segundo año, de los 10 de vida útil de una máquina para hacer tornillos, si costó $275,000, se rescatan $63,000 y la producción se incrementa 2% cada año? Considere que la producción en el último año fue de 4.5 millones de piezas.

a) $19,748.45 *b*) $20,623.40 *c*) $21,043.91 *d*) $22,329.93 *e*) Otra

***19.** Dado el siguiente cuadro de depreciación de un activo, obtenga su valor de rescate. Suponga que la producción anual aumenta 5.3% cada año y que tiene 6 años de vida útil.

Fin del año	Producción anual	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	150,000.00
1	12,000.00	21,321.00	21,321.00	128,679.00

a) $10,876.23 *b*) $9,063.25 *c*) $3,876.53 *d*) $5,428.03 *e*) Otra

*20. Una máquina para producir artículos de plástico costó $123,200, ¿de cuánto es la deprecia - ción del tercer año si se producen 25,000 piezas durante el primero y ésta crece a razón del 7.5% cada año? Considere 7 años de vida útil y un rescate de $48,000.

a) $11,329.63 *b*) $10,523.61 *c*) $9,889.38 *d*) $11,046.40 *e*) Otra

21. Resuelva el problema 20 si la producción anual se reduce sucesivamente 1,140 piezas.

a) $12,087.83 *b*) $9,693.45 *c*) $11,310.37 *d*) $10,429.63 *e*) Otra

22. ¿En cuánto se adquirió una fotocopiadora si el primer año se depreció $6,440.66, habiendo generado 45,000 copias? Suponga que luego de 4 años de servicio se vendió en $135,000 y el número de copias se redujo en 2% cada año.

a) $160,000 *b*) $175,400 *c*) $165,350 *d*) $182,950 *e*) Otra

23. La producción de refacciones para automóvil de un equipo que costó $425,000, en sus 6 a ños de vida útil es la siguiente en cientos de piezas.

Año	Producción
1	20,000
2	19,325
3	19,050
4	18,595
5	16,923
6	15,097
	Total:108,990

¿Cuánto se deprecia en el cuarto año si el valor de rescate es de $103,385?

a) $54,871.37 *b*) $49.963.39 *c*) $57,098.03 *d*) $51,629.92 *e*) Otra

24. ¿De cuánto es la depreciación en el cuarto año de un tractor que costó $375,000, si el primer año se trabajó 2,950 horas y en los siguientes se reduce 3.5% cada año de los 7 que tiene de vida útil? Suponga que al final se vendió en $150,000.

a) $32,061.65 *b*) $30,625.33 *c*) $29,039.41 *d*) $31,593.09 *e*) Otra

*25. Calcule la depreciación anual en el tercer año de un camión que costó $325,000, si el primer año se trabaja durante 3,000 horas, y en los siguientes se reduce un 2% cada año de los 6 que tiene de vida útil. Suponga que al final se vende en un 20% de lo que costó.

a) $42,729.35 *b*) $43,747.23 *c*) $43,029.35 *d*) $42,987.29 *e*) Otra

8.4 Método de la suma de dígitos

En este método, la depreciación anual es variable, ya que el máximo cargo por depreciación se tiene en el primer año y en el último el mínimo.

Para evaluarla, la base de depreciación $(C - C_n)$ se multiplica por la fracción a/b, donde b es la suma de los dígitos que corresponden a la vida útil del activo y el numerador, a, representa el año, en orden inverso, en el que se está calculando la depreciación.

Si, por ejemplo, la vida útil de un activo es de 7 años, entonces el denominador de la fracción es:

$$b = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \quad \text{o bien,} \quad b = 28$$

Esta suma, sobre todo cuando la vida útil es relativamente grande, puede calcularse con la ecuación del teorema 2.2 para sucesiones aritméticas. Así, la suma es:

$$s_n = (n/2)(a_1 + a_n)$$

En este caso es:

$$s_7 = (7/2)(1 + 7) = 28$$

Para el numerador a de la fracción, los dígitos se disponen en orden decreciente, es decir:

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

El dígito para la primera fracción es 7, para la segunda es 6 y así sucesivamente hasta la última, cuyo numerador es 1.

En los ejemplos siguientes se aprecia mejor lo anterior.

Ejemplo 1

Depreciación con la suma de dígitos

La compañía Constructora Villapart, S. A., compró una camioneta en \$220,000. Calcule la depreciación anual, utilizando el método de la suma de dígitos, suponiendo que tiene 6 años de vida útil y un valor de rescate de \$73,000.

Elabore el cuadro de depreciación correspondiente.

solución

La base de depreciación es la diferencia entre el precio original y el valor de rescate.

$$C - C_n = 220{,}000 - 73{,}000$$
$$C - C_n = 147{,}000$$

La suma de los 6 dígitos es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

El numerador de la primera fracción es 6 y el cargo por depreciación en el primer año es, por lo tanto:

$$R_1 = 147{,}000(6/21) \quad \text{o bien,} \quad R_1 = \$42{,}000$$

Para el segundo año la fracción es $a/b = 5/21$ y la depreciación es:

$$R_2 = 147{,}000(5/21) \quad \text{o bien,} \quad R_2 = \$35{,}000$$

Puesto que la base de depreciación, 147,000, y la suma de los dígitos, 21, son constantes, cada una puede obtenerse como se ve a continuación.

$$R_1 = (147{,}000/21)6 \quad \text{o bien,}$$
$$R_1 = 7{,}000(6) = 42{,}000$$
$$R_2 = 7{,}000(5) = 35{,}000$$

Además:

$$R_3 = 7{,}000(4) = \$28{,}000$$
$$R_4 = 7{,}000(3) = \$21{,}000$$
$$R_5 = 7{,}000(2) = \$14{,}000$$
$$R_6 = 7{,}000(1) = \$7{,}000$$

La tabla de depreciación con las cantidades en miles de pesos es:

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	220
1	42	42	178
2	35	77	143
3	28	105	115
4	21	126	94
5	14	140	80
6	7	147	73

Valor contable

Para determinar el valor en libros al final del k-ésimo año con el método de la suma de dígitos, por ejemplo al cuarto año, primero se tiene que calcular la depreciación acumulada $(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$ que se obtiene:

$$(147{,}000/21)(6 + 5 + 4 + 3)$$
$$(7{,}000)(18)$$
$$126{,}000$$

donde el factor de la izquierda es la fracción cuyo numerador es la base de depreciación, $C - C_n$ y el denominador es la suma de los dígitos s, al periodo de interés, es decir, este primer factor es $(C - C_n)/s$.

El otro factor es igual a la suma de una serie aritmética, donde el primer término es i gual a la vida útil del activo $n = 6$, la diferencia común es $d = -1$ y el número de términos es $k = 4$. Por lo tanto, la suma es:

$$s_4 = (4/2)[2(6) + (4-1)(-1)] \qquad s_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$s_4 = 2(12 - 3) \quad \text{o bien,} \quad s_4 = 18$$

y en general este segundo factor será:

$$s_k = (k/2)[2(n) + (k-1)(-1)]$$

o bien,

$$s_k = (k/2)(2n - k + 1)$$

La depreciación acumulada es, por lo tanto:

$$[(C - C_n)/s][(k/2)(2n - k + 1) \quad \text{o bien,} \quad \frac{k(C - Cn)}{2S}(2n - k + 1)$$

para el valor contable, esto se resta del precio original C del activo, lo que da como resultado la ecuación del siguiente teorema.

Teorema 8.3

En el método de la suma de dígitos, el *valor contable* al final del k-ésimo año es:

$$C_k = C - \frac{k(C - C_n)}{2S}(2n - k + 1) \text{ donde:}$$

C, el precio original del activo
C_n, el valor de rescate
s, la suma de los dígitos
n, la vida útil del activo en años

Note que el segundo término de esta fórmula corresponde a la depreciación acumulada hasta el k-ésimo año.

Ejemplo 2

Valor contable de un activo que se deprecia

¿Cuál es el valor en libros al final del quinto año en el ejemplo 1?

solución

Los valores que se sustituyen en el último teorema son:

$C = 220{,}000$, el precio de la camioneta

$C_n = 73{,}000$, el valor del rescate

$k = 5$, se pregunta el valor en libros al final del quinto año

$S = 21$, la suma de los dígitos de la vida útil

Entonces el valor contable en miles de pesos es:

$$C_5 = 220 - \frac{5(220-73)}{2(21)}\,[2(6) - 5 + 1]$$

$$C_5 = 220 - \frac{5(147)}{42}(8)$$

$$C_5 = 220 - 140 = 80$$

es decir, \$80,000, igual al que se aprecia en el cuadro anterior.

Ejemplo 3

Depreciación anual, depreciación acumulada, cuadro

El Hotel Central renueva parte de su mobiliario y equipo con una inversión de \$528,000, se supone que la vida útil es de 15 años, con valor de rescate del 20% de la inversión. Con el método de la suma de dígitos, obtenga:

a) La depreciación anual.

b) La depreciación acumulada hasta el duodécimo año.

c) El cuadro de depreciación, en sus primeros 3 y 2 últimos renglones.

solución

a) Con la ecuación 2.2 se obtiene la suma de los 15 dígitos

$$s_{15} = (15/2)(1 + 15) \quad \text{o bien,} \quad s_{15} = 120$$

La fracción para la primera depreciación es, en consecuencia, 15/120.

El valor de rescate es el 20% de la inversión, esto es:

$$C_n = 0.20(528{,}000) \quad \text{o bien,} \quad C_n = 105{,}600$$

La base de depreciación es la diferencia:

$$C - C_n = 528{,}000 - 105{,}600$$
$$C - C_n = \$422{,}400$$

La depreciación en el primer año es entonces:

$$R_1 = 422{,}400(15/120)$$
$$R_1 = (422{,}400/120)15$$
$$R_1 = 3{,}520(15) \quad \text{o bien,} \quad R_1 = \$52{,}800$$

La del segundo es:

$$R_2 = 3{,}520(14) \quad \text{o bien,} \quad R_2 = \$49{,}280$$

Notando que la diferencia entre estos 2 valores, 3,520, es igual a la que hay entre 2 años sucesivos cualesquiera, se tiene que la del tercero es:

$$R_3 = 49{,}280 - 3{,}520 \quad \text{o bien,} \quad R_3 = \$45{,}760$$

que también es igual a:

$$3{,}520(13) = \$45{,}760$$

Así, la depreciación de cualquier año k estará dada por la del primero, menos $(k - 1)$ diferencias, es decir:

$$R_k = 52{,}800 - (k - 1)(3{,}520)$$

Por ejemplo en el cuarto año, es:

$$R_4 = 52{,}800 - (4 - 1)(3{,}520) \quad \text{o bien,} \quad R_4 = \$42{,}240$$

que debe ser igual a 3,520(12), porque 12 es el dígito que corresponde al cuarto año.

La depreciación del año 15, el último, es:

$$R_{15} = 52{,}800 - (15 - 1)(3{,}520) \quad \text{o bien,} \quad R_{15} = \$3{,}520$$

b) La depreciación acumulada hasta el año 12, según la ecuación 10.3, es:

$$\frac{12(528{,}000 - 105{,}600)}{2(120)}[2(15) - 12 + 1]$$

$$= 21{,}120(19) \quad \text{o bien,} \quad \$401{,}280$$

en tanto que la acumulada al final de la vida útil según la misma ecuación, es:

$$\frac{15(528{,}000 - 105{,}600)}{2(120)}[2(15) - 15 + 1] = 26{,}400(16) = \$422{,}400$$

que es igual a la base de depreciación, claro.

c) El cuadro de depreciación es el siguiente:

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–	528,000
1	52,800	52, 800	475,200
2	49,280	102,080	425,920
3	45,760	147,840	380,160
. . .			
14	7,040	418,880	109,120
15	3,520	422,400	105,600

En el último renglón de este cuadro se anotan:

- La última depreciación anual $R_{15} = 3{,}520$ en la segunda columna.
- La depreciación acumulada, es decir, la base de depreciación $422,400, en la tercera.
- El valor de rescate, $105,600, en la última.

Para los números del penúltimo renglón se tiene que:
La depreciación anual R_{14} es igual a la suma de la última y la diferencia común.

$$R_{14} = R_{15} + d$$

$$R_{14} = 3{,}520 + 3{,}520 \quad \text{o bien,} \quad R_{14} = \$7{,}040$$

Para obtener la depreciación acumulada de la última, se resta la diferencia.

$$422{,}400 - 3{,}520 = \$418{,}880$$

y para encontrar el valor contable en ese penúltimo periodo, se suma la diferencia común con el último.

$$105{,}600 + 3{,}520 = \$109{,}120$$

Depreciación con inflación en el método de la suma de dígitos

También en este método pueden combinarse la inflación y la depreciación de un activo, haciendo los cálculos de manera individual, año tras año.

Ejemplo 4



Valor de rescate de un activo, cuadro de depreciación

Supóngase que un torno costó $330,000. ¿Cuál será su valor de rescate si en el primer año se deprecia $95,000, tiene 5 años de vida útil y su valor aumenta con la inflación del 12.3% anual? Use el método de la suma de dígitos y haga el cuadro de depreciación.

solución

La suma de los 5 dígitos es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Si X es la base de depreciación, entonces la del primer año es:

$$(5/15)X = 95{,}000 \quad \text{o bien,} \quad (1/3)X = 95{,}000$$

de donde:

$$X = 95{,}000(3) \quad \text{o bien,} \quad X = 285{,}000$$

Con la inflación del 12.3% anual, el valor del torno al final del primer año es:

$$C'_1 = 330{,}000(1.123)$$
$$C'_1 = \$370{,}590$$

Al restar la primera depreciación, resulta que el valor al concluir el primer año es:

$$C_1 = 370{,}590 - 95{,}000$$
$$C_1 = \$275{,}590$$

En el transcurso del segundo año, esto crece 12.3%

$$C'_2 = 275{,}590(1.123)$$
$$C'_2 = 309{,}487.57$$

La depreciación en este lapso es:

$$285{,}000(4/15) = \$76{,}000$$

El valor en libros será:

$$C_2 = 309{,}487.57 - 76{,}000$$
$$C_2 = \$233{,}487.57$$

Se continúa de manera semejante hasta completar los valores que se resumen en el siguiente cuadro, que a la vez sirve para comprobar resultados, y para ver que el valor de rescate del torno es:

$$C_5 = \$197{,}117.92.$$

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–		330,000.00
1	370,590.00	95,000.00	95,000.00	275,590.00
2	309,487.57	76,000.00	171,000.00	233,487.57
3	262,206.54	57,000.00	228,000.00	205,206.54
4	230,446.95	38,000.00	266,000.00	192,446.95
5	216,117.92	19,000.00	285,000.00	197,117.92

Véase el cuadro del ejemplo 3 de la sección 8.3.

Note que el valor contable crece en el último año, mientras que en los anteriores decrece. ¿Por qué?

Ejercicios 8.4

1. Describa brevemente el método de la *suma de dígitos* para depreciar un activo. ¿Qué característica tiene?

2. ¿Cómo se determina la suma de los dígitos de la vida útil de un activo, si ésta es relativamente grande?

En los siguientes problemas, utilice el método de la suma de dígitos.

*3. El señor Padilla compra un equipo de paletería en $90,000, el fabricante le garantiza 6 años de vida útil. ¿Cuál será el valor de rescate si se considera una inflación del 9.6% anual y que el primer año se depreciará $21,690? Haga un cuadro de depreciación.

4. ¿Cuánto debe pedirse por una motocicleta que 4 años antes se compró en $45,000, el primer año se deprecia $5,000 y aumenta su valor con la inflación del 0.9% mensual? *sugerencia:* Obtenga la tasa de inflación anual equivalente, con la ecuación del teorema 4.2.

*5. Una pieza de refacción de una procesadora de carnes frías cuesta $2,550, tiene 4 años de vida útil y al final se pagará $360 por maniobras de reposición. Obtenga la depreciación anual.

6. Suponiendo que un automóvil se deprecia $35,000 el primer año, costó $160,000 y su valor aumenta con la inflación del 7.2% anual, ¿en cuánto se vende 4 años después?

*7. Una máquina procesadora de legumbres cuesta $82,050 y el primer año de su vida útil, que es de 6 años, se deprecia un 10%, ¿cuál es su valor de rescate o compraventa si se considera una inflación del 3.8% semestral? Halle la depreciación acumulada al final del tercer año. Vea la sugerencia del problema 4.

*8. La Alianza de Camioneros adquiere una flotilla de autobuses en 30 millones de pesos, ¿cuál será el valor de rescate al final de 5 años si la depreciación total en el primer año es de 7.8 millones de pesos y la inflación es del 10.72% anual? Haga un cuadro de depreciación y obtenga el valor en libros al final del tercer año de su vida útil.

9. Una avioneta de 13.5 millones de pesos se vende en 6.465 millones de pesos, al final de sus 6 años de vida útil, ¿cuál es la depreciación anual?

10. ¿Cuál es la depreciación anual si el nuevo propietario de la avioneta del problema 9, al final de 2 años, recibe $4.215 millones por el aparato?

*11. Elabore el cuadro de depreciación de un camión que el tercer año se deprecia $21,000, si costó $225,000. Considere 7 años de vida útil. ¿Cuál es su valor de rescate?

12. Calcule la depreciación anual de un refrigerador que cuesta $7,500, su valor de rescate es de $2,400 y tiene 5 años de vida útil.

13. Un equipo para hacer paletas cuyo precio original fue de $75,260 se deprecia $5,190 durante el primer año, ¿en cuánto debe venderse 6 años después? Considere que su precio aumenta 2.2% cada año.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

14. Un tractor que se deprecia $12,000 en el cuarto año de su vida útil, costó $325,000. ¿En cuánto se vende 5 años después de su compra si su valor crece con la inflación del 13% anual?

15. ¿Cuánto se rescata por un refrigerador que costó $16,390 después de 8 años de usarlo? Suponga que el primer año se deprecia $1,950.

16. En el problema 15, ¿cuánto se deprecia el refrigerador durante el quinto año?

17. El señor Pérez compró un camión de $656,000, que el primer año se deprecia $74,000, ¿en cuánto deberá venderlo 6 años después?

***18.** Resuelva el problema 17, considerando que el valor del camión se incrementa 6.8% cada año.

***19.** Para combatir a la delincuencia organizada, el gobierno del Estado compra un helicóptero en $3'750,000. ¿En cuánto lo venderá 5 años después si considera que el tercer año se deprecia $178,000 y su valor aumenta con la inflación un 0.45% cada bimestre?

***20.** ¿Cuántos años después de que se compró una camioneta en $275,000, se venderá en $137,207.00 si se considera que a 8 años de la compra se vendería en $116,946.60, el primer año se deprecia $48,800 y su valor crece un 4.3% anual?

Justificando su elección, en los problemas 21 al 29 seleccione la opción correcta.

21. La refacción para una procesadora de alimentos cuesta $12,750 y el primer año de su vida útil, que es de 4 años, se deprecia un 8%, ¿cuál es su valor de rescate?

a) $9,682.00 *b*) $11,424.00 *c*) $9,800 *d*) $10,200 *e*) Otra

***22.** ¿En cuánto debe vender su camioneta el señor Partida 4 años después de que la compró en $380,000? Considere que en el primer año se depreció $78,000 pero su valor aumenta 7.3% cada año.

a) $295,673.92 *b*) $278,653.14 *c*) $302,429.63 *d*) $295,968.03 *e*) Otra

23. ¿A cuánto asciende la depreciación acumulada hasta el cuarto año, de la camioneta del señor Partida, considerando que no aumenta su valor?

a) $182,000 *b*) $190,000 *c*) $203,000 *d*) $195,000 *e*) Otra

24. Un yate que costó 2.53 millones de pesos, se vende en 1.25 millones de pesos después de 5 años de usarlo, ¿cuánto se deprecia durante el cuarto año?

a) $150,728.43 *b*) $170,666.67 *c*) $165,921.43 *d*) $171,428.51 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el valor contable al término del quinto año de un activo que se deprecia $135,000 en sus 7 años de vida útil? Suponga que costó $190,000 y su valor aumenta con la inflación un 7% anual.

a) $124,106.45 *b*) $142,035.55 *c*) $115,629.15 *d*) $130,615.92 *e*) Otra

26. ¿Cuál es el valor de desecho del activo del problema 25?

a) $126,950.19 *b*) $117,429.61 *c*) $135,129.38 *d*) $144,609.62 *e*) Otra

***27.** La benemérita Cruz Roja compró un vehículo, es decir, una ambulancia, que el primer año se deprecia $242,000, ¿cuánto deberá pedir por ella 7 años después si sabe que su valor original, $2'350,000, aumenta 3.8% cada semestre?

a) $2'362,429.61 *b*) $1'903,648.98 *c*) $1'788,417.42 *d*) $1'930,820.45 *e*) Otra

28. ¿De cuánto es la depreciación durante el tercer año de la ambulancia en el problema 27?

a) $201,049.62 *b*) $172,857.14 *c*) $190,486.61 *d*) $186,429.08 *e*) Otra

29. ¿Cuánto se deprecia durante su tercer año de vida útil un edificio que costó 32 millones de pesos, excluido el terreno, tiene 30 años de vida útil y se considera un gasto de 1.78 millones de pesos para su demolición?

a) $2'121,087.95 *b*) $2'034,064.52 *c*) $1'978,423.23 *d*) $1'802,728.47 *e*) Otra

En los problemas 30 a 36 indique si la afirmación es verdadera o falsa.

30. Cinco años después de haberla comprado en $325,000 el señor Gutiérrez vende su camioneta en $472,703.50. Considerando que su valor crece con la inflación de 1.4% por trimestre y que en el cuarto año se depreció $12,000. __________

31. Suponiendo que en el primer año de los 8 de vida útil de un refrigerador, se depreció $1,950 y que costó $16,390.00, al final se rescatan $7,615.00. __________

32. El refrigerador del problema 31 se deprecia $975.00 durante el quinto año. __________

33. El señor Ruiz vende su tractor en $397,000 a 6 años de haberlo comprado en $656,000.00, considerando que el primer año se deprecia $74,000.00. __________

***34.** Si en el problema 33 se considera que el valor del tractor aumenta 6.8% cada año, entonces deberá venderlo en $649,459.85. __________

***35.** Para combatir a la delincuencia organizada, el gobierno estatal compra un helicóptero en US$3'750,000.00. Si se considera que se deprecia $178,000 en el tercer año, su valor aumenta con la inflación del 0.45% cada bimestre, entonces a 5 años de la compra debe venderlo en US$3'333,888.21. __________

***36.** Si un automóvil que costó $275,000, 8 años después se vendería en $116,946.60, suponiendo que el primer año se deprecia $48,800 y su valor crece 4.3% anual, entonces 5 años después de que se compró se vendería en $137,207.00. __________

8.5 Método de la tasa fija

También en este método la depreciación anual, decrece con el tiempo, ya que se evalúa mediante un porcentaje fijo sobre el valor en libros del año que precede, y éste disminuye en cada periodo.

Para llegar a una fórmula genérica, obsérvese lo siguiente:

Al precio original del activo se le ha llamado C y éste será el valor contable de un supuesto año cero. Si d en la tasa anual de depreciación, entonces en el primer año el activo se depreciará $C(d)$ pesos y el valor contable al finalizar el primer año será:

$$C_1 = C - C(d)$$

o bien, $C_1 = C(1 - d)$ se factoriza C.

La depreciación en el segundo año depende de C_1 y está dada por $C_1(d)$, por lo que el valor contable al término del segundo año es:

$$C_2 = C_1 - C_1(d)$$

o bien, $C_2 = C_1(1 - d)$ $x - xy = x(1 - y)$

Puesto que $C_1 = C(1 - d)$, al reemplazar queda:

$$C_2 = [C(1 - d)](1 - d)$$

o bien, $C_2 = C(1 - d)^2$

La depreciación en el tercer periodo anual es $C_2(d)$ y el valor contable es:

$$C_3 = C_2 - C_2(d) \quad \text{o bien,} \quad C_3 = C_2(1 - d)$$

Al sustituir el valor de C_2 por $C(1 - d)^2$, queda:

$$C_3 = [C(1 - d)^2](1 - d)$$
$$C_3 = C(1 - d)^2(1 - d)$$
$$C_3 = C(1 - d)^3, \text{ se suman los exponentes.}$$

Continuando de esta manera, se verá que al final del k-ésimo año, el valor contable es

$$C_k = C(1 - d)^k$$

ya que el exponente de $(1 - d)$ es igual al subíndice de C.
También es cierto que el valor en libros al final de la vida útil, cuando k es igual a n, es:

$$C_n = C(1 - d)^n$$

Para despejar d, la tasa de depreciación, se dividen los 2 lados de la ecuación entre C, se saca raíz enésima y se resta la unidad, es decir:

$$C_n/C = (1 - d)^n$$
$$\sqrt[n]{C_n/C} = 1 - d$$
$$\sqrt[n]{C_n/C} - 1 = -d \quad \text{o bien,} \quad d = 1 - \sqrt[n]{C_n/C}$$

En el teorema siguiente, se formula lo anterior.

Teorema 8.4

El valor contable C_k, de un activo que se deprecia con el ***método de tasa fija***, al final del k-ésimo año, es:

$$C_k = C(1 - d)^k,$$

donde C, es el precio original

d, es la tasa de depreciación anual y está dada por $d = 1 - \sqrt[n]{C_n/C}$

Además, $R_1 = Cd$, es la depreciación del primer año y en cualquier periodo, la suma de la depreciación acumulada y el valor contable, es igual al valor original del activo.

Note que:

Si el valor de rescate es nulo, $C_n = 0$, entonces la tasa de depreciación anual sería:

$$d = 1 - \sqrt[n]{0} \quad \text{o bien,} \quad d = 1$$

Esto indica que el activo se depreciaría un 100%, es decir, totalmente, en su primer año de vida útil, lo cual no es razonable; para eludir esta situación, simplemente se considera que $C_n = 1$ en la fórmula anterior, tal como se aprecia en el segundo ejemplo. Además, el valor de rescate debe ser positivo, porque de otra manera la raíz será imaginaria cuando n sea un número par, o si es impar la tasa resultará mayor que el 100%, lo que tampoco tiene sentido.

Ejemplo 1



Depreciación anual, acumulada y cuadro de depreciación

Con el método de la tasa fija, obtenga la depreciación anual de un activo que costó \$150,000, tiene \$25,000 como valor de rescate y 8 años de vida útil. Calcule la depreciación acumulada hasta el final del sexto año y haga el cuadro de depreciación.

solución

a) En primer lugar, se obtiene la tasa de depreciación d con la segunda ecuación del teorema 8.4 y los valores siguientes:

$C = 150{,}000$, el valor original del activo

$C_n = 25{,}000$, el valor de rescate

$n = 8$ años, la vida útil del activo, entonces

$$d = 1 - \sqrt[8]{25{,}000/150{,}000}$$

$$d = 1 - 0.799339167$$

$$d = 0.200660833 \quad \text{o} \quad 20.066\%, \text{ aproximadamente.}$$

La depreciación en el primer año es, por lo tanto:

$$R_1 = \$150{,}000(0.200660833) \quad \text{o bien,} \quad R_1 = \$30{,}099.12492$$

que se resta del costo original para obtener el valor en libros al final del primer año, es dec ir:

$$C_1 = 150{,}000 - 30{,}099.12 \quad \text{o bien,} \quad C_1 = \$119{,}900.88$$

La depreciación del segundo año es:

$$R_2 = 119{,}900.88(0.200660833)$$

$$R_2 = \$24{,}059.41, \text{ redondeando.}$$

Se continúa, de manera semejante, para obtener la depreciación anual y el valor en libros de los años restantes. Esto se resume en el cuadro que se presenta en el inciso c de este problema.

b) Para la depreciación acumulada, se encuentra primero el valor contable, al final del sexto periodo anual, con la primera ecuación del teorema 8.4

$$C_6 = 150{,}000(1 - 0.200660833)^6 \qquad C_k = C(1-d)^k$$
$$C_6 = 150{,}000(0.26084743)$$
$$C_6 = \$39{,}127.11$$

Por lo tanto, la depreciación acumulada hasta el sexto año es:

150,000 − 39,127.11 = $110,872.89, que puede obtenerse y comprobarse con el cuadro de depreciación que sigue:

c) El cuadro de depreciación es el siguiente, que se inicia anotando el costo original en la última columna, y la depreciación anual R_1, la del primer año, en la segunda y la tercera. Sirve para comprobar los resultados anteriores.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	150,000.00
1	30,099.12	30,099.12	119,900.88
2	24,059.41	54,158.53	95,841.47
3	19,231.63	73,390.06	76,609.84
4	15,372.59	88,762.75	61,237.25
5	12,287.92	101,050.67	48,949.33
6	9,822.21	110,872.88	39,127.12
7	7,851.28	118,724.16	31,275.84
8	6,275.84	125,000.00	25,000.00

Note que:

a) La depreciación acumulada al final es igual a la base de depreciación $C - C_n = \$125{,}000$, y el último valor en libros es igual al valor de rescate.

b) En el renglón del periodo 6 están la depreciación acumulada y el valor contable que se obtuvieron antes.

Ejemplo 2

Depreciación anual y cuadro, método de tasa fija

Suponga que una caldera costó \$4'655,000, tiene 15 años de vida útil y su valor de rescate es nulo. Con el método de tasa fija, obtenga los cargos por depreciación anual y el cuadro de depreciación.

solución

Para la tasa de depreciación d, se utiliza la segunda ecuación del teorema 8.4, pero con $C_n = 1$ en lugar de cero, esto es:

$$d = 1 - \sqrt[15]{1/4'655,000}$$

$$d = 1 - 0.359312248$$

$$d = 0.640687752 \quad \text{o bien,} \quad 64.069\% \text{ aproximadamente.}$$

En el primer año, la depreciación es entonces:

$$R_1 = 4'655,000(0.640687752)$$

$$R_1 = \$2'982,401.487$$

y el valor contable es:

$$C_1 = 4'655,000 - 2'982,401.487 \quad \text{o bien,} \quad C_1 = \$1'672,598.513$$

Para el segundo periodo anual, la depreciación es:

$$R_2 = 1'672,598.513(0.640687752)$$

$$R_2 = \$1'071,613.382$$

y el valor en libros es:

$$C_2 = 1'672,598.513 - 1'071,613.382$$

$$C_2 = \$600,985.131$$

De la misma forma, se obtienen los valores restantes, y todos se escriben en el cuadro siguiente, observando que, como se hizo con el desarrollo de la fórmula del teorema 8.4, el valor contable C_k de cualquier periodo es igual al anterior, C_{k-1}, multiplicado por la diferencia $(1 - d)$, que en este ejercicio es:

$$1 - d = 1 - 0.640687752 = 0.359312248$$

Así, por ejemplo, el tercero es:

$$C_3 = C_2(1 - d)$$

$$C_3 = 600,985.131(0.359312248) \quad \text{o bien,} \quad C_3 = 215,941.3182$$

tal como se aprecia en el mismo cuadro.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–	4'655,000.00
1	2'982,401.49	2'982,401.49	1'672,598.51
2	1'071,613.38	4'054,014.87	600,985.13
3	385,043.81	4'439,058.68	215,941.32
4	138,350.96	4'577,409.64	77,590.36
5	49,711.19	4'627,120.83	27,879.17
6	17,861.84	4'644,982.67	10,017.33
7	6,417.98	4'651,400.65	3,599.35
8	2,306.06	4'653,706.71	1,293.29
9	828.60	4'654,535.31	464.69
10	297.72	4'654,833.03	166.98
11	106.98	4'654,940.00	60.00
12	38.44	4'654,978.45	21.55
13	13.81	4'654,997.26	7.74
14	4.96	4'654,997.22	2.78
15	1.78	4'654,999.00	1.0

Dos cosas pueden apreciarse en este ejemplo:

La depreciación anual es muy alta en los primeros años de la vida útil y, por lo mismo, el valor del activo, es decir, su valor contable decrece muy rápidamente. Ambas son consecuencia de que la tasa de depreciación es elevada.

Depreciación de tasa fija con inflación

Considerar la inflación en este método es sumamente fácil, ya que para evaluar la depreciación anual, puede utilizarse la ecuación del teorema 8.4, con una tasa que sea igual a la diferencia entre las 2, la de inflación y la de depreciación. Esto es válido, porque se considera que los 2 actúan simultáneamente, ya que de otra forma tendría que evaluarse año por año.

Si la tasa de inflación i es mayor que la de depreciación d, entonces el valor contable del activo crecerá con el paso de los años, y el factor $(1 - d)$ de la fórmula será mayor que 1; en caso contrario, será menor que la unidad, y el valor contable decrecerá.

También es cierto que si la tasa de inflación no se da en periodos anuales, antes deberá encontrarse la tasa anual equivalente, es decir la tasa efectiva con la ecuación del teorema 4.2.

$$e = (1 + i/p)^p - 1$$

donde e corresponde a la tasa de inflación anual, equivalente a la inflación i/p que no es anual.

Ejemplo 3



Valor de rescate y cuadro considerando inflación

¿En cuánto deberá vender su automóvil la profesora Verónica 5 años después de que lo compró en $125,000 si se considera que se deprecia con un porcentaje fijo del 15% anual y la inflación ha sido del 1.5%, mensual en promedio? Haga el cuadro de depreciación.

solución

La tasa de inflación anual equivalente al 1.5% mensual es:

$$i = (1 + 0.015)^{12} - 1 \qquad i/p = 0.015 \qquad \text{y} \qquad e = (1 + i/p)^{np} - 1$$

$$i = 1.195618171 - 1$$

$$i = 0.195618171 \qquad \text{o bien,} \qquad 19.5618\% \text{ aproximadamente.}$$

Puesto que es mayor que la de depreciación, el activo aumentará su valor con una tasa dada por:

$$0.195618171 - 0.15 = 0.045618171$$

Entonces el valor contable, es decir, el precio de compraventa 5 años después de haberlo comprado, será:

$$C_5 = 125{,}000(1 + 0.045618171)^5$$

$$C_5 = 125{,}000(1.249872203)$$

$$C_5 = \$156{,}234.03$$

El cuadro de depreciación se inicia anotando en la última columna el precio original del activo.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–	125,000.0000
1	–5,702.2714	–5,702.2714	130,702.2714
2	–5,962.3986	–11,664.6700	136,664.6700
3	–6,234.3923	–17,899.0623	142,899.0623
4	–6,518.7939	–24,417.8562	149,417.8562
5	–6,816.1693	–31,234.0254	156,234.0255

La "depreciación" del primer año es:

$$R_1 = 125{,}000(0.045618171)$$
$$R_1 = 5{,}702.271375$$

que se anota en la segunda y tercera columnas con signo negativo, porque el valor en libros crece.

$$C_1 = 125{,}000 - (-5{,}702.2714)$$
$$C_1 = 130{,}702.2714$$

La del segundo periodo anual es:

$$R_2 = 130{,}702.2714(0.045618171)$$
$$R_2 = 5{,}962.398567$$

Por lo tanto:

$$C_2 = 130{,}702.2714 - (-5{,}962.3986)$$
$$C_2 = \$136{,}664.67$$

Las restantes se obtienen de forma semejante quedando como se observa en el mismo cuadro.

Ejemplo 4

Resuelva el ejemplo 3 considerando que la inflación es del 9% anual.

solución

En este caso la inflación es menor que la depreciación, el valor del automóvil se reduce con el tiempo con la tasa:

$$d = 0.15 - 0.09 = 0.06$$

Entonces el precio de compraventa será:

$$C_5 = \$125{,}000(1 - 0.06)^5$$
$$C_5 = \$125{,}000(0.733904022) \quad \text{o bien,} \quad C_5 = \$91{,}738$$

Note que:
El signo dentro del paréntesis $(1 - d)$ es negativo cuando el precio se reduce, es decir, cuando la inflación es menor que la depreciación, y es positivo $(1 + d)$ si el valor del activo se incrementa con el tiempo, cuando la inflación es mayor que la depreciación.

Ejemplo 5

Precio original de un activo que se deprecia

¿Cuál es el precio original de un helicóptero que el gobierno del estado vende en 10.5 millones de pesos, suponiendo que se ha depreciado 16% cada año y que su valor crece con la inflación del 3.5% por trimestre? Suponga que se compró 6 años antes.

solución

La tasa de inflación anual que corresponde al 3.5% trimestral, puesto que 4 trimestres tiene el año, es:

$$i = (1 + 0.035)^4 - 1$$

$$i = 1.147523001 - 1$$

$$i = 0.147523001$$

Como ésta es menor que la tasa de depreciación, el activo redujo su valor con la tasa:

$$d = 0.16 - 0.147523001 = 0.012476999$$

Además: $C_k = C_6 = 10.5$ millones de pesos el precio de venta y $k = n = 6$ años, la vida útil del activo

y

$$1 - d = 1 - 0.012476999$$

$$1 - d = 0.987523001$$

La incógnita es C, el precio original. Entonces:

$$10.5 = C(0.987523001)^6 \qquad C_k = C(1 - d)^k$$

$$10.5 = C(0.927434653)$$

de donde:

$$C = 10.5/0.927434653$$

$$C = 11.32155238 \text{ millones.}$$

Lo que quiere decir que el precio original del helicóptero fue:

$$C = \$11'321{,}552.38$$

Ejercicios 8.5

1. Describa brevemente el método de la tasa fija para depreciar un activo.

2. ¿Cuál es la fórmula para encontrar la tasa de depreciación anual?

3. ¿Cómo afecta la inflación a la depreciación de activos en el método de la tasa fija?

En los siguientes problemas, utilice el método de la tasa fija para depreciar un activo.

***4.** Encuentre la depreciación en los primeros 3 años y el último de un activo que costó $250,000 y 15 años después se vende en $75,000.

5. Teresa compró un refrigerador en $6,900. ¿En cuánto deberá venderlo 4 años después si se deprecia 23% anual y su valor crece con la inflación del 3% cada bimestre? *sugerencia:* Obtenga la tasa de inflación anual equivalente.

***6.** Una compañía internacional de aseo público compró varios camiones para la recolección de basura en 6.35 millones de dólares. Obtenga la depreciación anual durante los 6 años de vida útil, suponiendo que al final rescata US$750,000. ¿Cuál es el valor en libros al final del cuarto año?

7. En el problema 6, ¿cuál es la tasa de depreciación anual si la inflación es del 15% anual?

8. ¿Cuál será el valor de rescate de un horno industrial 7 años después si ahora cuesta $246,000, se deprecia 13% anual y su valor crece con la inflación del 5% por semestre?

***9.** Obtenga la depreciación anual de un activo que costó $150,000, tiene 6 años de vida útil y un valor de rescate de $37,500.

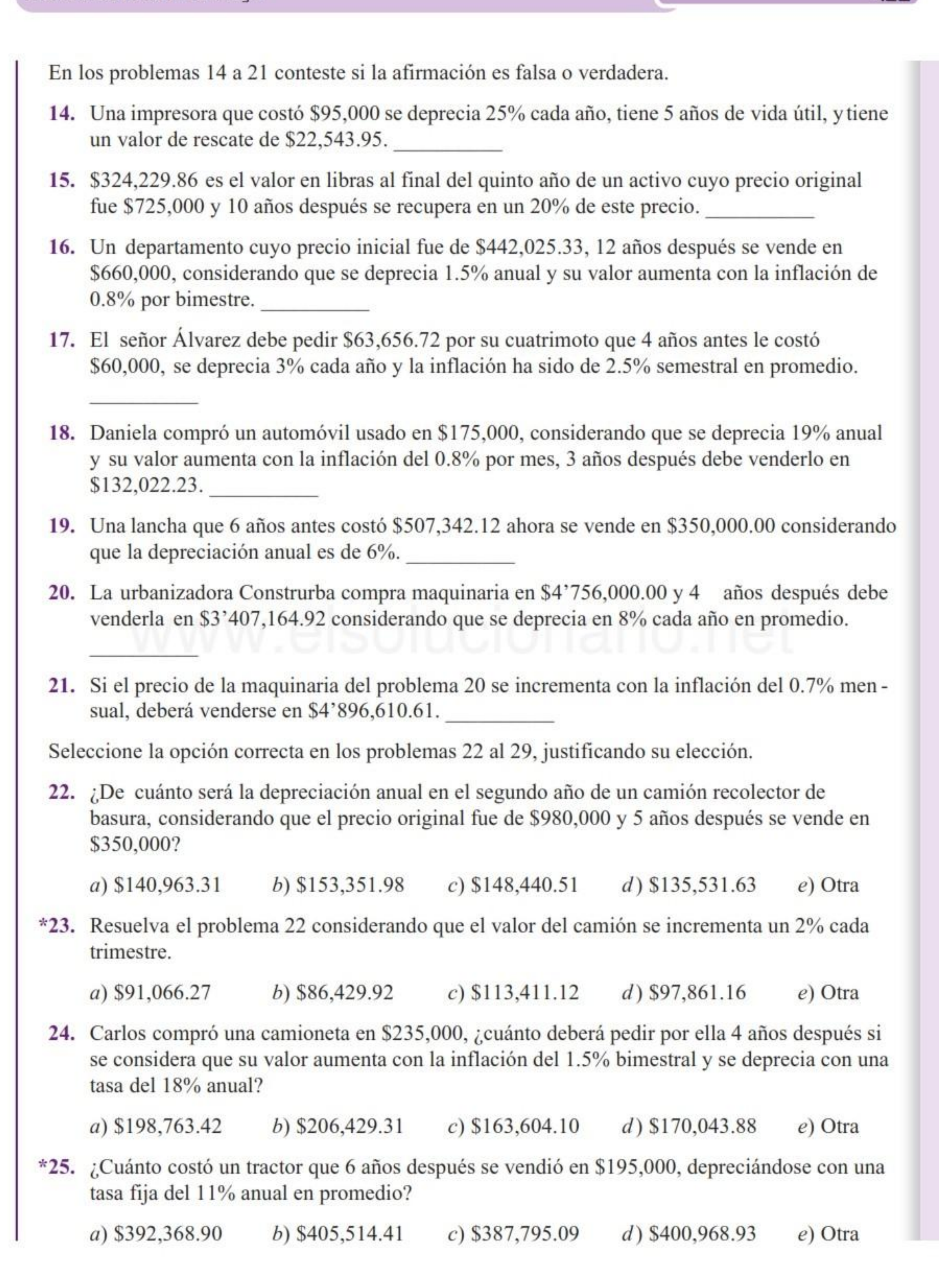
10. El administrador de un hotel vende su automóvil en $112,000. ¿Cuánto le costó 5 años antes si se deprecia un 18% anual y la inflación ha sido del 20% por año?

11. Un camión que costó $425,000 se deprecia 18% anual durante 5 años, ¿cuál es su valor de rescate considerando que su valor aumenta con la inflación del 1.5% mensual? Vea la sugerencia del problema 5.

***12.** Una planta de luz costó $48,000, tiene vida útil de 7 años y al final se rescatan $10,500; encuentre la depreciación anual y haga un cuadro de depreciación.

***13.** La Urbanizadora del Sureste compra una motoconformadora en US$450,000, ¿cuál será su valor de rescate 5 años después si se deprecia 14.3% anual y su valor crece con la inflación del 5.2% por cuatrimestre? Obtenga la tasa de inflación anual equivalente y haga un cuadro de depreciación.

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.



En los problemas 14 a 21 conteste si la afirmación es falsa o verdadera.

14. Una impresora que costó $95,000 se deprecia 25% cada año, tiene 5 años de vida útil, y tiene un valor de rescate de $22,543.95. __________

15. $324,229.86 es el valor en libras al final del quinto año de un activo cuyo precio original fue $725,000 y 10 años después se recupera en un 20% de este precio. __________

16. Un departamento cuyo precio inicial fue de $442,025.33, 12 años después se vende en $660,000, considerando que se deprecia 1.5% anual y su valor aumenta con la inflación de 0.8% por bimestre. __________

17. El señor Álvarez debe pedir $63,656.72 por su cuatrimoto que 4 años antes le costó $60,000, se deprecia 3% cada año y la inflación ha sido de 2.5% semestral en promedio. __________

18. Daniela compró un automóvil usado en $175,000, considerando que se deprecia 19% anual y su valor aumenta con la inflación del 0.8% por mes, 3 años después debe venderlo en $132,022.23. __________

19. Una lancha que 6 años antes costó $507,342.12 ahora se vende en $350,000.00 considerando que la depreciación anual es de 6%. __________

20. La urbanizadora Construrba compra maquinaria en $4'756,000.00 y 4 años después debe venderla en $3'407,164.92 considerando que se deprecia en 8% cada año en promedio. __________

21. Si el precio de la maquinaria del problema 20 se incrementa con la inflación del 0.7% mensual, deberá venderse en $4'896,610.61. __________

Seleccione la opción correcta en los problemas 22 al 29, justificando su elección.

22. ¿De cuánto será la depreciación anual en el segundo año de un camión recolector de basura, considerando que el precio original fue de $980,000 y 5 años después se vende en $350,000?

a) $140,963.31 *b*) $153,351.98 *c*) $148,440.51 *d*) $135,531.63 *e*) Otra

***23.** Resuelva el problema 22 considerando que el valor del camión se incrementa un 2% cada trimestre.

a) $91,066.27 *b*) $86,429.92 *c*) $113,411.12 *d*) $97,861.16 *e*) Otra

24. Carlos compró una camioneta en $235,000, ¿cuánto deberá pedir por ella 4 años después si se considera que su valor aumenta con la inflación del 1.5% bimestral y se deprecia con una tasa del 18% anual?

a) $198,763.42 *b*) $206,429.31 *c*) $163,604.10 *d*) $170,043.88 *e*) Otra

***25.** ¿Cuánto costó un tractor que 6 años después se vendió en $195,000, depreciándose con una tasa fija del 11% anual en promedio?

a) $392,368.90 *b*) $405,514.41 *c*) $387,795.09 *d*) $400,968.93 *e*) Otra

26. ¿En cuánto se venderá el tractor del problema 25 si su valor crece un 4% cada semestre en promedio?

a) $312,243.57 *b*) $330,080.31 *c*) $296,697.61 *d*) $322,508.83 *e*) Otra

27. ¿Cuál será el valor de rescate de un torno 6 años después si ahora cuesta $275,000, se deprecia 12.5% anual y su valor se incrementa 7.2% cada semestre en promedio?

a) $317,395.39 *b*) $298,603.48 *c*) $325,618.08 *d*) $305,503.08 *e*) Otra

28. En $425,000 se vende un departamento, ¿cuál fue su precio original 10 años antes, considerando que se deprecia con el 5% fijo anual en promedio?

a) $709,827.59 *b*) $687,786.68 *c*) $723,372.09 *d*) $712,217.63 *e*) Otra

29. ¿Cuál será el precio actual del departamento del problema 28 si se supone que su valor aumenta 3.5% cada semestre?

a) $861,408.80 *b*) $920,693.42 *c*) $915,519.95 *d*) $875,724.00 *e*) Otra

8.6 Método del fondo de amortización

En este método se presentan 2 valores para la depreciación, la *depreciación anual R* (que es constante y se deposita, se supone, en un fondo que se constituye para reemplazar el activo al terminar su vida útil) y la *depreciación neta* (que es variable, porque incluye los intereses de *R,* se acumula y está directamente relacionada con el valor contable al final de cualquier periodo).

A diferencia de otros sistemas, en éste los intereses se evalúan con base en la depreciación acumulada y no en el valor en libros.

Se parte del supuesto de que el valor acumulado de los *n* depósitos de *R* pesos cada uno es igual a la depreciación total, $C - C_n$, es decir, la *base de depreciación,* y es igual al acumulado en el fondo para la reposición del activo.

La gráfica de la figura 8.1, donde cada rectángulo es un periodo anual, ilustra la situación. Ahí se aprecia que se trata de una anualidad ordinaria, con rentas anuales *R* y el monto acumulado igual a $C - C_n$.

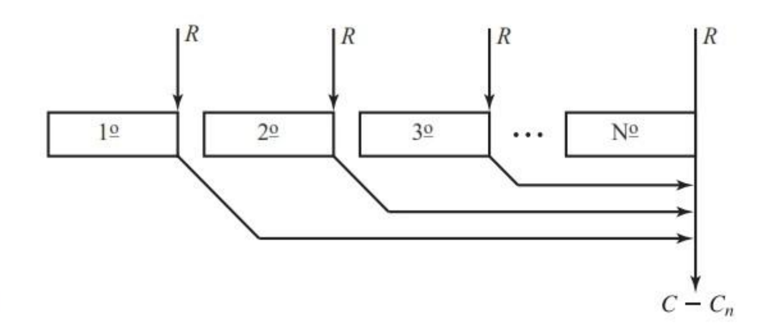


FIGURA 8.1

Quiere decir que puede emplearse la ecuación del teorema 5.4 para realizar los cálculos, ésta es:

$$M = R\left[\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right]$$

En este caso, se dijo, el monto es $M = C - C_n$.

La frecuencia de conversión y de pagos es $p = 1$, porque son anuales, en tanto que la tasa i representa la tasa de depreciación que se ha llamado con d; por lo tanto, al sustituir en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$C - C_n = R\left[\frac{(1+d)^n-1}{d}\right]$$

Para despejar R, la depreciación anual, los 2 miembros de esta ecuación se multiplican por d y se dividen entre $(1 + d)^n - 1$. Es decir,

$$(C - C_n)d = R[(1+d)^n - 1] \quad \text{o bien,}$$

$$\frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1} = R$$

que se formula en el teorema siguiente.

Teorema 8.5

La depreciación anual R, en el *método del fondo* de amortización, está dada por

$$R = \frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1}$$

donde, como antes:

C, el precio original del activo

C_n, el valor de rescate

d, la tasa de depreciación anual

n, la vida útil del activo en años

Ejemplo 1

Depreciación anual y cuadro, método del fondo

La Escuela de Contaduría adquirió equipo de computación en $450,000. Evalúe la depreciación anual con el método del fondo de amortización, considerando que al final de 5 años se recuperan $60,000 por el equipo y la tasa para la depreciación es del 25% anual. Haga el cuadro de depreciación correspondiente.

solución

Los valores para sustituir en la ecuación 8.5 son:

$C = 450{,}000$, el precio original

$C_n = 60{,}000$, el valor de rescate

$d = 0.25$, la tasa de depreciación anual

$n = 5$ años, la vida útil del activo

Entonces,

$$R = \frac{(450,000 - 60,000)(0.25)}{(1 + 0.25)^5 - 1}$$

$$R = \frac{(390,000)(0.25)}{3.051757812 - 1}$$

$$R = \frac{97.500}{2.051757812}$$

$$R = \$47,520.22847$$

Como se aprecia en la figura 8.1, la primera renta está al final del primer año, por eso no devenga intereses, consecuentemente la depreciación neta y la acumulada son iguales a la depreciación anual R en este primer periodo. Las 3 se escriben en el segundo renglón de las 3 columnas del cuadro, que a diferencia de los anteriores consta de 6 columnas.

Contrariamente al primero, en el segundo periodo ya hay intereses, que se agregan a R para obtener la *depreciación neta.* Estos intereses son:

$$I_2 = 47,520.22847(0.25) = \$11,880.05712$$

y la depreciación neta:

$$47,520.22847 + 11,880.05712 = \$59,400.28559$$

Para la depreciación acumulada al final del segundo periodo anual, se suma esta depreciación neta a la depreciación R del primer año, es decir:

$$47,520.22847 + 59,400.28559 = \$106,920.5141$$

Los intereses I_2, la depreciación neta y la acumulada se anotan en el tercer renglón del cuadro siguiente en las columnas que corresponden.

Para el valor contable de cualquier periodo, se resta la depreciación acumulada, del precio original C del activo. También puede obtenerse restando la depreciación neta del valor en libros anterior, claro.

Para los intereses del tercer periodo, la depreciación acumulada anterior se multiplica por la tasa d.

$$I_3 = 106,920.5146(0.25) = \$26,730.12853$$

que se suman a la depreciación fija R, para obtener la neta del tercer periodo.

$$47,520.22847 + 26,730.12853 = 74,250.357$$

Ésta se anota en la cuarta columna del tercer renglón del cuadro, que al final queda como:

Fin del año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	–	450,000.0000
1	47,520.2285	0	47,520.2285	47,520.2285	402,479.7715
2	47,520.2285	11,880.0571	59,400.2856	106,920.5141	343,079.4859
3	47,520.2285	26,730.1285	74,250.3570	181,170.8711	268,829.1289
4	47,520.2285	45,292.7178	92,812.9463	273,983.8174	176,016.1826
5	47,520.2285	68,495.9543	116,016.1828	390,000.0000*	60,000.0000

*Se ajusta para cerrar el valor de rescate en 60,000.0000.

Importante

- La depreciación neta al final de cualquier periodo anual es igual a la suma de la deprecia - ción fija anual R y los intereses de la depreciación acumulada del periodo que le precede. Por ejemplo,

  $R_4 = R + (R_1 + R_2 + R_3)d = 47,520.2285 + (47,520.2285 + 59,400.2856 + 74,250.357)\ 0.25$
  $= 92,812.95$
- Los intereses de cualquier periodo se obtienen multiplicando la depreciación acumulada anterior por la tasa anual d.
- La depreciación acumulada es igual a la suma de la neta y la acumulada anterior.

Valor contable

La depreciación anual, R, es una cantidad fija que supuestamente se deposita, se dijo, en un fondo al final de cada año. El monto, es decir, la depreciación acumulada en dicho fondo, hasta el término de cualquier año k, puede evaluarse, por lo tanto, con la misma fórmula del teorema 5.4, pero con $np = k$ e $i/p = d$, es decir, con:

$$D.A. = R\left[\frac{(1+d)^k - 1}{d}\right]$$

Por ejemplo, al final del tercer año en el ejemplo 1, la depreciación acumulada es:

$$D.A. = 47{,}520.2285\left[\frac{(1+0.25)^3-1}{0.25}\right]$$

$$= 47{,}520.2285(3.8125) \quad \text{o bien,} \quad D.A. = \$181{,}170.8712$$

que es prácticamente igual al valor que se observa en el cuadro anterior.

Puesto que el valor en libros al final de cualquier año es igual a la diferencia entre el precio original y la depreciación acumulada, al final del tercer año en el mismo ejemplo 1 es:

$$450{,}000 - 181{,}170.8712 = \$268{,}829.1288$$

como también se observa en el cuadro.

Ejemplo 2

Valor contable de un activo que se deprecia

¿Cuál es el valor contable de un equipo que la universidad compró 10 años antes en \$660,000 para el laboratorio de resistencia de materiales? Suponga que después de sus 15 años de vida útil se rescatará un 25% del precio original, se deprecia con el método del fondo de amortización y una tasa anual del 14%.

solución

Se necesita la depreciación anual R, que se obtiene sustituyendo en el teorema 8.5 los valores siguientes:

$C = 660{,}000$, el valor original

$C_n = 0.25(660{,}000)$ o bien, $C_n = 165{,}000$, el valor de rescate

$d = 0.14$, la tasa de depreciación anual

$n = 15$, la vida útil del activo en años

Entonces:

$$R = \frac{(660{,}000 - 165{,}000)(0.14)}{(1+0.14)^{15}-1}$$

$$R = \frac{69{,}300}{6.137937978} \quad \text{o bien,} \quad R = \$11{,}290.43667$$

La depreciación acumulada hasta el final del décimo año es entonces:

$$D.A. = 11{,}290.43667\left[\frac{(1+0.14)^{10}-1}{0.14}\right]$$

$$D.A. = 11{,}290.43667(19.3372951) \quad \text{o bien,} \quad D.A. = \$218{,}326.5057$$

Consecuentemente, el valor contable es:

$$\$660,000 - \$218,326.5057 = \$441,673.4943$$

Depreciación con inflación en el método del fondo de amortización

Como en el método anterior, en éste la inflación y la depreciación se contrarrestan, por eso se restan las 2 tasas anuales para efectuar los cálculos. Se utiliza la ecuación del teorema 8.5, tal como puede apreciarse en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3



Depreciación con inflación y cuadro

Un montacargas que costó \$95,000 se deprecia con el 18.27% anual durante 5 años, al final se rescatan \$70,600. Obtenga la depreciación anual y haga el cuadro de depreciación supo - niendo que su valor aumenta con la inflación del 1.2% mensual.

solución

a) La tasa de inflación anual equivalente al 1.2% mensual se encuentra con la ecuación 4.2

$$e = (1 + i/p)^p - 1 \quad \text{donde} \quad i/p = 0.012$$

Es decir:

$$(1 + 0.012)^{12} - 1 = 0.153894624$$

La diferencia de tasas, la de depreciación, menos la de inflación, es:

$$0.1827 - 0.153894624 = 0.028805376$$

Los otros valores para sustituir en la ecuación 8.5 son:

$C = 95{,}000$, el precio original

$C_n = 70{,}600$, el valor de rescate

$n = 5$, la vida útil del activo en años, entonces

$$R = \frac{(95,000 - 70,600)(0.028805376)}{(1 + 0.028805376)^5 - 1}$$

$R = 702.8511744/0.152566852$ o bien, $R = \$4,606.84064$

b) El cuadro se comienza anotando esta depreciación en la segunda columna y el precio en el primer renglón de la última.

Fin del año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	–	95,000.0000
1	4,606.84064	0	4,606.84064	4,606.84064	90,393.15936
2	4,606. 84064	132.70178	4,739.54248	9,346.38306	85,653.61694
3	4,606. 84064	269.22608	4,876.06672	14,222.44978	80,777.55022
4	4,606. 84064	409.68301	5,016.52365	19,238.97343	75,761.02657
5	4,606. 84064	554.18586	5,161.02650	*24,399.99993	70,600.0000

*La diferencia con los 24,400.00 se debe al redondeo y es insignificante.

Note que:
La depreciación acumulada al final del quinto periodo, es decir, al final de la vida útil, es igual a la base de depreciación y el valor contable es igual al valor de rescate.

Ejemplo 4

Resuelva el ejemplo 3 considerando que la tasa de depreciación es del 12.48% anual.

solución

a) La tasa de inflación es mayor que la de depreciación, por eso la diferencia resulta nega - tiva, es decir:

$$0.1248 - 0.153894624 = -0.029094624$$

La depreciación anual es entonces:

$$R = \frac{(95,000 - 70,600)(-0.029094624)}{[1-(0.0291094624)^5 - 1]}$$

$R = -709.9088256/(-0.137250872)$ o bien, $R = \$5,172.344746$

b) El cuadro de depreciación es el siguiente, diferente del anterior, porque ahora los intereses se restan de la depreciación anual, lo que da lugar a que la depreciación neta se reduzca cada año.

Los intereses, por ejemplo, del segundo año son:

$$I_2 = 5,172.3447(-0.029094624)$$
$$I_2 = -150.4874242$$

Fin del año	Depreciación	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0		–	–	–	95,000.0000
1	5,172.3447	0	5,172.3447	5,172.3447	89,827.6553
2	5,172. 3447	–150.4874	5,021.8573	10,194.2020	84,805.7980
3	5,172. 3447	–296.5965	4,875.7482	15,069.9502	79,930.0498
4	5,172. 3447	–438.4545	4,733.8902	19,803.8404	75,196.1596
5	5,172. 3447	–576.1853	4,596.1594	24,400.0000	70,600.0000

Importante

Para concluir con esta sección, es importante señalar lo siguiente, con respecto a la deprecia - ción de activos con el método del fondo de amortización, más específicamente en relación con la fórmula del teorema 8.5, cuando se considera la inflación.

*Si la tasa anual de inflación es menor que la depreciación, entonces d es positiva y el deno - minador $(1 + d)^n - 1$ es positivo.

*Si la tasa de inflación es mayor que la de depreciación, entonces d es negativa y $(1 + d)^n - 1$ también, ¿por qué? Esto significa que el signo de la depreciación anual R dependerá exclusiva - mente del signo que tenga el paréntesis $(C - C_n)$.

*Si C es mayor que C_n, entonces el factor $(C - C_n)$ es positivo y la depreciación es también positiva, pero si C es menor que el valor de rescate C_n, entonces el factor $(C - C_n)$ resultará negativo y la depreciación anual R, también. En este caso, la depreciación neta se suma al valor en libros del periodo anterior en lugar de restarse, dando lugar a que se incremente hasta llegar a C_n al final de la vida útil del activo, tal como se aprecia en el problema 7 de la sección 8.6 de ejercicios.

Ejercicios 8.6

1. Explique el método del fondo de amortización para depreciar los activos.
2. Escriba la fórmula que se emplea para depreciar un activo con el método de esta sección.
3. ¿Cómo afecta la inflación a la depreciación de activos en el método de esta sección?

Con el método del fondo de amortización, resuelva los problemas siguientes.

4. ¿En cuánto debe venderse un activo que 10 años antes costó $83,200, si se deprecia en $1,000 cada año con una tasa del 11.5% y su valor aumenta con la inflación del 9% anual?

***5.** Una pizzería compró un horno en $120,000, ¿cuál será la depreciación neta en cada uno de los 5 años de vida útil si al final se rescata el 25% de su precio original y se deprecia con el 18% anual?

6. Una troqueladora que costó $105,000, tiene vida útil de 6 años y un valor de rescate del 22% de su costo. ¿De cuánto es la depreciación anual si se deprecia con el 15% cada año? Encuentre la depreciación acumulada de los 6 años.

***7.** Haga el cuadro de depreciación de un activo que costó $70,000, tiene vida útil de 5 años, al final se rescatan $95,000, se deprecia con el 14.3% anual y su valor aumenta con la inflación del 6.5% por año.

8. La licenciada Laura vende su automóvil en $78,000, ¿cuál fue el costo si lo compró hace 7 años y se deprecia $5,400 cada año con una tasa del 12% anual?

9. Halle la depreciación anual del activo que costó $215,000 y 7 años después se rescatan $7,500. Considérese una tasa del 17% de depreciación por año.

Conteste verdadero o falso en los problemas 10 a 15, justificando su respuesta.

10. El valor de rescate de un activo que costó $32,000 se deprecia $4,000 por año a una tasa del 9% anual, 4 años después de que se compró, es $13,707.48. __________

11. $215,238.74 es el valor en libros al final del cuarto año de un activo con un precio original de $200,000, valor de rescate de $250,000, inflación del 11% anual, 12 años de vida útil y depreciación del 13.2% cada año. __________

12. Un activo que costó $78,000, se deprecia $10,000 cada año con una tasa del 15.2% anual durante 2 años, tiene un valor de rescate de $5,009.77, considerando que su valor creció con la inflación del 7.4% anual. __________

13. La depreciación acumulada hasta el final del quinto año de un activo que se deprecia $15,000 por año con una tasa del 17.8% anual, tiene 8 años de vida útil y al final se rescatan $90,000, es de $88,880.59 considerando que su valor crece con la inflación del 9.3% cada año. __________

***14.** $252,459.59 es el precio original del activo del problema 13. __________

15. Un activo que costó $120,000 se deprecia $7,500 anuales con una tasa del 17% anual con 9 años de vida en servicio, tiene un valor de rescate de $37,300.77 suponiendo que su valor crece 12% anual por inflación y otros factores. __________

En los problemas del 16 al 30 seleccione la opción correcta, justificándola.

16. Una máquina que costó $106,000, se deprecia $12,400 cada año con una tasa del 9.6% anual durante 5 años, ¿cuál es su valor de desecho si su valor aumentó 10.5% anual por inflación y otros factores?

a) $40,963.00 *b*) $45,106.00 *c*) $62,325.00 *d*) $51,329.35 *e*) Otra

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

***17.** Halle la depreciación neta en el cuarto año, de los 6 que tiene de vida útil, una máquina que costó $168,000, al final se vende en $75,000, se deprecia con una tasa del 13% anual y su valor aumenta con la inflación del 0.8% mensual en promedio. Obtenga primero la tasa de inflación anual equivalente.

a) $19,867.43 *b*) $15,781.33 *c*) $20,628.30 *d*) $15,708.62 *e*) Otra

***18.** Halle la depreciación neta durante el quinto año del activo que costó $350,000 y 7 años después se rescatan $125,000. Considere que se deprecia 14.4% anual.

a) $35,473.75 *b*) $38,095.39 *c*) $32,698.42 *d*) $40,560.53 *e*) Otra

19. Una máquina para coser zapatos costó $85,000, tiene un valor de desecho de $50,000 y 5 años de vida útil, ¿de cuánto es la depreciación neta en el segundo si se deprecia 9% cada año?

a) $6,374.58 *b*) $7,163.92 *c*) $8,625.31 *d*) $7,804.23 *e*) Otra

20. ¿De cuánto es la depreciación neta en el tercer año de la vida útil de la máquina en el pro - blema 19?

a) $6,428.33 *b*) $6,183.91 *c*) $6,948.29 *d*) $7,150.23 *e*) Otra

***21.** ¿Cuál es la depreciación neta durante el cuarto año de un horno que costó $85,000 y 5 años después se vende en $38,000? Considere que se deprecia con el 13% anual.

a) $10,465.02 *b*) $15,625.32 *c*) $18,036.42 *d*) $12,680.09 *e*) Otra

***22.** Resuelva el problema 21, si el valor del horno aumenta 10% anual.

a) $9,673.55 *b*) $11,268.43 *c*) $12,765.08 *d*) $10,563.91 *e*) Otra

23. Halle el valor contable al final del tercer año de un activo con precio original de $178,000, valor de rescate de $190,000, inflación del 8.4% anual, depreciación del 12.6% anual y 10 ños de vida útil.

a) $182,087.55 *b*) $170,921.43 *c*) $181,097.30 *d*) $176,429.63 *e*) Otra

24. Teresa vende su automóvil en $178,000, ¿cuánto le costó hace 5 años si se deprecia $15,000 anuales con una tasa del 10% anual?

a) $235,429.08 *b*) $275,629.35 *c*) $269,576.50 *d*) $218,525.70 *e*) Otra

25. ¿En cuánto venderá su automóvil Teresa del problema 24 si su valor crece 8.4% cada año.

a) $192,137.79 *b*) $185,208.41 *c*) $205,429.03 *d*) $180,995.09 *e*) Otra

26. Obtenga el valor de rescate de una caldera que costó $175,000, se deprecia $18,000 anuales, con una tasa del 18% anual. Considere que su valor aumenta 9.2% anual durante los 8 años de vida en servicio.

a) $20,963.63 *b*) −$22,079.78 *c*) $25,643.15 *d*) −$27,065.95 *e*) Otra

***27.** ¿De cuánto es la depreciación acumulada hasta el final del cuarto año de un activo que se deprecia $13,500 anuales con una tasa del 13.5% anual? Suponga que su valor crece con el 10.4% anual.

a) $63,425.08 *b*) $60,529.35 *c*) $59,068.77 *d*) $56,563.30 *e*) Otra

***28.** Halle la depreciación neta durante el tercer año de un activo que costó $178,000 y 6 años después se rescatan $95,000. Considere la tasa del 13% anual.

a) $11,628.33 *b*) $12,128.03 *c*) $12,734.16 *d*) $10,160.32 *e*) Otra

***29.** Una suajadora que costó $120,000 se deprecia con el 11.4% anual durante los 6 años de vida útil, ¿de cuánto será la depreciación neta durante el tercer año, si al final se rescata el 35% de su precio original?

a) $10,695.00 *b*) $12,110.04 *c*) $15,129.00 *d*) $16,968.35 *e*) Otra

30. ¿Cuál es el valor actual de una cuatrimoto que 3 años antes se compró en $47,500 y se deprecia $5,500 por año, con una tasa anual del 8.5%?

a) $29,557.76 *b*) $31,260.29 *c*) $28,721.42 *d*) $30,629.61 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Explicar el significado de depreciación de activos.
- Decir por qué son necesarios los cargos por depreciación de activos en las empresas.
- Explicar los conceptos: *precio original, valor de rescate, valor en libros* y *vida útil* en la depreciación de activos.
- Exponer y diferenciar los conceptos de *depreciación, depreciación neta* y *depreciación acumulada* de los activos.
- Calcular la depreciación anual, el precio original, el valor de rescate, la depreciación neta y la acumulada y el valor en libros de un activo que se deprecia con los métodos de:
  - La línea recta.
  - Horas o unidades de servicio o producción.
  - Suma de dígitos.
  - Tasa fija.
  - Fondo de amortización.
  - Considerando sólo la depreciación o combinándola con la inflación.
- Hacer e interpretar el cuadro de depreciación de activos.
- Distinguir y explicar las características de los métodos de depreciación que se han estudiado en este capítulo, así como aplicarlos a situaciones reales de depreciación.
- Utilizar la fórmula $R = \dfrac{C - C_n}{n}$ para la depreciación de activos.

- Utilizar la fórmula siguiente para el valor de rescate de un activo, considerando la inflación.

$$C_n = C(1+i)^n - R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Emplear la ecuación

$$C_k = C - \frac{k(C - C_n)}{2S}(2n - k + 1)$$

para el valor en libros al final del k-ésimo año en el método de la suma de los dígitos.

- Emplear las fórmulas

$$C_k = C(1 - d)^k \quad \text{y} \quad d = 1 - \sqrt[n]{C_n / C}$$

para la depreciación de activos con el método de la tasa fija.

- Utilizar las ecuaciones

$$R = \frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1} \quad \text{y} \quad D.A. = R\frac{(1+d)^k - 1}{d}$$

para evaluar la depreciación de un activo con el método del fondo de amortización.

Conceptos importantes

Cuadro de depreciación
Depreciación
Depreciación acumulada
Depreciación anual
Depreciación neta
Método del fondo de amortización, catalogado como de *interés compuesto* en la depreciación de activos
Métodos de la línea recta y de horas de servicio o unidades de producción clasificados como métodos de *promedio*
Métodos de la suma de dígitos y de tasa fija, que se denominan como métodos de *cargo decreciente* en la depreciación de activos
Valor de rescate de activos
Valor en libros
Valor original de activos
Vida útil de un activo

Problemas propuestos para examenes

1. La Facultad de Ingeniería compró equipo de cómputo para su laboratorio en $275,000, ¿de cuánto será la depreciación anual en 5 años de vida útil del equipo si se estima que al final se recuperará un 25% del costo inicial yel valor aumentará con la inflación del 11.5% anual? Utilice el método de la línea recta.

***2.** ¿Cuál es el valor de rescate de un automóvil 6 años después de que se compró en $190,000, si el primer año se deprecia $40,000 y su valor aumenta con la inflación del 6.3% anual?

Utilice el método de suma de dígitos.

3. Con el método del fondo de amortización, encuentre el precio original de un departamento que se vende en $180,000, se deprecia $5,000 anuales con una tasa del 20.6% y su valor crece con la inflación de 0.8% mensual. Suponga que se compró 10 años antes.

4. Resuelva el problema 3 considerando que el valor aumenta $2,000 cada año, es decir, la depreciación anual es $R = -\$2,000$.

***5.** Haga el cuadro de depreciación del activo que costó $120,000, si tiene 7 años de vida útil y al final se recuperan $36,000. Utilice el método de:

a) Tasa fija de depreciación.

b) Fondo de amortización y 7.4% de depreciación anual.

***6.** Obtenga la depreciación anual de una copiadora digital que costó $875,000, si al final de 6 años de vida útil se recuperan $274,400 y se sacaron 7.8 millones de copias distribuidas de la forma siguiente, en miles:

Primer año: 995	Tercer año: 1,350	Quinto: 1,420
Segundo: 1,325	Cuarto: 1,676	Sexto: 1,034

***7.** Obtenga la depreciación anual del activo que costó $170,000, si tiene un valor de rescate de $53,000, se deprecia con el método de la suma de dígitos y tiene 12 años de vida útil.

8. ¿Cuál es el valor en libros al final del noveno año, del activo del problema 7?

***9.** ¿Cuál es el valor de rescate de un tractor que el primer año da servicio durante 2,500 horas, 3,200 el segundo, 3,100 el tercero, 3,250 el cuarto y 2,650 el quinto, suponiendo que se deprecia $24 por hora, costó $350,000 y su valor aumenta con la inflación del 11.4% anual? Haga un cuadro de depreciación.

Justificando su respuesta, en los problemas 10 al 21 conteste verdadero o falso.

10. El método de la suma de dígitos es de cargo decreciente. __________

11. La depreciación anual de un activo es menor que el valor en libros en cualquier periodo anual. __________

* Los ejercicios con asterisco tienen mayor grado de dificultad.

12. El valor en libros y la depreciación acumulada al final de cualquier año son constantes durante la vida útil. __________

13. Depreciación neta y acumulada son sinónimos. __________

14. En el método de horas de servicio o unidades de producción, la depreciación anual es constante. __________

15. El valor de rescate C_n de un activo debe ser positivo en el método de la tasa fija.

____

16. La depreciación anual de los activos depende de su vida útil. __________

17. El valor de rescate de un activo es igual a la depreciación acumulada al final de su vida útil.

____

18. El valor en libros de un activo aumenta con los años, cuando no se considera la inflación.

____

19. En el método de la tasa fija, el valor en libros al final del k-ésimo año está dado por $C_k = C(1 - d)^k$. __________

20. La depreciación acumulada al final de la vida útil de un activo es igual a la base de depreciación. __________

21. El valor de rescate de un activo es igual a su valor de desecho. __________

En los problemas 22 al 32 elija la opción correcta justificando su respuesta.

22. ¿Cuál es el valor contable al final del tercer año de una sembradora que costó 1.75 millones de pesos, si el primer año se utilizó 3,100 horas, 2,750 el segundo, 3,230 el tercero, 2,930 el cuarto y 2,520 el quinto? Considere que se deprecia $35 por hora.

a) $1'432,200 *b*) $1'129,562.25 *c*) $985,559.39 *d*) $1'363,401.33 *e*) Otra

***23.** Resuelva el problema 22, considerando que el valor de la máquina aumenta en un 7.3% anual.

a) $1'568,561.37 *b*) $1'820,662.58 *c*) $1'373,725.52 *d*) $1'428,367.06 *e*) Otra

24. ¿De cuánto es la depreciación anual durante el tercer año de una copiadora que costó $235,000, si 5 años después se vende en $140,000 y se sacaron 6.9 millones de copias con la siguiente distribución en miles

1º	2º	3º	4º	5º
875	1,250	1,875	1,690	1,210

a) $25,815.22 *b*) $30,418.82 *c*) $26,568.03 *d*) $28,403.08 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó $150,000, tiene vida útil de 5 años y se deprecia $20,250 cada año? Utilice el método de la línea recta.

a) $43,620 *b*) $50,250 *c*) $48,750 *d*) $45,250 *e*) Otra

26. Resuelva el problema 25 si se deprecia con el 12.8% anual.

a) $73,962.08 *b*) $70,493.25 *c*) $75,626.44 *d*) $68,493.35 *e*) Otra

27. ¿Cuál es el valor contable al final del quinto año del activo que se deprecia con una tasa fija durante los 9 años de vida en servicio, y el cuadro de depreciación comienza de la forma siguiente?

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	435,000
1	66,120.00	66,120.00	368,880
2	56,069.76	122,189.76	312,810.24

a) $190,751.74 *b*) $185,629.43 *c*) $180,055.32 *d*) $187,429.36 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero se rescata por una máquina que 6 años antes costó $278,000, si se deprecia $32,000 anuales, con una tasa del 12% anual? Utilice el método del fondo de amortización.

a) $18,313.95 *b*) $16,963.18 *c*) $17,508.92 *d*) $19,665.33

29. ¿Cuál es el valor del rescate del activo, cuyo cuadro de depreciación con el método de la suma de dígitos en sus primeros renglones es el siguiente? Suponga 8 años de vida útil.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	325,000
1	32,216	32,216	392,789
2	28,189	60,405	364,595

a) $180,028 *b*) $168,426 *c*) $175,428 *d*) $170,526 *e*) Otra

***30.** Haga los primeros 2 renglones del cuadro de depreciación del activo que costó $178,000 y al final de los 12 años de vida útil se recuperan $80,000. Utilice el método de la tasa fija.

a)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000,000
1	10,429.6312	10,429.6312	167,570.3688
2	9,818.5233	20,248.1545	157,751.8455

b)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000.0000
1	12,063.4215	12,063.4215	165,936.5785
2	11,245.8589	23,309.2804	154,690.7196

c)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000.0000
1	11,476.3834	11,476.3834	166,523.6166
2	10,736.4544	22,212.8378	155,787.1623

d)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000.0000
1	11,208.1519	11,208.1519	166,791.8481
2	10,753.7483	21,961.9002	156,038.0998

31. Empleando el método del fondo de amortización, obtenga el precio original de un departamento que 8 años después se vende en $375,000, se deprecia $8,000 anuales, con una tasa del 9.6% anual, y su valor crece 0.8% cada mes.

a) $421,718.92 *b*) $403,577.43 *c*) $438,036.52 *d*) $415,325.32 *e*) Otra

***32.** En el problema 31, ¿en cuánto se venderá el departamento a los 8 años de la compra, considerando que su valor aumenta $11,000 cada año; esto es, que la depreciación anual es $R = \$3,000$?

a) $414,397.80 *b*) $427,368.03 *c*) $405,328.00 *d*) $437,743.60 *e*) Otra

Apéndice

A

Respuestas de los ejercicios impares

Respuestas de ejercicios impares

Capítulo 1

Ejercicios 1.2 (página 6)

1. 0
3. $4^5(35)^5$
5. 1
7. $\sqrt[4]{(3x-1)^3}$
9. $\sqrt[4]{32.4053}$
11. $3^4 = 81$
13. 0^0 no está definido
15. Se restan exponentes
17. a^6/b^4
19. $\sqrt[3]{32/4} = \sqrt[3]{8} = 2$
21. $\sqrt{40a}$
23. $5^{-9}/5^{-8} = 5^{-1} = 1/5$
25. 2.000000001
27. –0.625741957
29. 7’298,308.346
31. 593,782.2553
33. –428.51
35. 0.000100, 0.00010, 0.000, 0.00
37. 16.379154, 16.37915, 16.379, 16.38
39. 0.903577, 0.90358, 0.904, 0.90
41. Cuando su cuenta sea un número entero en pesos.
43. *b*
45. *d*
47. *c*
49. *b*
51. *b*

Ejercicios 1.3 (página 13)

7. $x = 12/11$
9. $y = 50/33$
11. $x = 31/11$
13. $x = 0.09280535$
15. $i = 0.689204953$
17. $x = 0$
19. $i = 0.020500557$
21. $x = 0.893004115$
23. *a*
25. *b*
27. *c*
29. *b*
31. *a*
33. *a*

Ejercicios 1.4 (página 18)

3. 4,491.683992
5. 35.6%
7. 6.856370256%
9. 45%
11. \$3,087.50
13. 5,856.75
15. 5’458,515.28
17. 7.6923077%
19. $13.3\bar{3}\%$
21. 8%
23. 1.4792544%
25. \$6,570.74
27. *c*
29. *d*
31. *c*
33. *c*

Ejercicios 1.5 (página 24)

5. $A = 24$
7. 180.39

9. 69.55
11. No es posible
13. 94.93
15. $A = Kx^2/y^3$
17. $A = K(20 + x)/\sqrt[3]{y + 30}$
19. $A = Kh/(r - t)^2$
21. $C = KI/in$
23. V es inversamente proporcional a x.
25. D es proporcional a r (o al doble de r)
27. Y es proporcional a la suma de a y b e inversamente proporcional al cubo de la diferencia $c - d$.
29. P es proporcional al cubo de $(2 + 3a - b)$ e inversamente proporcional a c.
31. \$780
33. 11.3125 semanas
35. *b*
37. *c*
39. *c*
41. *b*

Ejercicios 1.6 (página 29)

3. $3^{8.5} = A$
5. $\log_{1.0283}(50.23) = 2 - x$
7. $p^4 = 5$
9. $x^{183.2} = 40.3$
11. $x^{1.2} = 10/3$
13. $\log_{42.8}(R) = 10$
15. $\log_{73.4}(10/3) = x$
17. $\log_{253}(13) = 3x - 2$
19. $a = 3.215928674$
21. $6.307603x10^{43}$
23. *c*
25. *a*
27. *d*
29. *c*
31. *d*
33. *d*

Ejercicios 1.7 (página 34)

3. 25.3 y 4,350
5. el segundo
7. *e*
9. $\text{antilog}(25) = 5x - 3$
11. No solución
13. $x = 4.745214258$
15. $x = 0.989405351$
17. $x = -0.534588442$
19. $x = 397.1071706$
21. 5.33748771
23. 2.021894706
25. –0.729114146
27. 2.866287339
29. *d*
31. *b*
33. *b*
35. *c*
37. *c*
39. *c*

Ejercicios 1.8 (página 48)

1. \$62,500, \$187,500, \$125.000
3. \$2,778.95, \$2,084.21, \$4,168.42 y \$4,168.42
5. \$900.00
7. \$10,000
9. en el año 2020
11. \$19,950
13. 0.9941062%
15. 0.41627965%
17. *b*
19. *a*
21. *b*
23. *b*

Problemas propuestos para exámenes (página 51)

1. Falso
3. Verdadero
5. Falso
7. Verdadero
9. Falso
11. $15^z = 30$
13. 22.5%

15. $x = -4$
17. $t = -333$
19. 40,658
21. 721.3
23. 4
25. 30.2
27. $(7a)^9$
29. $x = 5$
31. $x = 0$
33. $x = 39/10$
35. $i = 12.06126524$
37. 7.962541478
39. 12.78719444
41. 0.002123638
43. 1.84509804
45. $305,300
47. 1'028,540 habitantes
49. 8.7346025%
51. 4%
53. *a*
55. *d*
57. *d*
59. *c*
61. *a*
62. *a*

Capítulo 2

Ejercicios 2.1 (página 58)

7. *a*) 9,303 *b*) 205 *c*) 378 *d*) 3
9. $a_n = 3n$
11. −2,320
13. 53
15. 18, 22, 26, 30, 34, 38
17. 4,632
19. Falso
21. Falso
23. Falso
25. *d*
27. *b*
29. *c*
31. *a*
33. *a*

Ejercicios 2.2 (página 65)

1. *a*) 29 *b*) 647 *c*) −65 *d*) −287/3
3. *a*) 52, 136/3, 116/3 *b*) 57, 64, 71
c) 10/3, 250/51, 330/51 *d*) 32, 28, 24
5. $a_5 = 20/3$
7. $a_1 = 20$
9. −6,306
11. −92, −32, −28
13. Verdadero
15. Falso
17. Verdadero
19. Falso
21. Falso
23. *a*
25. *a*
27. *d*
29. *b*
31. *c*
33. *c*
35. *a*

Ejercicios 2.3 (página 74)

3. 1,280, 640, 320
5. 10/3
7. 127.875
9. 3^{20}
11. 1.571558629
13. 127.875 o 42.625
15. 1,215
17. Verdadero
19. Falso
21. Falso
23. Verdadero
25. *c*
27. *a*

29. *d*
31. *a*
33. *d*

Ejercicios 2.4 (página 84)

1. 6.1677812%
3. 50.9091497%
5. $9,58
7. $567,259.10
9. $312,322.40
11. 5.3424109%
13. 0.5104241%
15. Falso
17. Falso
19. Falso
21. *c*
23. *c*
25. *a*
27. *b*
29. *c*
31. *b*
33. *c*
35. *b*

Problemas propuestos para exámenes (página 88)

3. 51, 47 y 43
5. *a*) 2,175 *b*) 35'872,265 o bien, −17'936,135
7. 0
9. 12.5
11. 430
13. Ni aritmética ni geométrica
15. geométrica, $r = -1$
17. geométrica, $r = 1/3$
19. geométrica, $r = 1/2$
21. Ni aritmética ni geométrica
23. Ni aritmética ni geométrica
25. *c*
27. *a*
29. *d*
31. *c*
33. *c*
35. *a*
37. *b*
39. *c*
41. *d*
43. *a*

Capítulo 3

Ejercicios 3.2 (página 99)

7. 4.694835681 años
9. 0.7692308%
11. $15,250
13. 1. 8.4% 2. $11,945.70 3. $45,737.40 4. 5.4% 5. 7 meses 6. $66,969.00
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Verdadero
21. *c*
23. *b*
25. *c*
27. *a*
29. *a*
31. *b*
33. *b*

Ejercicios 3.3 (página 107)

1. $50,789.29
3. *a*) $305,706.52 *b*) $111,170.18 *c*) $16,890.29
5. $16,255.24
7. *a*) $32,486.03 *b*) $43,415.14
9. $342,050.00
11. $12,704.15
13. *c*
15. *a*

17. *a*
19. *c*
21. *a*

Ejercicios 3.4 (página 114)

7. *a*)$6,326.55, *b*)$6,321.79
9. $151,043.81
11. 6.6239641%
13. *a*)$4,419.80 *b*)$7,500 *c*)$4,264.52
15. $157,605.41
17. 11. 6.7834182% 15. $157,754.42
19. *c*
21. *b*
23. *d*
25. *c*
27. *d*
29. *a*
31. *a*
33. *b*
35. *a*

Ejercicios 3.5 (página 121)

7. *a*) $48,487.96 *b*)$48,737.84
9. $8,082.41
11. $6,979.09
13. 604 días
15. 1. $579.86 2. $1,041.00 3. $1,081.83
4. $275.62 5. $770.00 6. $2,500
17. *a*
19. *e*
21. *c*
23. *b*
25. *b*
27. *c*
29. *d*

Ejercicios 3.6 (página 135)

15. $958.30
17. $2,753.33
19. $3,916.00, $3,880.40, $3,844.80
21. $72,875.49
23. $81,877.47
25. $19,605.47
27. No
29. *a*
31. *b*
33. *b*
35. *b*
37. *d*

Ejercicios 3.7 (página 147)

1. $182,823.24
3. $200,366.64
5. $15,026.78
7. $42.79
9. $9.8729
11. $159,988.50
13. 25 días
15. *b*
17. *a*
19. *a*
21. *c*
23. *a*
25. *a*
27. *b*
29. *c*
31. *a*

Problemas propuestos para exámenes (página 152)

1. Falso
3. Verdadero
5. Falso
7. Verdadero
9. Interés
11. $219,973.60
13. $34,002.99
15. $12,679.22
17. $8,466.32
19. 5.1001509%
21. $26,654.65

23. $12.98
25. $143,989.38
27. $143,726.24
29. $58,891.45, $4,228.34, $4,206.68
31. $28,930, 12.33%, $14,277.29
33. *d*
35. *c*
37. *c*
39. *b*
41. *c*

Capítulo 4

Ejercicios 4.1 (página 163)

1. 5.1871913%
3. 9.83316998%
5. 70.6195469%
7. 10.6906227%
9. 0.9697862%
11. 2,027
13. Falso
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Verdadero
21. *a*
23. *c*
25. *a*
27. *a*
29. *d*
31. *b*

Ejercicios 4.2 (página 172)

5. $1,064.07
7. 21.00708%
9. $622.50
11. $59,632.92
13. la primera
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Falso
21. *c*
23. *c*
25. *c*
27. *a*
29. *a*
31. *d*
33. *a*

Ejercicios 4.3 (página 180)

3. La primera
5. Luis
7. La segunda
9. *a*) $9,131.64
   b)$10,263.72, $8,553.10, $8,553.10
   c) $7,201.05, $9,001.32 y $11,251.65
11. $78,984.46
13. *a*)$27,552.43 *b*)$27,343.97 *c*)$27,476.41
15. 404 días
17. $41,572.03
19. Verdadero
21. Falso
23. Verdadero
25. *b*
27. *d*
29. *b*
31. *d*
33. *b*
35. *b*
37. *d*

Ejercicios 4.4 (página 190)

7. $19,269.42
9. $7,972.91
11. $362,369.46
13. $28,128.01
15. Verdadero

17. Verdadero
19. Falso
21. *a*
23. *b*
25. *d*

Ejercicios 4.5 (página 201)

3. $6,892.40
5. $38,402.61
7. *a*) $10,133.48 *b*) $8,124.82, y $12,187.23
9. $223,854.26
11. *a*) $46,368.53 *b*) $41,248.37, $51,560.46
13. *b*
15. *a*
17. *b*
19. *b*
21. *a*
23. *d*
25. *c*

Ejercicios 4.6 (página 213)

3. $12,687.72
5. Julio 11
7. *a*) $63,072.85
b) $68,296.75, $62,833.01 y $57,806.37
c) 48,343.28, $63,343.28 y $78,343.28
9. *a*) $191,562.34 *b*) $16,562.34
11. $1'256,063.74

13. $543,982.42
15. $572,051.06
17. *c*
19. *d*
21. *a*
23. *a*
25. *b*
27. *b*

Problemas propuestos para exámenes (página 217)

1. Falso
3. Falso
5. Verdadero
7. Falso
9. $25,539.31
11. 23.4997735%
13. 21.5407692%
15. $952.20
17. 17.0572956%
19. *a*) $7,015.94 *b*) $6,229.87
21. $145,515.74
23. *a*
25. *b*
27. *c*
29. *c*
31. *d*

Capítulo 5

Ejercicios 5.2 (página 236)

3. 17
5. $91,759.72
7. $280,936.67
9. $9,059.13
11. $1,307.64
13. Verdadero
15. Falso
17. Falso
19. Verdadero
21. *a*
23. *d*
25. *d*
27. *a*
29. *c*

Ejercicios 5.3 (página 246)

3. $475,219.83
5. 30 de $3,640.71
7. $10,880.28
9. $37,448.61
11. La opción *b*
13. $191,382.29
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Falso
21. *a*
23. *d*
25. *c*
27. *c*
29. *a*

Ejercicios 5.4 (página 255)

5. $2,284.54
7. 37 de $188.47
9. $189.49
11. $24,739.64
13. Verdadero
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Falso
21. *b*
23. *d*
25. *a*
27. *a*
29. *b*

Ejercicios 5.5 (página 264)

3. $171,098.47
5. $1,601.50
7. $10,793.92
9. $12,346.77
11. Verdadero
13. Verdadero
15. Verdadero
17. *b*
19. *d*
21. *a*
23. *c*
25. *a*
27. *b*
29. *a*
31. *c*

Ejercicios 5.6 (página 270)

3. $23,974.28
5. $15,416.67
7. $97,044.61
9. $22,013.01
11. Verdadero
13. Falso
15. Falso
17. *b*
19. *c*
21. *a*
23. *d*
25. *c*
27. *a*
29. *a*

Ejercicios 5.7 (página 286)

1. $221,804.62
3. La primera
5. 10.29 años
7. $91,299.17
9. $135.93
11. 68 mensuales de $9,710.55
13. $406.86
15. Falso
17. Verdadero
19. Verdadero
21. Verdadero
23. *d*
25. *a*
27. *a*
29. *a*

Problemas propuestos para exámenes (página 291)

1. $993,103.45
3. $137,417.29
5. 13 meses
7. $16,558.47
9. $28,840.79
11. $13,647.70, $17,059.63
13. Falso
15. Falso
17. Falso
19. Falso
21. *b*
23. *a*
25. *b*
27. *b*
29. *a*
31. *d*

Capítulo 6

Ejercicios 6.2 (página 301)

7. 13
9. $29,239.27
11. $880.09
13. $13,167.27
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Verdadero
21. *b*
23. *d*
25. *a*
27. *b*
29. *b*

Ejercicios 6.3 (página 310)

7.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	165,000.00
1	21,303.56	1,996.25	20,107.31	144,892.69
2	21,303.56	1,050.47	20,253.09	124,639.60
3	21,303.56	903.64	20,399.92	104,239.68
⋮				

9. $91,121.34
11. $406,391.05

13.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	750,000.00
1	18,457.91	5,262.50	13,195.41	736,804.59
2	18,457.91	5,169.91	13,288.00	723,516.59
⋮				

15. Falso
17. Falso
19. *b*
21. *a*
23. *b*
25. *b*
27. *a*
29. *d*

Ejercicios 6.4 (página 318)

5. $217,677.43
7. 25
9.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	55,633.35
1	2,850.00	431.16	2,418.84	53,214.51
2	2,831.25	412.41	2,418.84	50,795.67
⋮				
.	—	—	—	4,418.84
23	2,437.59	18.75	2,418.84	0

11. 11.9971776%
13. $935,030.77
15. Verdadero
17. Falso
19. Falso
21. *a*
23. *d*
25. *a*
27. *d*
29. *c*
31. *b*

Ejercicios 6.5 (página 331)

5. $253,868.67
7. 18 bimestres, el último de $3,533.13
9. $84,742.87, $92,242.87, $99,742.87
11. $190,709.95
13. $6,500, $6,597.50, $6,696.46… $9,217.69
15. Falso
17. Verdadero
19. Verdadero
21. *a*
23. *c*
25. *a*
27. *d*
29. *c*
31. *b*

Ejercicios 6.6 (página 349)

1. $309,714.01
3. $141,712.83
5. $552,824.13
7. $130,415.52, $135,632.14, $141,057.42…
9. $23,659.23
11.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	199,328.24
1	16,098.60	2,312.21	13,786.39	185,541.85
2	16,211.29	2,152.29	14,059.00	171,482.84
3	16,324.77	1,989.20	14,335.57	157,147.27

13. *d*
15. *b*
17. *d*
19. *a*
21. *c*
23. *b*
25. *b*

Problemas propuestos para exámenes (página 353)

3. *a*) 9, *b*) $7,165
5. *a*)

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	362,305.33
1	7,000.00	3,912.10	3,087.10	359,218.23
2	7,042.00	3,879.56	3,162.44	356,055.78
3	7,084.25	3,845.40	3,238.85	352,816.93
.	—	—	—	—
.	—	—	—	—
.	—	—	—	9,856.29(*x*)
60	9,962.74	106.45	9,856.29	0

b) $141,447.82   *c*) $195,269.14   *d*) $490,393.86

7.

Periodo	Renta(R)	Intereses(I)	Amortización(A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	98,610.57
1	6,725.00	3,076.65	3,648.35	94,962.22
2	6,975.00	2,962.82	4,012.18	90,950.63
.	—	—	—	—
.	—	—	—	—
.	—	—	—	—
14	—	—	—	9,915.63
15	10,225.00	309.37	9,915.63	0

9. $28,514.43
11. $182,479.53
13. Falso
15. Verdadero
17. Falso
19. Falso
21. *c*
23. *a*
25. *d*
27. *c*
29. *d*
31. *b*

Capítulo 7

Ejercicios 7.2 (página 360)

3. $22,027.86
5. $286.03
7. $982,736.25
9. US$28'333,006.02
11. Verdadero
13. Verdadero
15. Verdadero
17. Verdadero
19. $11,897.72
21. *c*
23. *b*
25. *d*
27. *c*
29. *d*

Ejercicios 7.3 (página 366)

3.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	65,000	65,000	474.50	65,474.50
2	65,000	130,474.50	952.46	131,426.96
3	65,000	196,426.96	1,433.92	197,860.88
.	—	—	—	—
.	—	—	—	—
.	—	—	—	—
20	65,000	1'394,229.22	10,177.87	1'404,407.09

5.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	27,500.00	27,500.00	497.06	27,997.06
2	27,500.00	55,497.06	1,003.11	56,300.17
3	27,500.00	84,000.17	1,518.30	85,518.48
⋮				
12	27,500.00	364,865.45	6,594.94	371,460.40

7. *a*) $41,620.77
   b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	41,620.77	41,620.77	285.80	41,906.57
2	41,620.77	83,527.34	573.55	84,100.89
3	41,620.77	125,721.66	863.29	126,584.95
⋮				
18	41,620.77	794,544.13	5,455.87	800,000.00

9. Verdadero
11. Verdadero
13. *b*
15. *c*
17. *a*
19. *c*
21. *d*
23. *c*
25. *c*

Ejercicios 7.4 (página 380)

3. *a*) $3’469,327.11 *b*) $1’838,913.91
5. *a*) $3’051,047.02 *b*) $374,507.97
7. *a*) $101’153,220.00 *b*) $112’194,705.90
9.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	100,012.04	100,012.04	1,940.23	101,952.27
2	101,812.26	203,764.53	3,953.03	207,717.56
3	103,644.88	311,362.44	6,040.43	317,402.87
⋮				
12	121,696.43	1’471,453.80	28,546.20	1’500,000.00

11. Verdadero
13. Falso
15. *b*

17. *d*
19. *b*
21. *c*
23. *c*
25. *c*
27. *c*

Ejercicios 7.5 (página 392)

3. *a*) $7'344,932.94 *b*) $441,848.38
5. $44,358.10
7. Faltarán $2,412.18
9. $160,501.94
11. *a*) $3,417.85, $3,617.85… *b*) $8,957.40
13. Verdadero
15. Verdadero
17. *a*
19. *c*
21. *c*
23. *c*
25. *c*

Problemas propuestos para exámenes (página 395)

1. $57,579.53
3. $2'417,804.37
5. $77,344.84
7. $32,915.19
9. $1'031,956.15
11. $477,298.15
13. Falso
15. Falso
17. Verdadero
19. Verdadero
21. *a*
23. *b*
25. *b*
27. *b*

Capítulo 8

Ejercicios 8.2 (página 409)

9. $80,000
11. $1'112,459.82
13. $1'709,418.13
15. $24,130.29
17. Falso
19. Verdadero
21. Verdadero
23. *a*
25. *c*
27. *d*
29. *a*

Ejercicios 8.3 (página 417)

3. $10,125.38, $9,517.86, $8,946.79, $8,409.98
5. $4,125.00
7. *a*) $53,625.00 *b*) $76,375.00
9. $11,120.07
11. $24,300, $28,530, $24,750, $23,760, $15,660
13. Verdadero
15. Verdadero
17. Verdadero
19. *c*
21. *c*
23. *a*
25. *b*

Ejercicios 8.4 (página 427)

3. *a*) $52,007.71

b)

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	—	90,000.00
1	98,640.00	21,690.00	21,690.00	76,950.00
2	84,337.20	18,075.00	39,765.00	66,262.20
3	72,623.37	14,460.00	54,225.00	58,163.37
4	63,747.05	10,845.00	65,070.00	52,902.05
5	57,980.65	7,230.00	72,300.00	50,750.65
6	55,622.71	3,615.00	75,915.00	52,007.71

5. $876, $657, $438, $219

7. *a*) $91,317.96 *b*) $20,512.50

9. 2.01, 1.675, 1.34, 1.005, 0.67, 0.335 millones

11. *a*)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	225,000.00
1	29,400.00	29,400.00	195,600.00
2	25,200.00	54,600.00	170,400.00
3	21,000.00	75,600.00	149,400.00
4	16,800.00	92,400.00	132,600.00
5	12,600.00	105,000.00	120,000.00
6	8,400.00	113,400.00	111,600.00
7	4,200.00	117,600.00	107,400.00

b) $107,400.00

13. $66,215.16

15. Verdadero

17. Verdadero

19. Verdadero

21. *d*

23. *d*

25. *a*

27. *d*

29. *b*

31. Verdadero

33. Verdadero

35. Verdadero

Ejercicios 8.5 (página 438)

5. $5,960.07
7. 14.954336%
9. $30,944.92, $24,561.00, $19,494.08, $15,472,46, $12,280.50 y $9,747.04
11. $459,241.62
13. *a*) $499,894.56 *b*) 16.4252608%
15. Verdadero
17. Falso
19. Verdadero
21. Verdadero
23. *a*
25. *a*
27. *a*
29. *d*

Ejercicios 8.6 (página 447)

5. $12,580.01, $14,844.41, $17,516.40, $20,669.5, $24,389.84

7.

Fin del año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0	—	—	—	—	70,000.00
1	–4,278.44	0	4,278.44	–4,278.44	74,278.44
2	–4,278.44	–333.72	–4,612.16	–8,890.60	78,890.60
3	–4,278.44	–693.47	–4,971.91	–13,862.50	83,862.50
4	–4,278.44	–1,081.28	–5,359.72	–19,222.22	89,222.22
5	–4,278.44	–1,499.33	–5,777.77	–24,999.99	95,000.00

9. $17,626.55
11. Verdadero
13. Verdadero
15. Verdadero
17. *d*
19. *a*
21. *a*
23. *c*
25. *a*
27. *d*
29. *b*

Problemas propuestos para exámenes (página 452)

1. $64,414.99
3. $261,882.74
5. *a*)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	—	—	120,000.00
1	18,962.1067	18,962.1067	101,037.8933
2	15,965.7609	34,927.8676	85,072.1324
3	13,442.8904	48,370.7580	71,629.2420

continuación

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
4	11,318.6773	59,689.4358	60,310.5642
5	9,530.1279	69,219.5629	50,780.4363
6	8,024.2004	77,243.7633	42,756.2359
7	6,756.2359	84,000.0000	36,000.000

b)

Fin del año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0	—	—	—	—	120,000.00
1	9,588.51	0	9,588.51	9,588.51	110,411.49
2	9,588.51	709.55	10,298.06	19,886.57	100,113.44
3	9,588.51	1,471.61	11,060.11	30,946.68	89,053.32
4	9,588.51	2,290.05	11,878.56	42,825.24	77,174.76
5	9,588.51	3,169.07	12,757.57	55,582.81	64,417.19
6	9,588.51	4,113.13	13,701.63	69,288.44	50,715.56
7	9,588.51	5,127.05	14,715.56	84,000.00	36,000.00

7. $18,000, $16,500, $15,000… $1,500

9. *a*) $159,073.68

b)

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	—	—	—	350,000
1	389,900.00	60,000.00	60,000.00	329,900.00
2	367,508.60	76,800.00	136,800.00	290,708.60
3	323,849.38	74,400.00	211,200.00	249,449.38
4	277,886.61	78,000.00	289,200.00	199,886.61
5	222,673.68	63,600.00	352,800.00	159,073.68

11. Verdadero

13. Falso

15. Falso

17. Falso

19. Verdadero

21. Verdadero

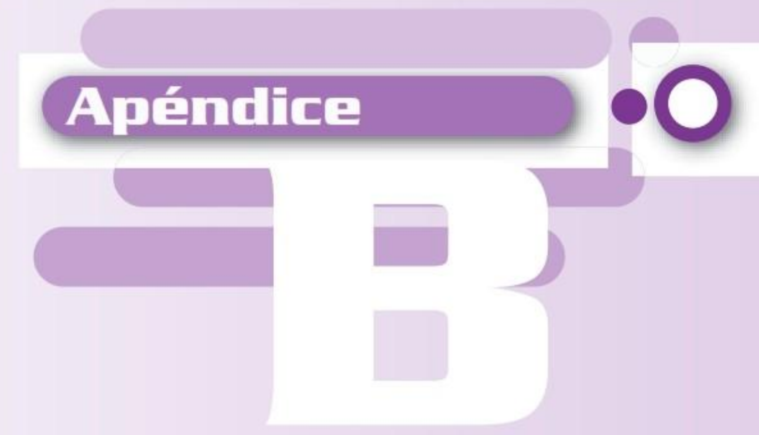
23. *b*

25. *c*

27. *a*

29. *a*

31. *c*



Número de cada día del año

Tabla de números de cada día del año

Con ésta se encuentra el número de días naturales entre 2 fechas cualesquiera, considerando las siguientes 2 situaciones:

a) **Las 2 fechas corresponden a un mismo año.** Por ejemplo, para encontrar el tiempo en el que una inversión genera intereses, entre el 5 de abril y el 21 de septiembre siguiente, en la página A21 se aprecia que en el mes de la columna S, que corresponde a septiembre y el vigésimo primer renglón, que corresponde al vigésimo primer día del mes, está el número 264. De igual forma se ve que el 5 de abril es el día número 95 del año y, por lo tanto, el plazo es la diferencia:

$$264 - 95 = 169 \text{ días}$$

b) **Las 2 fechas no corresponden a un mismo año.** Para obtener el número de días comprendidos entre el 7 de agosto y el 19 de marzo del año siguiente, se observa que la primera fecha corresponde al día número 219, y el 78 a la segunda. Entonces del número de días para un año no bisiesto, 365, se resta el día de la primera fecha, y el resultado se suma con el número de días de la segunda, es decir:

$$\begin{array}{r} 365 - 219 = 146 \\ + \ 78 \\ \hline 224 \end{array}$$

Pueden comprobarse estos 2 resultados, como se estudió en el capítulo 3.

Número de cada día del año

Día del mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	Día del mes
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	*	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

* Para años bisiestos, febrero tiene 29 días y el número de cada día a partir del 1 de marzo es uno más que el número dado en la tabla.



Glosario

Glosario

Capítulo 1

Antilogaritmo: es la función inversa de un logaritmo o la exponenciación de la base.

Base de una potencia: el número que se multiplica n veces por sí mismo.

Cartera vencida: conjunto de valores y documentos que después de su vencimiento no han sido liquidados.

Casa de bolsa: sociedad anónima que actúa como intermediaria en el mercado de valores con autorización de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores.

Conjunto solución de una ecuación: es el valor o valores de las literales o incógnitas que hacen cierta la ecuación.

Depreciación: pérdida del valor de un activo fijo y tangible a causa de su uso, obsolescencia o insuficiencia.

Descuento comercial: rebaja que se hace al precio de un artículo o al valor nominal de un documento.

Despejar una incógnita: separar por medios algebraicos la incógnita en una ecuación. Es encontrar la solución de la ecuación.

Ecuación: es el resultado de igualar 2 expresiones algebraicas.

Ecuación exponencial: la que tiene la incógnita en el exponente.

Ecuación lineal de una variable: igualdad de la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$.

Ecuaciones equivalentes: si tienen el mismo conjunto solución.

Enésima potencia de un número: resultado de multiplicarlo n veces por sí mismo.

Enganche: capital que se deja como anticipo de un compromiso en la compraventa de bienes y servicios en operaciones a crédito.

Exponente entero positivo: el número de veces que la *base* se multiplica por sí misma.

Expresión algebraica: el resultado de combinar números y literales con las operaciones elementales.

Impuesto al valor agregado (IVA): gravamen exigido por el estado (para fines públicos). El que pagan las empresas sobre el aumento del valor en las fases de producción o comercialización de bienes y servicios.

Índice de precios y cotizaciones, IPC: número que indica el promedio ponderado del precio de las acciones que se negocian en la Bolsa de Valores.

Interés: pago por el uso del dinero ajeno.

Interés compuesto: los intereses se agregan al capital, por lo que a partir del segundo periodo también generan intereses.

Interés simple: cuando sólo el capital inicial genera intereses.

Inversamente proporcional: cuando una cantidad cambia o varía de manera inversa con otra.

Leyes de exponentes: las que se aplican para multiplicar o dividir 2 o más potencias de números.

Logaritmo base *a* de un número: exponente al que se eleva la base para obtener un número.

Logaritmo común o decimal: el logaritmo base 10 de un número.

Logaritmo natural o neperiano: el logaritmo base e de un número, $e = 2.71828$ aproximadamente.

Miembros de una ecuación: las expresiones que se igualan entre sí.

Número imaginario: el que tiene a $\sqrt{-1}$ como sumando o como factor.

Número real: el que no es imaginario.

Plazo: el tiempo que hay entre las fechas inicial y terminal de cualquier operación financiera o comercial.

Porcentaje o tanto por ciento: una cantidad en relación a 100 unidades de ella misma. El x% de A es $(x/100)A$.

Porcentajes en cadena: dos o más porcentajes sucesivos de una misma cantidad.

Principio de sustitución: cualquier parte de una expresión se sustituye por otra igual sin alterarla.

Propiedad aditiva: puede sumarse o restarse cualquier número a los 2 miembros de una ecuación sin alterar su solución.

Propiedad multiplicativa: la solución de una ecuación no se altera si se multiplican los 2 miembros por cualquier número diferente de cero.

Proporcionalidad: cuando una cantidad varía directamente como varía otra.

Raíz enésima de un número: el que al multiplicarse n veces por sí mismo da como resultado el número.

Redondeo de números: eliminación de algunas de sus últimas cifras decimales, ajustando las restantes.

Solución de una ecuación: es el conjunto solución.

Unidades de inversión: las UDIS fueron establecidas en México en abril de 1995 para auxiliar a los deudores de la banca mexicana para reestructurar sus deudas.

Utilidad espera de una inversión: está definida por $E = p(x) + q(y)$, donde p es la probabilidad de ganar x pesos y q es la probabilidad de perder y pesos.

Valor de rescate de un activo: el que tiene o tendrá al terminar su vida útil.

Capítulo 2

Afore: administradora de fondos para el retiro, empresas privadas que se encargan de administrar las cuentas individuales de ahorro para el retiro.

Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes): instrumentos de inversión creados por el gobierno federal de México en 1977 para financiar su inversión productiva y para regular tanto el circulante del país, como las tasas de interés que se utilizan en casi todo tipo de inversiones.

Deuda externa de un país: lo que deben el sector público y el sector privado de un país al resto del mundo.

Devaluación de la moneda: disminución de su valor.

Diferencia común: la existente entre 2 términos sucesivos en las progresiones aritméticas.

Fondo de ahorro para el retiro: serie de aportaciones o rentas obrero-patronales de una empresa, recuperables en su retiro laboral.

Inflación monetaria: desequilibrio económico que se caracteriza por el incremento general de precios, causado por el aumento de papel moneda.

Pérdida del poder adquisitivo: reducción de la capacidad para comprar o adquirir bienes y servicios.

Producto Interno Bruto (PIB): mide la producción realizada en un país, sin importar quién sea su propietario.

Progresión aritmética: cuando la diferencia entre 2 términos sucesivos de la progresión es constante.

Progresión geométrica: si todo término, desde el segundo, es igual al que le precede multiplicado por una constante.

Razón o razón común: es la constante por la que se multiplica un término para obtener el siguiente en las progresiones geométricas.

Serie: la suma de los términos de una sucesión.

Sucesión o progresión: resultado de asociar ordenadamente a cada entero positivo uno y sólo un número real.

Término enésimo de una sucesión: número que forma parte de la sucesión y está en la posición n.

Utilidad: diferencia entre los costos y los ingresos, entre un capital C y valor futuro M.

Capítulo 3

Acreedor: el que tiene derecho al cumplimiento de alguna obligación de índole económica. Es la contraparte del deudor.

Adeudo: deuda.

Aforo: valor que es considerado por las empresas de factoraje al pagar los documentos por cobrar. Oscila entre el 70 y 95% del valor nominal del documento.

Capital: cantidad de dinero que se invierte, se presta, etcétera, al inicio del plazo.

Capital vivo de la deuda: saldo insoluto.

Cartera vencida: deuda o documentos que no se han liquidado y ya se vencieron.

Cedente: persona física o moral que vende sus documentos por cobrar a una empresa de factoraje.

Costo porcentual promedio de captación (CPP): es la tasa oficial que el Banco de México estima, de acuerdo con los saldos de captación bancaria en un periodo mensual, para ser aplicada en el siguiente mes.

Descuento real: cuando el descuento se hace con base al capital.

Descuento simple o comercial: rebaja que se hace a una cantidad, el valor nominal de un documento, y depende de ella misma, está dado por $D = Mnd$.

Deuda: obligación que se contrae o se tiene que pagar.

Deudor: el que debe o está obligado a liquidar una deuda. Es la contraparte del acreedor.

Diagrama de tiempo o temporal: gráfica que ilustra el traslado simbólico de cantidades de dinero en el tiempo.

Ecuación de valor: ecuación de valores equivalentes.

Ecuación de valores equivalentes: igualdad que resulta de trasladar, simbólicamente, todas las cantidades de dinero hasta una misma fecha en alguna situación particular.

Empréstito: préstamo.

Factor: organismo que adquiere documentos por cobrar, es la contraparte del cedente.

Fecha de referencia: fecha focal.

Fecha focal: día al que se llevan de manera simbólica todas las cantidades de dinero en alguna transacción específica.

Fecha inicial: día en el que comienza el plazo de una operación financiera.

Fecha terminal: día en el que concluye el plazo en una operación financiera o comercial.

Fideicomiso: depósito de un capital en una institución para que ésta lo entregue después a un tercero o lo invierta en un proyecto específico.

Fórmula de descuento comercial: $P = M(1 - nd)$.

Fórmula de interés simple: $M = C(1 + ni)$.

Interés: pago por el uso del dinero que no es propio.

Interés compuesto: cuando los intereses también generan intereses.

Interés global: pago total por el uso del dinero que no es propio.

Interés simple exacto: cuando los intereses se evalúan considerando el año de 365 días.

Interés simple ordinario: si los intereses se evalúan considerando 360 días por año.

Interés simple: cuando sólo el capital genera intereses.

Montante: monto del capital.

Monto: monto del capital.

Monto del capital: cantidad de dinero al final del plazo, incluye intereses y capital.

Pagaré: documento de crédito en el que expresa una promesa escrita de pago por una cantidad, tiempo y persona específicos.

Pago: entrega de dinero o bienes por especie que se debe.

Plazo o tiempo: número de días, años, meses, etcétera, entre la fecha inicial y terminal en cualquier operación financiera o comercial.

Prestamista: el que otorga dinero en préstamo constituyéndose por ello en acreedor. Es la contraparte del prestatario.

Préstamo: operación financiera por la que una persona física o moral proporciona dinero a otra para regresarlo posteriormente.

Prestatario: el que recibe dinero en préstamo y por ello se convierte en *deudor*. Es la contraparte del prestamista.

Principal: capital.

Remanente: saldo insoluto.

Renta: pagos, depósitos o retiros que se hacen a intervalos de tiempo generalmente iguales.

Retiro: separación de una cantidad de dinero que es el total o una porción de un capital.

Saldo insoluto: diferencia entre la deuda inicial y lo que se ha abonado a la misma.

Saldo pendiente de amortizar: saldo insoluto.

Tarjeta de crédito: instrumento creado por los bancos para otorgar al poseedor dinero en efectivo, en bienes o en servicios. Puede convertirse en herramienta de ahorro e inversión cuando se tiene saldo a favor del usuario.

Tarjeta de débito e inversión: instrumento que utilizan las empresas con soporte de los bancos para pagar salario y otras prestaciones a sus empleados.

Tasa de descuento: razón del descuento al valor nominal por unidad de tiempo.

Tasa de interés: razón del interés al capital por unidad de tiempo.

Tasa de interés global: razón del total de intereses al capital total.

Tasa de interés interbancario de equilibrio: tasa que se determina de acuerdo con las cotizaciones de los fondos que los bancos presentan al Banco Central, a través del Banco de México. Se denomina TIIE.

Tasa líder: la tasa de rendimiento que obtienen los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes).

Tiempo aproximado: si el plazo se mide considerando 30 días para todos los meses.

Tiempo real: cuando el plazo se considera con el número de días naturales entre las fechas inicial y terminal.

Tipo de interés: la tasa de interés expresada en porcentaje.

Valor actual: capital.

Valor acumulado de un capital: monto del capital.

Valor aforado: aforo.

Valor al vencimiento: valor futuro de un capital, valor nominal.

Valor comercial: cantidad que se paga por un documento no vencido e incluye un descuento.

Valor descontado: valor comercial.

Valor futuro del capital: monto del capital.

Valor nominal, denominación: cantidad que se estipula o aparece en cualquier documento de índole financiera o comercial, generalmente se incluyen los intereses.

Valor presente: capital.

Capítulo 4

Capitalizable: dícese de los intereses o el dinero que se integran al capital.

Devaluación: medida o acción que se toma para intentar reconocer la desvalorización que ha tenido el mercado libre de divisas, la moneda de un país.

Devengar: adquirir derechos, alguna retribución o percepción a causa de trabajo, servicios y otros.

Flujo de caja: registro del movimiento de capitales en alguna situación particular. Puede ilustrarse con diagramas de tiempo.

Fórmula del interés compuesto: $M = C(1 + i/p)^{np}$

Frecuencia de capitalización de intereses: frecuencia de conversión.

Frecuencia de conversión: número de veces por año en las que los intereses se capitalizan, es decir, se integran al capital. Es independiente del plazo.

Índice de precios: indicador del conjunto de precios, en oposición al concepto de precios relativos que representan las relaciones entre los mismos.

Inversión: acción y efecto de invertir.

Invertir: empleo productivo de bienes económicos, resultando de mayor magnitud que la que se ha empleado.

Pérdida del poder adquisitivo: reducción en la capacidad de conseguir bienes y servicios con la unidad monetaria considerada.

Periodo de capitalización de intereses: tiempo comprendido entre 2 fechas sucesivas de capitalización de intereses.

Rédito: beneficio convencional o legal producido por el dinero, sinónimo de *interés*.

Redituable: que produce réditos, que rinde utilidades o beneficios, periódica o renovablemente.

Reestructuración de un crédito: sustitución de un conjunto de deudas por otro equivalente.

Rentable: dícese de la inversión que produce altos rendimientos.

Tasa efectiva: tasa de interés capitalizable por años equivalente a la tasa nominal que se capitaliza en p periodos por años.

Tasa nominal: tasa de interés que se capitaliza en p periodos por año.

Tasas equivalentes: si con diferentes periodos de capitalización producen los mismos intereses en plazos iguales.

Capítulo 5

Anticipo: enganche.

Anualidad: serie de pagos, depósitos o retiros, generalmente iguales a intervalos de tiempo iguales.

Anualidad anticipada: si los pagos o rentas se realizan al comenzar cada periodo.

Anualidad cierta: cuando se conocen las fechas inicial y terminal del plazo.

Anualidad diferida: cuando la primera renta se realiza después del primer periodo o la última se hace antes del último periodo.

Anualidad eventual o contingente: si no se conoce la fecha inicial, la terminal o ambas del plazo.

Anualidad general: cuando los periodos de capitalización de intereses no coinciden con los intervalos de pago.

Anualidad inmediata: si la primera renta se realiza desde el primer periodo o la última se realiza en el último periodo del plazo.

Anualidad ordinaria o vencida: cuando las rentas se realizan al final de cada periodo.

Anualidad perpetua: si las rentas se realizan por tiempo ilimitado.

Anualidad simple: cuando los intervalos de pago coinciden con los periodos de capitalización de intereses.

Crédito hipotecario: préstamo respaldado con los bienes inmuebles, unidades agrícolas o industriales que son propiedad del prestatario.

Enganche: cantidad de dinero que se da al comenzar el plazo, como un compromiso en la compraventa de bienes y servicios.

Intervalo de pago: tiempo entre 2 pagos sucesivos en una anualidad.

Perpetuidad: anualidad perpetua.

Plazo de las anualidades: tiempo comprendido entre las fechas inicial y terminal.

Renta: pago periódico en las anualidades y otros sistemas en el campo de las finanzas.

Rentas equivalentes: cuando siendo diferentes en frecuencia y magnitud producen el mismo monto o son producto del mismo capital.

Valor actual de las anualidades: valor al inicio del plazo, equivalente al de todas las rentas. Es sinónimo de *capital* o *valor presente* de la anualidad.

Valor futuro de las anualidades: es el valor al final del plazo, equivalente al de las rentas. Es sinónimo del *monto* o *valor acumulado* de la anualidad.

Capítulo 6

Abono: pago que se hace para reducir una deuda y sus intereses. Acción de abonar, es decir, asentar en las cuentas las partidas que corresponden al *haber*.

Amortización: acción y efecto de amortizar; porción del abono que reduce una deuda. Al sumarla con los intereses de su periodo se obtiene la magnitud del abono.

Amortización constante: sistema de amortización en el que la parte que reduce a la deuda se mantiene constante.

Amortización de renta variable: sistema de amortización en el que cada renta es mayor o menor que las anteriores.

Amortización gradual: la deuda se reduce gradualmente, de tal forma que la renta es constante.

Amortizar: proceso de cancelar una deuda y sus intereses mediante pagos periódicos. Extinción gradual de una deuda.

Cuadro de amortización: instrumento que es útil para ver cómo se reduce o varía una deuda con cada abono.

Derechos adquiridos por el deudor: diferencia entre el *saldo insoluto* y la deuda inicial, son equivalentes a los derechos cedidos por el acreedor.

Gradiente: diferencia común entre 2 rentas sucesivas en la amortización de renta variable aritméticamente.

Renta mínima: magnitud del primer pago que se hace para amortizar gradualmente un crédito, debe ser mayor que los intereses que se generan durante el primer periodo.

Serie en escalera: sucesión de rentas que crecen geométricamente con una razón constante.

Serie gradiente: conjunto de rentas que crecen aritméticamente, es decir, con una diferencia común.

Tasa en escalada: razón con la que crecen las rentas en una serie en escalera, es el cociente de cualquier renta entre la que le precede.

Traspaso de terrenos y otros bienes: operación de compraventa anticipada de un bien que se ha adquirido en abonos, cediéndole a un tercero quien paga los abonos subsecuentes.

Capítulo 7

Cuadro de constitución de fondos: instrumento que refleja la forma en la que crece, o se reduce, con cada renta, el monto en el fondo.

Fondo: cantidad de dinero que se acumula o se reduce con pagos periódicos devengando interés compuesto.

Fondos de renta fija: cuando los depósitos o retiros en un fondo son constantes, iguales entre sí.

Fondos de renta variable: si los depósitos o retiros en un fondo son variables, crecen o se reducen con el paso del tiempo.

Monto acumulado en un fondo o una anualidad: valor al final del plazo equivalente a la suma de todas las rentas. Incluye intereses.

Capítulo 8

Base de depreciación: cantidad en la que se deprecia un activo a lo largo de su vida útil, es la diferencia entre su valor original y su valor de rescate.

Costo original: el que tiene un activo al comenzar su vida útil.

Cuadro de depreciación: instrumento que refleja la depreciación anual, la acumulada y el valor contable de un activo en los años de su vida útil.

Depreciación: pérdida del valor de un activo fijo y tangible a consecuencia de su uso, ineficiencia y obsolescencia.

Depreciación acumulada: la suma de la depreciación anual desde el primer año de la vida útil de un activo.

Método de la línea recta: evaluación de la depreciación de manera constante de un activo. Se obtiene dividiendo la *base de depreciación* entre el número de años de su vida útil.

Método de la suma de dígitos: la depreciación anual de un activo es decreciente y se obtiene multiplicando la base de depreciación por una fracción cuyo denominador es igual a la suma de los dígitos de los años de la vida útil y el numerador es igual al año que corresponde en orden inverso.

Método de la tasa fija: la depreciación anual del activo es decreciente y se evalúa de acuerdo a una tasa constante de depreciación.

Método de unidades de servicio o de producción: la depreciación anual es variable y se evalúa de acuerdo con las unidades producidas o las horas de servicio del activo por año.

Método del fondo de amortización: la depreciación anual es constante y se supone se deposita con un fondo generando intereses para la reposición del activo al terminar su vida útil.

Tasa de depreciación: razón de la base de depreciación al costo original de un activo.

Valor de desecho de un activo: es su valor de rescate.

Valor de rescate de un activo: el que tiene o tendrá al terminar su vida útil.

Índice analítico

Este libro aborda el estudio de las **matemáticas financieras**, una de las ramas más interesantes y de mayor aplicación de las matemáticas modernas. Es el resultado de un esfuerzo por ofrecer de forma muy accesible la metodología y los conceptos para conocer cómo los bienes y el dinero pierden o cambian su valor y su poder adquisitivo con el paso del tiempo. El texto busca ser una valiosa herramienta para estudiantes, profesionales y, en general, para quienes viven inmersos en el mundo del dinero y las finanzas.

En esta edición se mantienen las características que tanto han gustado a nuestros usuarios. También pueden mencionarse las siguientes novedades importantes:

- En cada capítulo se incluye un par de ejercicios con aplicación de tecnología (prácticas en Excel en la página web), además de los problemas resueltos con calculadora científica o financiera.

- Se modificó y actualizó el contenido y los datos de más del 60% de los problemas propuestos y resueltos.

- Se incluyen ejercicios relacionados con situaciones de la vida real.

- En las secciones de ejercicios se incrementó el número de problemas de *falso o verdadero*.

- El apéndice del libro incluye el glosario, las respuestas a los ejercicios con número impar y una tabla con el número de cada día del año, que es útil para conocer los plazos en problemas donde los tiempos están en días.

Acuda al sitio web donde encontrará material adicional:
www.pearsoneducacion.net/villalobos



Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com